This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Digitized by Google

Sci 925.75

Harvard College Library

FROM

Prof W. F. Osgood

SCIENCE CENTER LIBRARY

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

/a - 1

WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE.

Digitized by Google

Digitized by Google

WIADOMOŚCI
MATEMATYCZNE.

Redaktor i Wydawca

S. DICKSTEIN.

TOM X.

WARSZAWA.
Druk Józefa Sikorskiego, Warecka Nr. 14.

1906

Digitized by Google

Sci 925.75

HARVARD COLLEGE LIBRARY
SEP 13 1911
CAMBRIDGE, MASS.

Prof. W. F. Ungerd

BOUND JUN 23 1913

Digitized by Google

Treść tomu X. — Table des matières du tome X.

Str.

R1c,O8. W. Biernacki. Wahadło wykładowe.
Le pendule de démonstration . . . . . 1 — 32

S4a,T2a. T. Friesendorff. Zastosowanie Termodynamiki do Teoryi sprężystości
Application de la Thermodynamique à la théorie de l'élascitité . . . . . 33 — 52

S4.T. H. A. Lorentz. Termodynamika i teorye kinetyczne. (Przekład).
La Thermodynamique et les théories cinétiques (Traduction) . . . . . 53 — 79

U,V10. R. Merecki. Obserwatoryum astronomiczne im. Jędrzejewicza za rok 1904 i 1905.
L'Observatoire astronomique Jędrzejewicz. Années 1904 et 1905 . . . . . 80 — 88

V10. R. Merecki i St. Bouffałł. Stacya Centralna meteorologiczna przy Muzeum Przemysłu i Rolnictwa w Warszawie, 1905.
Station Centrale Météorologique du Musée d'Industrie et d'Agriculture à Varsovie, 1905 . . . . 89 — 114

O6, Q2. S. Kwietniewski. O powierzchniach równych nachyleń w przestrzeni czterowymiarowej w zastosowaniu do teoryi krzywych płaskich.
Sur les surfaces d'égale pente dans l'espace à quatre dimensions avec l'application à la théorie des courbes planes . . . . . 129 — 167

Digitized by Google

R. Merecki. Okres „dzienny“ temperatury powietrza podczas nocy podbiegunowej.
Le période „diurne“ de la témperature de l'air pendant la nuit arctique . . . . . 169—180

W. Smosarski. Prace M. Margulesa o wahaniach peryodycznych ciśnienia barometrycznego.
Les travaux de M. Margules sur les oscillations périodiques de la pression barométrique . . . . 181—207

V10. W. Gorczyński. Wiadomość o organizacyi służby meteorologicznej włoskiej.
Note sur l'organisation du service météorologique italien . . . . . 209—221

PRZEGLĄD LITERATURY .- BIBLIOGRAFIA.
ANNALYSES ET COMPTES RENDUS. — BIBLIOGRAPHIE.

Bibliografia. Bibliographie . . . . . 115- 116, 223—232

U4. T. Levi-Civita. Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps. (S. D.) . . . 116—118

H12b. A. Guldberg Sur les équations linéaires aux différences finies. (S. D.) 122

V10. F. Kucharzewski Nowsze poglądy na zasady Mechaniki. (S D) 223

V10. G. H. Niewenglowski Les Mathématiques et la Médicine. (S. D.) . . . . . 216—225

M1¹ M²1. H. B. Guccia 1) Un théorème sur les courbes algebriques planes d'ordre *n*. 2) Un théorème sur les surfaces algébriques d'ordre *n*. 3) Sopra una nuova espresione del ordine e della classe di una curva gobba algebrica. (S. D.) . . . . . 225—226

S6,T2. T. Levi-Civita. Sulla penetrazione dei proiettili nei mezzi solidi. (S. D.) . . . . . 229—231

V10. G. Veronese. Il vero nella Matematica. (S. D.) . . 229—232

KRONIKA. — CHRONIQUE.

Akademia Umiejętności w Krakowie . . . . . 232—236
Towarzystwo Kursów naukowych w Warszawie 236
Komitet bibliografii i studyów astronomięznych 237

Digitized by Google

NEKROLOGIA.—NÉCROLOGIE

Karliński Franciszek Michał (1830—1906) 123

Skorowidz alfabetyczny nazwisk . . . . . 238—239
Index alphabétique des noms.

DODATEK (z osobną paginacyą). — SUPPLÉMENT.
Sprawozdania z posiedzeń Koła matematyczno-fizycznego w Warszawie, redagowane przez L. Zarzeckiego. Rok 1906/7.
Comptes rendus des séances du Cercle mathématique et physique à Varsovie, rédigés par L. Zarzecki, Année 1906/7 . . . . . 1—23

Digitized by Google

Digitized by Google

Sci 925.75
(Kossovsky)

WIADOMOŚCI

HARVARD COLLEGE LIBRARY

MATEMATYCZNE.

Redaktor i Wydawca

S. DICKSTEIN.

TOM X.

Zeszyt 1—2—3.

WARSZAWA.
Druk Józefa Sikorskiego, Warecka Nr. 14.

1906

Digitized by Google

Treść Zeszytu.

W. Biernacki. Wahadło wykładowe.
Le pendule de démonstration . . . . . 1 — 32

T. Friesendorff. Zastosowanie Termodynamiki do Teoryi sprężystości
Application de la Thermodynamique à la théorie de l'élascitité . . . . . 33 — 52

H. A. Lorentz. Termodynamika i teorye kinetyczne. (Przekład)
Le Thermodynamique et les théories cinétiques (Traduction) . . . . . 53 — 79

R. Merecki. Obserwatoryum astronomiczne im. Jędrzejewicza za rok 1904 i 1905.
L'Observatoire astronomique Jędrzejewicz. Années 1904 et 1905 . . . . . 80 — 88

R. Merecki i St. Bouffałł. Stacya Centralna meteorologiczna przy Muzeum Przemysłu i Rolnictwa w Warszawie, 1905.
Station Centrale Météorologique du Musée d'Industrie et d'Agriculture à Varsovie 1905 . . . . . 89 — 114

Przegląd literatury. Bibliografia
(Analyses et Comptes rendus. Bibliographie).

Bibliografia. Bibliographie . . . . . 115—116

T. Levi-Civita. Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps. (Acta mathematica 30, 305—324) . . . . . 116—118

A. Guldberg. Sur les équations linéaires aux différences finies. (Annales scientifiques de l'École Normale supérieure (3), 21, 1905) 122

Revista Trimestral de Matématicas 122

Annaes Scientificos da Academia Polytechnica . . . 122

Nekrologia — Nécrologie.

Karliński Franciszek Michał (1830—1906) 123

Digitized by Google

Prof. W. F. Osgood

W. BIERNACKI.

WAHADŁO WYKŁADOWE.

Praca niniejsza zawiera opis wahadła, przeznaczonego do celów wykładowych, oraz teoryę elementarną niektórych dokonywanych za pomocą niego doświadczeń.

1. Opis wahadła [1].

(Rys. 1.)

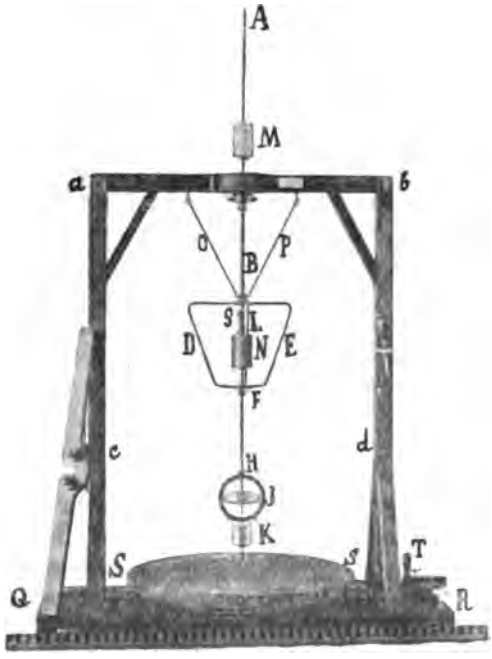
AB — pręt stalowy, zawieszony na belce *ab* w pierścieniach Cardana. Do dolnego końca pręta przytwierdzona jest klatka *DE* z grubego drutu, zaopatrzona u dołu (*F*) w pierścienie Cardana. W tych pierścieniach zawieszony jest (na przedłużeniu pręta *AB*) drugi pręt *GH* z giroskopem *I* i lejkiem *K*. Pręt ten można zmocowywać u góry z wystającym wewnątrz klatki dolnym końcem pręta *AB* za pomocą rurki *L*, nasuwanej na końce prętów i przytwierdzanej do nich śrubkami. *M* i *N* ciężary ołowiane, po cztery na każdym pręcie; można je nakładać na pręty lub zdejmować, oraz przesuwać wzdłuż prętów.

Za pomocą sztywnych prętów *O*—*P*, zawieszonych na belce *ab*, zaczepiając je (jak wskazano na rys. 1) o pręt *AB*, zapewnia się wahania tego pręta jedynie w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny ramy *abcd* przyrządu (wypadającej w płaszczyźnie

[1]) Przyrząd opisany wykonany został przez R. Woltmana, mechanika przy pracowni fizycznej Instytutu Politechnicznego w Warszawie.

Digitized by Google

rysunku). Po odczepieniu drutów $O—P$ (patrz niżej rys. 13) pręt AB we wszystkich kierunkach kołysać się może. Podobnież wahadło dolne (to znaczy pręt GH) może poruszać się we wszystkich kierunkach, lub też tylko w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny wahań pręta AB (zaczepionego drutami $O—P$, jak na rys. 1). W tym celu osi obrotu pierścieni Cardana, w któ-



Rys. 1.

rych pręt GH jest zawieszony, ułożone są jedna ($x_1—y_1$ na rys. 2) w płaszczyźnie ramy *abcd* przyrządu, druga ($x_2—y_2$) — do niej prostopadle. Za pomocą śrubki *z* zmocowywać można pierścień wewnętrzny z pierścieniem nieruchomym FF; wówczas pręt GH (O na ryc. 2) jedynie tylko dokoła osi $x_2—y_2$ poruszać się może.

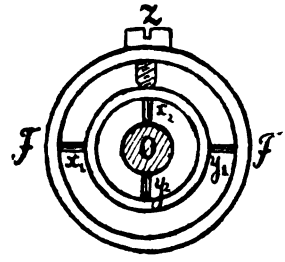
Rama *abcd* osadzona jest na desce QR, zaopatrzonej w nóżki śrubowe. SS na rysunku (rys. 1) oznacza osadzony na osi krąg drewniany. Gdy deska QR jest ustawiona poziomo, oś krążka SS

Digitized by Google

wypada na linii pionowej, przechodzącej przez punkt zawieszenia (środek pierscieni Cardana) pręta *AB*. Korbka *T*, połączona sznurkiem z krążkiem *SS*, służy do jego obracania.

Skala centymetrowa, ułożona obok przyrządu, widoczna na rys. 1, o wymiarach jego wnioskować pozwala.

Przyrząd opisany nadaje się przedewszystkiem do demonstrowania (jakościowego wprawdzie tylko) zależności okresu wahań wahadła fizycznego od rozmieszczenia w niem masy. W tym celu oba pręty (*AB* i *GH*) za pomocą rurki *L* łączą się razem, poczem przyrząd przedstawia pojedyńcze wahadło fizyczne. Przesuwając wzdłuż prętów ciężary *M* i *N* (czy zdejmując lub nakładając je), okres wahań tego wahadła w szerokich granicach zmieniać można. Po odczepieniu drutów *O*—*P* można mu nadawać, prócz ruchu harmonicznego, ruch też kołowy lub eliptyczny; ruchy te wykreśla na papierze podłożonym piasek zabarwiony, wysypujący się z lejka *K*.



Rys. 2.

2. Składanie ruchów harmonicznych.

Po rozłączeniu prętów *AB* i *GH* otrzymujemy wahadło podwójne. Jednem wahadłem jest tu całe urządzenie, zawieszone na belce *ab*, drugiem—wahadło dolne (pręt *GH*), zawieszone w *F*. Obu wahadłom przesuwaniem (czy też nakładaniem i zdejmowaniem) ciężarów *M* i *N* różne okresy wahań nadawać można.

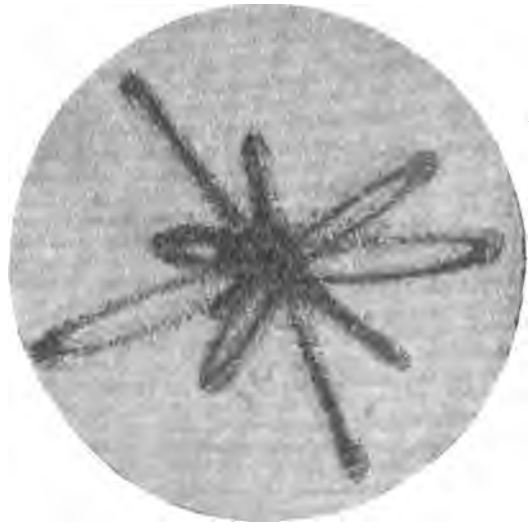
Jeżeli oba wahadła mają możność kołysania się na wszystkie strony, nieuniknione wstrząśnienia zmieniają kierunki nadanych im początkowo ruchów. Aby tego uniknąć, posługiwać się należy prętami *O*—*P*, zapewniającemi ruchy całego wahadła jedynie w płaszczyźnie, do płaszczyzny ramy przyrządu prostopadłej, oraz śrubką *z* (rys. 2), zmocowującą pierścień środkowy w zawieszeniu wahadła dolnego z pierścieniem zewnętrznym, poczem wahadło dolne jedynie w płaszczyźnie, do płaszczyzny wahań całego wahadła prostopadłej, kołysać się będzie. Wówczas demonstrować

Digitized by Google

można krzywe, otrzymane przez skład dwu wzajemnie prostopadłych ruchów harmonicznych o różnych okresach, znane pod nazwą krzywych Lissajous'a.

Szereg krzywych Lissajous'a, otrzymanych w sposób opisany (wykreślonych przez piasek, wysypujący się z lejka *K*), podajemy według zdjęć fotograficznych na Tablicy I. Są to krzywe, otrzymane, gdy stosunek okresów wahań składowych wynosi (w porządku szeregów poziomych):

1:1; 1:2; 2:3 i 3:4,



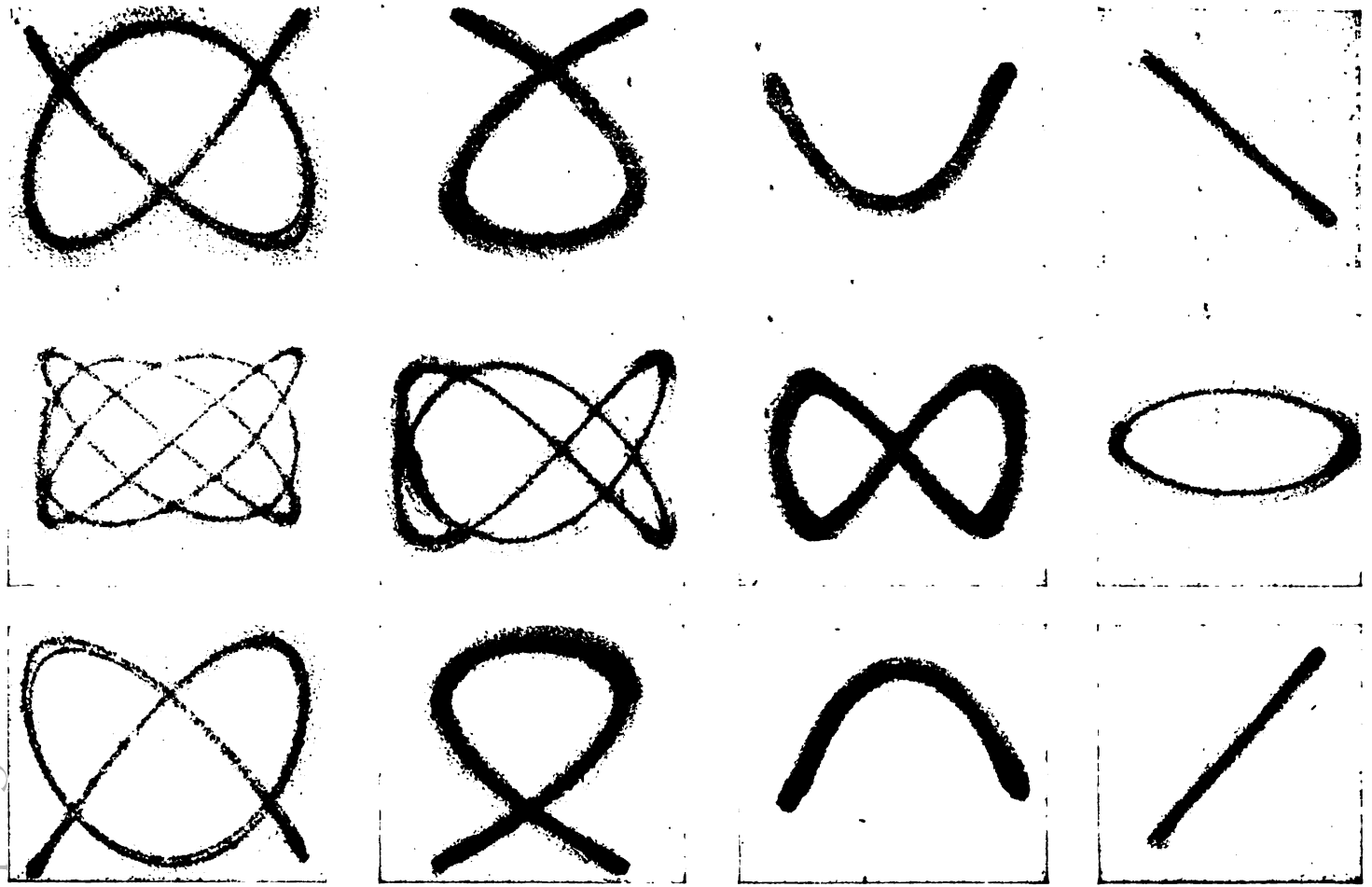
Rys. 3.

przy różnicy początkowej faz (w porządku szeregów pionowych):

$$0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ \text{(mniej więcej)}\ \text{i}\ \pi\ .$$

Bardzo wyraźnie demonstrować można dudnienią na przyrządzie opisanym. Oba wahadła ustawia się na okresy wahań jednakowe, poczem, zdejmując lub nakładając jeden z ciężarów, mieszczących się na tem lub owem wahadle, sprawia się niewielką w tych okresach różnicę. Wprawia się oba wahadła

Digitized by Google



Tablica I.

(str. 4)

Digitized by Google

Digitized by Google

w ruch w jednej płaszczyźnie, np. w płaszczyźnie do płaszczyzny ramy *abcd* przyrządu prostopadłej[1]. Aby obszerności wahań składowych były jednakowe (a przeto dudnienia dość wyraźne), wprawia się wahadła w ruch w sposób następujący: utrzymując jedną ręką dolny koniec lejka K (rys. 1) nad środkiem krążka SS (to znaczy, w środku wahań), wychylamy wahadło, pociągając na bok w kierunku pożądanym dolny koniec klatki DE. Jeżeli potem pozostawimy wahadło samemu sobie, dolny koniec lejka poruszać się będzie z kolejno zmieniającą się amplitudą. Wahania jego utrwalić można na papierze, ułożonym na krążku SS. Przy powolnym jednostajnym ruchu obrotowym papieru (krążka SS) piasek wysypujący się z lejka wykreśla na papierze krzywą (rys. 3), wykazującą wyraźnie kolejne zmniejszanie i powiększanie się amplitudy ruchu drgającego końca lejka.

3. Wykreślanie trochoid.

Trochoidą nazywa się linia krzywa, jaką wykreśla punkt, związany niezmiennie z kołem, toczącem się po obwodzie drugiego koła. Jeżeli koło pierwsze toczy się po obwodzie wewnętrznym drugiego koła, krzywa ta nosi miano hypotrochoidy, przy toczeniu się zaś koła pierwszego po obwodzie zewnętrznym koła nieruchomego otrzymujemy epitrochoidę.

Niechaj koło I (ze środkiem O_1) o promieniu r toczy się jednostajnie po obwodzie wewnętrznym koła II nieruchomego o promieniu R (rys. 4). O — środek koła nieruchomego. Osi spółrzędnych Ox—Oy i wciąż do nich równoległe O_1x'—O_1y' wybieramy, jak wskazano, na rysunku. Spółrzędne środka O_1 toczącego się koła względem osi Ox — Oy oznaczamy przez x_0, y_0. Punkt rozważany A, odległy od środka O_1 toczącego się koła o l, niechaj w chwili początkowej znajduje się w A_0 na osi Oy, w odległości $R+l$ od środka koła nieruchomego O. Spółrzędne tego punktu w położeniu dowolnem A względem osi Ox — Oy ozna-

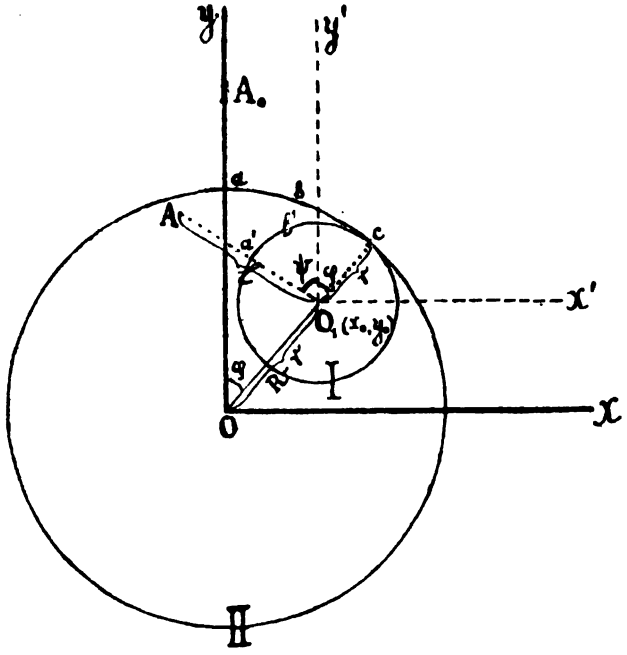
[1]) Aby wahadło dolne w tej płaszczyźnie kołysać się mogło, śrubkę (rys. 2) należy zluzować.

Digitized by Google

czamy przez x, y, względem osi $O_1x'-O_1'y'$ —przez x', y'. Niechaj obrót O_1 dokoła O odbywa się w kierunku obrotu wskazówek zegarowych. Oznaczając kąt yOO' przez φ, kąt AO_1y' przez ψ, mamy:

$$x' = l \sin \psi; \quad x_0 = (R-r) \sin \varphi;$$

$$y' = l \cos \psi; \quad y_0 = (R-r) \cos \varphi.$$



Rys. 4.

Ponieważ.

$$x = x' + x_0; \quad y = y' + y_0,$$

przeto:

$$x = (R-r) \sin \varphi - l \sin \psi,$$

$$y = (R-r) \cos \varphi + l \cos \psi.$$

Okres obrotu środka O' dokoła środka nieruchomego O oznaczamy przez T_1. Jeżeli czas ubiegły od chwili, gdy punkt rozważany znajdował się w A_0, do chwili, gdy znajduje się w A, wynosi t, to:

Digitized by Google

$$\varphi = \frac{2\pi t}{T_1}.$$

Prócz tego:

$$\text{łuk } abc = \text{łukowi } a'b'c,$$

czyli:

$$\varphi R = (\psi + \varphi) r;$$

otrzymujemy stąd:

$$\psi = \varphi \frac{R-r}{r} = \frac{2\pi t}{T_1} \cdot \frac{R-r}{r}.$$

Wstawiając wartości φ i ψ, przedstawimy równania hypotrochoidy w postaci:

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} x = (R-r) \sin \dfrac{2\pi t}{T_1} - l \sin\left(\dfrac{R-r}{r} \cdot \dfrac{2\pi t}{T_1}\right), \\ y = (R-r) \cos \dfrac{2\pi t}{T_1} + l \cos\left(\dfrac{R-r}{r} \cdot \dfrac{2\pi t}{T_1}\right). \end{cases}$$

W tejże samej postaci podać możemy równanie epitrochoidy. Przy tych samych założeniach otrzymujemy (por. rys. 5):

$$x = (R+r) \sin \varphi + l \sin \psi,$$

$$y = (R+r) \cos \varphi + l \cos \psi,$$

gdzie:

$$\varphi = \frac{2\pi t}{T_1}.$$

Ponieważ:

$$\smile abc = \smile a'b'c,$$

czyli:

$$R\varphi = r(\psi - \varphi),$$

przeto:

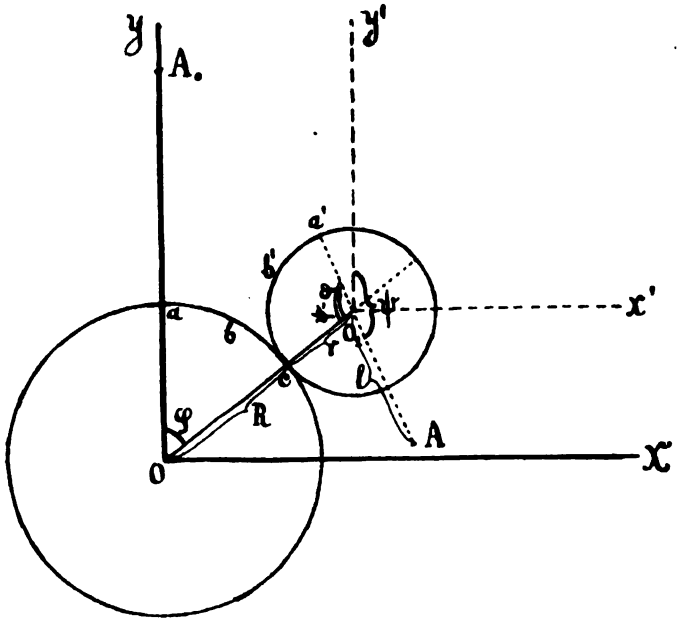
$$\psi = \frac{R+r}{r} \varphi = \frac{R+r}{r} \cdot \frac{2\pi t}{T_1}.$$

Wstawiając wartości φ i ψ, otrzymamy:

Digitized by Google

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} x = (R+r)\sin\dfrac{2\pi t}{T_1} + l\sin\left(\dfrac{R+r}{r}\cdot\dfrac{2\pi t}{T_1}\right) \\ y = (R+r)\cos\dfrac{2\pi t}{T_1} + l\cos\left(\dfrac{R+r}{r}\cdot\dfrac{2\pi t}{T_1}\right) \end{cases}$$

W inny jeszcze sposób hypo- i epitrochoidy otrzymać można. Niechaj środek O_1 koła II (rys. 6) o promieniu r_2 obraca się jednostajnie, dajmy na to, w kierunku obrotu wskazówek zegarowych z okresem T_1 dokoła środka O po kole nieruchomem I o pro-



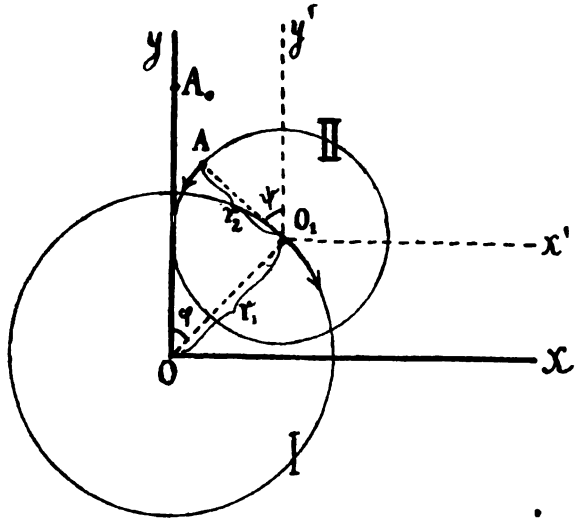
Rys. 5.

mieniu r_1; punkt A, krążący jednocześnie jednostajnie po kole II z okresem T_2 w kierunku przeciwnym, zakreśla hypotrochoidę. Istotnie, równania tego ruchu względem osi wybranych, jak wskazano na rysunku (w przypuszczeniu, jak poprzednio, że w chwili początkowej punkt rozważany zajmuje położenie A_0), są:

Digitized by Google

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} x = r_1 \sin 2\pi \dfrac{t}{T_1} - r_2 \sin 2\pi \dfrac{t}{T_2} \\ y = r_1 \cos 2\pi \dfrac{t}{T_1} + r_2 \cos 2\pi \dfrac{t}{T_2} \end{cases}$$

$$\left(\frac{2\pi t}{T_1} = \varphi, \quad \frac{2\pi t}{T_2} = \psi; \quad \text{por. rys. 6} \right).$$



Rys. 6.

Przez zestawienia tych równań z równaniami (I), otrzymujemy:

$$R - r = r_1,$$

$$l = r_2,$$

$$\frac{R - r}{r} = \frac{T_1}{T_2},$$

skąd elementy hypotrochoidy (to znaczy promień koła nieruchomego R, promień koła toczącego się r, oraz odległość l punktu rozważanego od środka toczącego się koła) obliczyć można.

Digitized by Google

Jeżeli punkt A krąży dokoła O_1 (podobnie jak i O_1 dokoła O) w kierunku wskazówek zegarowych, wówczas otrzymujemy:

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} x = r_1 \sin 2\pi \frac{t}{T_1} + r_2 \sin 2\pi \frac{t}{T_2}, \\ y = r_1 \cos 2\pi \frac{t}{T_1} + r_2 \cos 2\pi \frac{t}{T_2}. \end{cases}$$

Są to równania epitrochoidy. Zestawienie ich z równaniami (II) daje:

$$R + r = r_1.$$

$$l = r_2,$$

$$\frac{R+r}{r} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Z tych trzech równań wyznaczyć można trzy elementy epitrochoidy (t. j. R, r i l).

Przypuśćmy teraz, że okresy obrotów środka O_1 dokoła O po kole I (o promieniu r_1) w kierunku, zgodnym z kierunkiem obrotu wskazówek zegarowych, i obrotów punktu A dokoła O_1 po kole II (o promieniu r_2) w kierunku przeciwnym są jednakowe równe T. Równania (III) dają w tym razie:

$$\text{(V)} \quad \begin{cases} x = (r_1 - r_2) \sin 2\pi \frac{t}{T}, \\ y = (r_1 + r_2) \cos 2\pi \frac{t}{T}. \end{cases}$$

Z nich otrzymuje się:

$$\frac{x^2}{(r_1 - r_2)^2} + \frac{y^2}{(r_1 + r_2)^2} = 1.$$

Jest to równanie elipsy o półosiach, równych $r_1 - r_2$ [1] i $r_1 + r_2$,

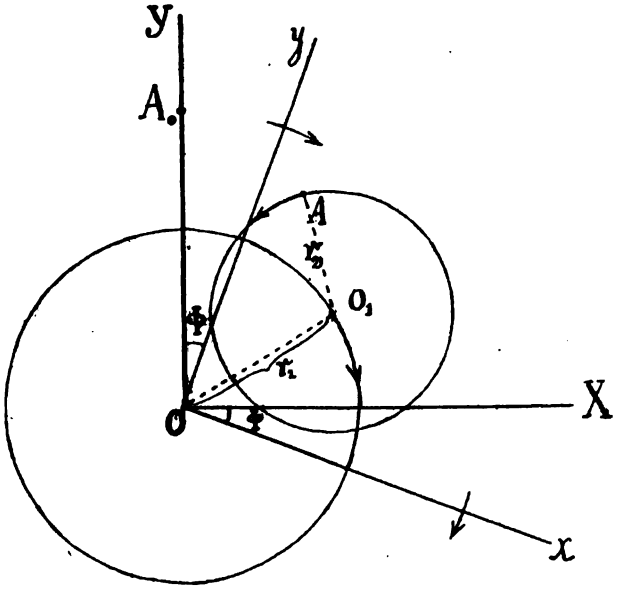
[1]) lub $r_2 - r_1$, jeżeli $r_1 < r_2$.

Digitized by Google

ze środkiem w O. Przy obranych kierunkach obrotów składowych (środka O_1 dokoła O i punktu A dokoła O_1) ruch po elipsie odbywa się w kierunku obrotu wskazówek zegarowych, jeżeli $r_1 > r_2$, i w kierunku przeciwnym, jeżeli $r_1 < r_2$.

Jeżeli $r_1 = r_2 = r$, otrzymujemy:

$$x = 0,$$
$$y = 2r \cos 2\pi \frac{t}{T};$$



Rys. 7.

to znaczy: ruch prosty harmoniczny wzdłuż osi Oy z okresem T i amplitudą równą $2r$. W chwili początkowej punkt rozważany znajduje się w A_0 (rys. 6), t. j. jest wychylony najbardziej w kierunku dodatniej osi Oy. Dodajmy jeszcze jednostajny ruch obrotowy (nieruchomego dotychczas koła I) dokoła środka O w kierunku zgodnym z kierunkiem obrotu wskazówek zegarowych. Kierunek osi spółrzędnych nieruchomych $OX—OY$ (rys. 7) obieramy zgodnie z kierunkiem osi $Ox—Oy$ w chwili początkowej.

Digitized by Google

Oznaczając kąt pomiędzy osiami OX i Ox (czy też OY i Oy) w chwili dowolnej (w momencie t) przez Φ, mamy:

$$X^{1)} = x \cos \Phi + y \sin \Phi,$$

$$Y = -x \sin \Phi + y \cos \Phi.$$

Niechaj okres ruchu obrotowego dodanego obecnie wynosi τ. Wówczas:

$$\Phi = \frac{2\pi t}{\tau}.$$

Wstawiając prócz tego wartości x i y z równań (V), z łatwością otrzymamy:

$$\text{(VI)} \quad \begin{cases} X = r_1 \sin 2\pi t\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{\tau}\right) - r_2 \sin 2\pi t\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{\tau}\right) \\ Y = r_1 \cos 2\pi t\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{\tau}\right) + r_2 \cos 2\pi t\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{\tau}\right) \end{cases}.$$

Są to więc równania ruchu wypadkowego dwu ruchów: 1) ruchu eliptycznego [2] w kierunku wskazówek zegarowych (jeżeli $r_1 > r_2$) lub w kierunku przeciwnym (jeżeli $r_1 < r_2$) z okresem T i 2) ruchu obrotowego jednostajnego dokoła środka elipsy z okresem τ w kierunku obrotu wskazówek zegarowych.

Niechaj

$$\tau = nT.$$

Rozważmy trzy przypadki szczególne.

Przypadek 1-y: $n > 1$.

Równania (VI) przedstawmy w postaci:

$$X = r_1 \sin \frac{2\pi t}{\frac{n}{n+1} T} - r_2 \sin \frac{2\pi t}{\frac{n}{n-1} T},$$

---

[1]) X, Y są to, oczywiście, spółrzędne punktu rozważanego względem osi nieruchomych.

[2]) lub prostego harmonicznego, jeżeli $r_1 = r_2$.

Digitized by Google

$$Y = r_1 \cos \frac{2\pi t}{\frac{n}{n+1} T} + r_2 \cos \frac{2\pi t}{\frac{n}{n-1} T}.$$

Porównanie tych ostatnich równań z równaniami (III) przekonywa, że ruch nasz wypadkowy będzie takim samym ruchem, jaki się otrzymuje od składu dwu ruchów obrotowych w kierunkach przeciwnych o promieniach r_1 i r_2 z okresami:

$$T_1 = \frac{n}{n+1} T \quad \text{i} \quad T_2 = \frac{n}{n-1} T \text{ [1]}.$$

Krzywą ruchu badanego jest więc hypotrochoida, której elementy (R, r, l, por. wyżej) wyznaczyć można z równań:

$$R - r = r_1,$$

$$l = r_2,$$

$$\frac{R-r}{r} = \frac{n-1}{n+1}.$$

Przypadek 2 gi: $n < 1$.

Równania (VI) w tym razie przedstawimy w postaci:

$$X = r_1 \sin \frac{2\pi t}{\frac{n}{n+1} T} + r_2 \sin \frac{2\pi t}{\frac{n}{1-n} T},$$

$$Y = r_1 \cos \frac{2\pi t}{\frac{n}{n+1} T} + r_2 \cos \frac{2\pi t}{\frac{n}{1-n} T}$$

Porównajmy te równania z równaniami (IV). Widzimy, że ruch

[1]) Zwróćmy uwagę na to, że kierunek obrotów dodatkowych (z okresem τ) jest zgodny z kierunkiem obrotu składowego o promieniu r_1, którego okres został, dzięki obrotowi dodanemu, zmniejszony.

Digitized by Google

badany jest ruchem wypadkowym dwu ruchów obrotowych, zachodzących w kierunkach jednakowych, o promieniach r_1 i r_2 z okresami:

$$T_1 = \frac{n}{n+1} T \quad , \quad T_2 = \frac{n}{1-n} T .$$

Krzywą ruchu tego jest e p i t r o c h o i d a, elementy której (R, r i l, por. wyżej) obliczyć możemy z równań:

$$R + r = r_1 ,$$

$$l = r_2 ,$$

$$\frac{R+r}{r} = \frac{1-n}{1+n} .$$

P r z y p a d e k 3-ci: $n = 1$.

Jeżeli $\tau = T$, równania (VI) dają:

$$X = r_1 \sin \frac{2\pi t}{\frac{1}{2} T} ,$$

$$Y = r_1 \cos \frac{2\pi t}{\frac{1}{2} T} + r_2 .$$

Środek spółrzędnych przenieśmy do punktu O_2, leżącego na osi OY (dodatniej) w odległości r_2 od O. Oznaczając spółrzędne względem nowych osi przez X_1 i Y_1, mamy:

$$X = X_1 \quad ; \quad Y = Y_1 + r_2 .$$

Równania ruchu badanego względem nowych osi są przeto:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= r_1 \sin 2\pi \frac{t}{\frac{1}{2} T} \\ Y_1 &= r_1 \cos 2\pi \frac{t}{\frac{1}{2} T} \end{aligned}\right\} \quad \text{i } X_1^2 + Y_1^2 = r_1^2 .$$

Widzimy, że ruch badany jest ruchem jednostajnym po kole o promieniu r_1 w kierunku wskazówek zegarowych (t. j. w kie-

Digitized by Google

runku obrotu dodanego) z okresem $\frac{1}{2}T$, t. j. dwa razy mniejszym aniżeli okresy ruchów składowych.

Jeżeli $r_1 = r_2 = r$, otrzymujemy obieg po kole o promieniu r z okresem $\frac{T}{2}$. Jest to przypadek składu ruchu prostego harmonicznego z okresem T i amplitudą $2r$ i ruchu obrotowego jednostajnego dokoła środka wahań o tym samym okresie. Otrzymuje się ruch jednostajny po kole, które przechodzi przez środek wahań (średnica koła $= 2r$).

Jeżeli $r_1 > r_2$, mamy do czynienia ze składem ruchu eliptycznego z ruchem obrotowym w tym samym kierunku o tym samym okresie. Ruchem wypadkowym jest ruch jednostajny po kole (w tym samym kierunku) z okresem dwa razy mniejszym o promieniu r_1. Średnica koła $2r_1 > r_1 + r_2$; to znaczy, środek O wypada wewnątrz koła otrzymanego.

Jeżeli wreszcie $r_1 < r_2$, mamy skład ruchu eliptycznego z ruchem obrotowym dokoła środka elipsy o tym samym okresie w kierunku przeciwnym. Ruchem wypadkowym jest ruch jednostajny po kole w kierunku przeciwnym ruchowi po elipsie. Średnica koła $2r_1 < r_1 + r_2$; środek O wypada przeto w tym razie nazewnątrz koła otrzymanego.

Gdybyśmy więc wahadłu nadali ruch prosty harmoniczny, lub ruch eliptyczny w jednym czy też drugim kierunku i jednocześnie ruch obrotowy jednostajny dokoła linii pionowej, przechodzącej przez punkt zawieszenia wahadła, piasek wysypujący się z lejka, w który wahadło jest na dole zaopatrzone, wykreślałby na papierze podłożonym hypotrochoidy czy też epitrochoidy (wreszcie koła) różnego kształtu przy różnych stosunkach okresów wahań wahadła i dodanego ruchu obrotowego oraz przy różnych stosunkach półosi i kierunkach ruchu eliptycznego, wahadłu nadanego. Zamiast nadawania całemu wahadłu ruchu obrotowego, dogodniej jest obracać dokoła tej samej osi w kierunku przeciwnym papier podłożony.

W tym celu wahadło, przez nas opisane (rys. 1), zaopatrzone jest w krążek drewniany SS, który można obracać dokoła osi pionowej za pomocą korbki T. Skoro za pomocą nóżek śrubowych deska QR przyrządu ustawiona jest tak, że środek krążka

Digitized by Google

wypada dokładnie pod dolnym końcem lejka K (gdy wahadło wisi nieruchomo), wówczas oś obrotu krążka SS układa sie wzdłuż linii pionowej, przechodzącej przez punkt zawieszenia wahadła.

Na tablicy II podajemy zdjęcia fotograficzne krzywych, otrzymanych opisanym sposobem. W pierwszym szeregu pionowym tablicy dane są krzywe otrzymane, gdy wahadło wykonywało ruchy proste harmoniczne (to znaczy wahało się w jednej płaszczyźnie), i krążkowi SS (na którym leżał obracający się wraz z krążkiem papier) nadawano ruch obrotowy jednostajny (dokoła środka wahań). Drugi szereg pionowy zawiera krzywe, otrzymane wtedy, gdy wahadło wykonywało ruchy eliptyczne, i obrót krążka SS odbywał się w kierunku przeciwnym ruchowi po elipsie. Krzywe, w tym szeregu zawarte, są więc krzywemi ruchów wypadkowych ruchu eliptycznego i jednakowo z nim skierowanego ruchu obrotowego o różnych okresach. W trzecim wreszcie szeregu pionowym mamy krzywe, otrzymane na papierze, ułożonym na krążku SS, obracanym w tym samym kierunku, w jakim odbywał się ruch eliptyczny wahadła. Są to więc krzywe ruchów wypadkowych ruchu eliptycznego z ruchem obrotowym, skierowanym przeciwnie.

W porządku szeregów poziomych (od góry na dół) krzywe, przedstawione na Tablicy II, są:

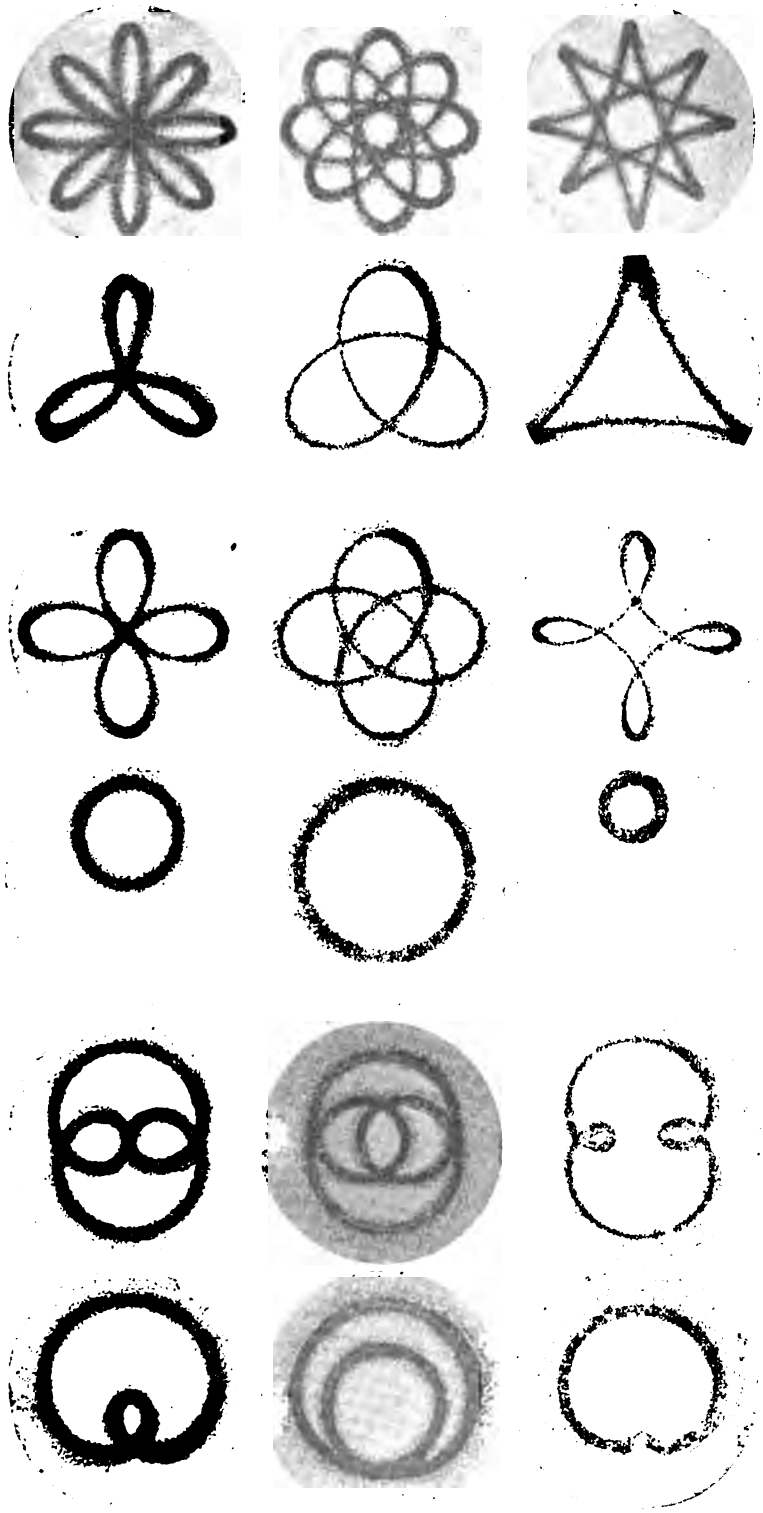
1) Hypotrochoidy, otrzymane przy $n = 4$ (szereg poziomy pierwszy), 3 (szereg drugi) i 2 (szereg trzeci).

2) Koła, otrzymane przy $n = 1$ (szereg poziomy czwarty).

3) Epitrochoidy przy $n = \frac{1}{2}$ (szereg poziomy piąty) i $n = \frac{1}{3}$ (szereg szósty).

Do obracania krążka służył tu niewielki elektromotor z szeregiem przekładni. Pożądany stosunek n okresów obrotów krążka i ruchów wahadła można było otrzymać przez odpowiedni dobór przekładni, niekiedy drogą niewielkich zmian siły prądu w elektromotorze, oraz (przesuwaniem ciężarów M lub N, por. rys. 1) okresu wahań wahadła. Krzywe pierwszych czterech szeregów poziomych otrzymują się w czasie jednego obrotu całkowitego krążka SS (rys. 1), krzywe szeregów piątego i szóstego—w czasie

Digitized by Google

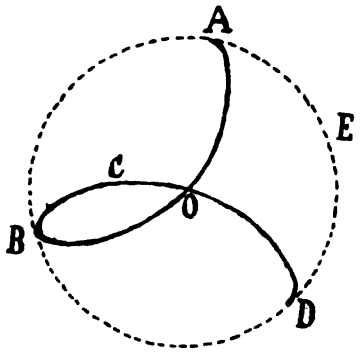


Tablica II. (str. 16)

Digitized by Google

Digitized by Google

jednego wachnięcia wahadła. W czasie tym krzywe, odpowiadające wartościom $n = 4, 2$ i $\frac{1}{2}$, wykreślane są raz jeden, krzywe, odpowiadające wartościom $n = 3, 1$ i $\frac{1}{3}$ — dwa razy. Każda krzywa szeregów pionowych drugiego i trzeciego zawarta jest całkowicie pomiędzy dwoma kołami spółśrodkowemi (ze środkiem w środku wahań) o promieniach równych wielkiej i małej półosi ruchu eliptycznego składowego.



Rys. 8.

Zwróćmy jeszcze uwagę na hypotrochoidy, przedstawione w trzech pierwszych szeregach poziomych na Tablicy II. Wykreślmy koło (ze środkiem w środku ruchu harmonicznego, czy też eliptycznego składowego), obejmujące całą krzywą, to znaczy, przechodzące przez punkty krzywej, najbardziej od środka oddalone. Niechaj w czasie jednego wachnięcia wykreślana jest część $AOBCOD$ krzywej badanej (rys. 8). Liczba, wykazująca, jaką część całego koła stanowi łuk jego AED, równa jest stosunkowi n okresów ruchów składowych obrotowego i wahadłowego (czy też eliptycznego),

Digitized by Google

4. Wahadło giroskopowe.

Weźmy zrównoważoną ważkę giroskopową, wprawmy krążek D (rys. 9) jej w szybki ruch obrotowy. widziany z końca H osi, np., w kierunku obrotu wskazówek zegarowych. Zawieśmy w punkcie H ciężarek P na odległości L od osi pionowej O, dokoła której przyrząd obracać się może. Cały przyrząd w tych warunkach obracać się będzie, widziany z góry, w kierunku strzałki zegarowej z prędkością kątową:

$$\Omega = \frac{PL}{B\omega},$$

jeżeli przez B oznaczymy moment bezwładności obracającego się krążka, przez ω jego prędkość kątową [1].

Jeżeli, odwrotnie, przyrządowi zrównoważonemu, po wprawieniu krążka jego w szybki obrót w kierunku wskazanym, przez potrącenie, np. usiłujemy nadać ruch obrotowy jednostajny z prędkością kątową Ω w płaszczyźnie poziomej w kierunku obrotu wskazówek zegara (gdy patrzymy nań z góry), nadając, dajmy na to, punktowi H, odległemu od O o L, prędkość liniową $v=L\Omega$, przyrząd końcem H do góry unosić się będzie, jak gdyby działała nań w punkcie H siła, skierowana pionowo do góry, równa:

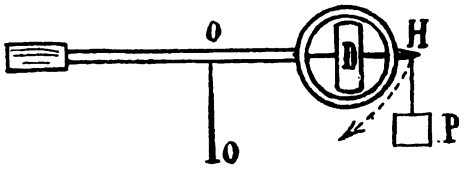
$$P = \Omega \frac{B\omega}{L}.$$

Tak wielką siłę, skierowaną pionowo na dół, w punkcie H przyczepić należy, by przyrząd w płaszczyźnie poziomej obracał się z prędkością kątową Ω. Gdybyśmy potrącili koniec H przyrządu w kierunku (w płaszczyźnie poziomej) przeciwnym, nadając przyrządowi obrót (widziany z góry) w kierunku przeciwnym obrotowi wskazówek zegara z tąż samą, co i poprzednio, prędkością

[1] A. Witkowski. Zasady Fizyki, t. I, str. 142.

Digitized by Google

kątową Ω, koniec H opuszczałby się na dół. Dla zrównoważenia siły, ciągnącej go w tym przypadku na dół, należałoby w punkcie H przyczepić tak samo wielką siłę, skierowaną pionowo do góry. Przy zmianie kierunku ruchu obrotowego krążka D na przeciwny i siła omawiana, którą równoważyć należy siłę zewnętrzną, by ruch odbywał się w kierunku nadanym, przybiera kierunek przeciwny. Jest ona prostopadła do płaszczyzny, zawierającej oś krążka i kierunek prędkości v, końcowi H tej osi nadawanej. Kierunek jej wyznaczyć można zawsze z łatwością według reguły następującej: jeżeli krążek, widziany z końca H jego osi, obraca się w kierunku strzałki zegarowej, skierujmy palec wskazujący ręki prawej wzdłuż osi krążka w kierunku od H do O (rys. 9), palec średni—w kierunku prędkości v, końcowi H osi nadawanej; palec wielki daje kierunek pojawiającej się siły P. Jeżeli krążek (widziany z końca H osi) obraca się w kierunku przeciwnym. Taż sama reguła dotyczy ręki lewej.



Rys. 9.

Zakreślajmy ważką giroskopową stożek kołowy z wierzchołkiem w O (rys. 10) [1]. Przypuśćmy, że koniec H osi porusza się jednostajnie po kole HA w kierunku zgodnym z kierunkiem obrotów krążka przyrządu. Wówczas na koniec H osi działa wciąż siła P, równa:

$$P = v \frac{B\omega}{L^2},$$

gdzie v oznacza prędkość końca H osi w jego ruchu kołowym [2]. Siła ta, prostopadła do osi OH, skierowana jest ku osi; a byłaby

[1]) Na rys. 10 krążek nie jest przedstawiony; linia OH czy też OA odpowiada linii OH na rys. 9.

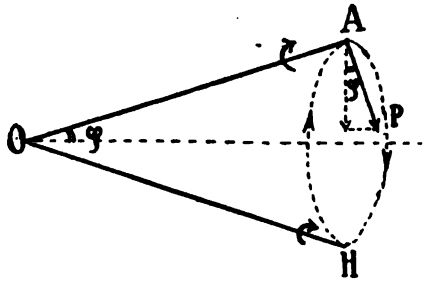
[2]) Istotnie, mieliśmy wcześniej $P = \Omega \frac{Bw}{L}$, gdzie $v = \Omega L$.

Digitized by Google

skierowana wręcz przeciwnie, gdyby ruch stożkowy osi odbywał się w kierunku przeciwnym względem ruchu obrotowego krążka. Składowa tej siły, wypadająca w płaszczyznie koła, zakreślanego przez koniec H osi, wynosi:

$$P \cos \varphi = v \frac{B\omega}{L^2} \cdot \cos \varphi ,$$

gdzie φ oznacza kąt stożka, oznaczony na rysunku. Ruch końca H osi po kole wymaga siły dośrodkowej, którą oznaczymy przez F. Jeżeli krążek przyrządu wiruje w kierunku zgodnym z kierunkiem obrotu punktu H po kole, pojawia się siła dośrodkowa $P \cos \varphi$,



Rys. 10.

skierowana zgodnie z siłą F; wskutek tego ruch rozważany kołowy jest przyśpieszony. Jeżeli zaś kierunki obrotów krążka i osi OH po stożku są przeciwne, siła $P \cos \varphi$ jest skierowana wręcz przeciwnie, aniżeli siła F; wskutek tego rozważany ruch kołowy będzie zwolniony.

Zastosujmy uwagi powyższe do wahadła giroskopowego. Tak się nazywa wahadło, zaopatrzone na dole w krążek (giroskop), wirujący szybko koło osi, wypadającej na przedłużeniu pręta wahadła (rys. 11). Uprościmy dalsze dociekania, uważając wahadło nasze giroskopowe za wahadło matematyczne o długości L ($= OH$) i rozważając ruchy jego o bardzo małych obszernościach. Okres wahań (ruchów kołowych, eliptycznych) naszego wahadła wynosi wówczas:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} .$$

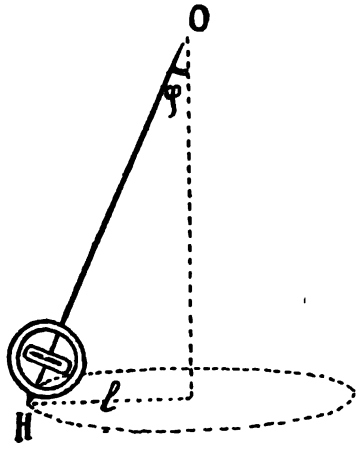
Digitized by Google

Wprawmy wahadło w ruch kołowy. Oznaczając masę wahadła przez M, znajdujemy siłę dośrodkową w tym ruchu:

$$F = Mg \sin\varphi \cos\varphi ,$$

gdzie φ oznacza kąt przy wierzchołku stożka, przez wahadło zakreślanego. Jeśli krążek giroskopu (o momencie bezwładności B) wahadła wiruje z prędkością kątową ω, zjawia się dodatkowa siła dośrodkowa:

$$\pm v \frac{B\omega}{L^2} \cos\varphi ,$$



Rys. 11.

gdzie v oznacza prędkość liniową wahadła (punktu H) w ruchu kołowym. Znąk + czy — brać należy w zależności od tego, czy obrót punktu H po kole odbywa się w kierunku, zgodnym z kierunkiem ruchu obrotowego krążka, czy też w kierunku przeciwnym. Skoro więc krążek w ruch obrotowy wprawiony został, siła dośrodkowa w ruchu kołowym wahadła wynosi:

$$F' = Mg \sin\varphi \cos\varphi \pm v \frac{B\omega}{L^2} \cos\varphi .$$

Toż samo byłoby, gdyby na wahadło nasze (z nieruchomym krąż

Digitized by Google

kiem) działała w kierunku pionowym nie siła Mg, równa ciężarowi wahadła, lecz siła:

$$P = Mg \pm v \frac{B\omega}{L^2} \frac{1}{\sin\varphi}.$$

Promień koła, zakreślanego przez punkt H wahadła, oznaczmy przez l. Prędkość v wynosi:

$$v = \frac{2\pi l}{T} = l\sqrt{\frac{g}{L}}.$$

Przeto:

$$P = Mg \pm \frac{l}{\sin\varphi} \cdot \frac{B\omega}{L^2}\sqrt{\frac{g}{L}}.$$

Lecz $l = L\sin\varphi$; mamy więc:

$$P = Mg \pm \frac{B\omega}{L}\sqrt{\frac{g}{L}}.$$

Pod działaniem takiej siły okres wahań (kołowych w danym przypadku) wahadła naszego będzie:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g \pm \frac{B\omega}{ML}\sqrt{\frac{g}{L}}}}.$$

Nadana wahadłu energia kinetyczna $\frac{1}{2}Mv^2$ nie zmienia się przez to, że krążek giroskopu wahadła uprzednio w ruch obrotowy wprawiony został. Ponieważ okres ruchów kołowych przez wprawienie w obrót krążka zmianie ulega, wynika stąd, że przytem promień ruchu kołowego zmienia się z l na l' według równania:

$$v = \frac{2\pi l}{T} = \frac{2\pi l'}{T'}.$$

Otrzymujemy stąd:

$$l' = l\frac{T'}{T}.$$

Digitized by Google

Drganie proste harmoniczne wahadła z okresem

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

uważajmy za ruch wypadkowy dwu ruchów kołowych o tych samych okresach, skierowanych przeciwnie, o jednakowych promieniach l, równych połowie amplitudy wahań. W wahadle giroskopowem, skoro krążek w obrót wprawiony został, jeden z tych ruchów składowych, zgodny co do kierunku z ruchem krążka, zostaje przyśpieszony i promień jego odpowiednio zmniejszony, drugi ruch składowy, przeciwny co do kierunku ruchowi krążka, zostaje zwolniony, a promień jego powiększony. Ruchem przeto wahadła giroskopowego z wirującym krążkiem będzie wogóle ruch wypadkowy dwu ruchów kołowych o różnych okresach i o różnych promieniach, mianowicie o okresach:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g + \frac{B\omega}{ML}\sqrt{\frac{g}{L}}}} \quad , \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g - \frac{B\omega}{ML}\sqrt{\frac{g}{L}}}} .$$

Promienie l_1 i l_2 tych ruchów składowych będą równe:

$$l_1 = l\,\frac{T_1}{T} \quad \text{i} \quad l_2 = l\,\frac{T_2}{T} .$$

Oznaczmy

$$\frac{B\omega}{MLg}\sqrt{\frac{g}{L}} \text{ przez } a.$$

Napiszemy w tym razie:

$$T_1 = \frac{T}{\sqrt{1+a}} \quad ; \quad l_1 = \frac{l}{\sqrt{1+a}} ;$$

$$T_2 = \frac{T}{\sqrt{1-a}} \quad ; \quad l_2 = \frac{l}{\sqrt{1-a}} .$$

Digitized by Google

Rozważać będziemy takie jedynie przypadki, w których:

$$a = \frac{B\omega}{MLg}\sqrt{\frac{g}{L}} < 1.$$

Wyraz a przedstawmy w postaci:

$$a = \frac{B\omega}{ML^{\frac{3}{2}}g^{\frac{1}{2}}}.$$

Stąd widzieć można, w jaki sposób zmienia się a przy zmianie prędkości kątowej ω krążka i długości L wahadła.

Ruchem wypadkowym dwu ruchów kołowych, skierowanych przeciwnie o różnych okresach (T_1 i T_2) jest ruch po hypotrochoidzie, który też otrzymać można, kombinując ruch eliptyczny o pewnym okresie T_0 z półosiami $l_2 + l_2$ i $l_2 - l_1$[1] z ruchem jednostajnym obrotowym o okresie $\tau = nT_0$ dokoła środka ruchu eliptycznego. T_0 i n znajdziemy z dwu równań (str. 13):

$$T_1 = \frac{n}{n+1}\,T_0 = \frac{T}{\sqrt{1+a}},$$

$$T_2 = \frac{n}{n-1}\,T_0 = \frac{T}{\sqrt{1-a}}.$$

Dzieląc te równania jedno przez drugie, otrzymujemy:

$$\frac{n-1}{n+1} = \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}},$$

i stąd:

$$n = \frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}} = \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}.$$

Będzie tedy:

$$T_0 = \frac{T}{\sqrt{1+a}}\cdot\frac{n+1}{n} = T\cdot\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{1+\sqrt{1-a^2}}.$$

---

[1]) $l_2 > l > l_1$.

Digitized by Google

Zaznaczmy jeszcze:

$$\frac{l_1+l_2}{l_2-l_1}=\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}=n.$$

Jeżeli a jest bardzo małe w porównaniu z jednością [1], przyjąć można: $n=\frac{2}{a}$, $T_0=T$.

Zdajmy sobie sprawę z rozumowań powyższych. Nadajemy wahadłu giroskopowemu, po uprzedniem wprawieniu krążka w obrót, ruch prosty harmoniczny z amplitudą $2l$, puszczając go np. swobodnie z punktu jego największego wychylenia. Wahadło zakreślać będzie hypotrochoidę, wypadkową dwu ruchów kołowych: 1) szybszego z okresem $T_1<T$ o promieniu $l_1<l$ w kierunku zgodnym z kierunkiem obrotu krążka, i 2) ruchu powolniejszego z okresem $T_2>T$ po kole o promieniu $l_2>l$ w kierunku przeciwnym; T oznacza okres ruchów naszego wahadła z nieruchomym krążkiem. Ruch będzie taki sam, jaki się otrzymuje od składu ruchu eliptycznego z okresem T_0, którego półosi są równe l_2+l_1 i l_2-l_1, z jednostajnym obrotem dokoła środka wahań o okresie $\tau=nT_0$ w kierunku, zgodnym z kierunkiem obrotu po kole o promieniu l_1 (z mniejszym okresem [2]), a więc i z kierunkiem obrotu krążka, to znaczy w kierunku przeciwnym ruchowi po elipsie ($l_1<l_2$). Hypotrochoidy tego rodzaju otrzymaliśmy poprzednio na papierze, obracającym się pod wahadłem i poruszającym się eliptycznie w kierunku, zgodnym z kierunkiem ruchu wahadła (szereg pionowy 3-ci na Tablicy II). Stosunek promieni koła zewnętrznego i koła wewnętrznego, pomiędzy któremi epitrochoida jest zawarta (t. j. stosunek $\frac{l_2+l_1}{l_2-l_1}$, por. str. 17), na zasadzie teoryi wyłożonej, powinien wy-

---

[1]) Zachodzi to w przypadku wahadła bardzo długiego przy małych szybkościach kątowych krążka; w ogóle zaś: $\frac{2}{a}=n+\frac{1}{n}$, przeto $n<\frac{2}{a}$.

[2]) Por. uwagę na str. 13.

Digitized by Google

nosić n. Wartość zaś n, jak to już wiemy, z kształtu hypotrochoidy poznać możemy.

Nadajemy naszemu wahadłu ruch eliptyczny z półosiami a (wielka) i b (mała) w kierunku przeciwnym obrotowi krążka. Ruch ten uważajmy za ruch wypadkowy ruchu kołowego o promieniu r_1 w kierunku obrotu krążka i ruchu kołowego o promieniu r_2 w kierunku przeciwnym, przyczem:

$$r_2 + r_1 = a \quad ; \quad r_2 - r_1 = b, \qquad (r_1 < r_2)$$

Jeżeli krążek wahadła uprzednio w obrót wprawiony został, wahadło nasze poruszać się będzie ruchem wypadkowym dwu ruchów kołowych:

1) Z okresem $T_1 = \frac{n}{n+1} T_0 = \frac{T}{\sqrt{1+a}}$ o promieniu $r'_1 = \frac{r_1}{\sqrt{1+a}}$.

2) „ „ $T_2 = \frac{n}{n-1} T_0 = \frac{T}{\sqrt{1-a}}$ „ „ $r'_2 = \frac{r_2}{\sqrt{1-a}}$,

czyli ruchem wypadkowym ruchu eliptycznego o okresie T_0 w kierunku przeciwnym obrotowi krążka ($r'_1 < r'_2$) z półosiami:

$$a' = r'_2 + r'_1 \quad \text{i} \quad b' = r'_2 - r'_1,$$

oraz ruchu obrotowego dokoła środka wahań (ruchu eliptycznego) o okresie $\tau = nT_0$ w kierunku obrotu po kole o promieniu r_1', to znaczy w kierunku przeciwnym ruchowi po elipsie. Otrzymują się przeto znów hypotrochoidy, przedstawione już na Tablicy II w szeregu pionowym 3-im.

Zważmy, że: $r'_1 < r_1$, $r'_2 > r_2$, przeto $b' > b$, to znaczy promień koła wewnętrznego, ograniczającego hypotrochoidę otrzymaną (półoś mniejsza ruchu eliptycznego składowego), jest większy, aniżeli półoś mniejsza b nadawanego ruchu eliptycznego.

Jeżeli $a = b$, to znaczy, jeżeli wahadłu nadajemy ruch kołowy o promieniu a w kierunku przeciwnym obrotowi krążka, wówczas:

$$r_1 = 0; \quad r_2 = a = b,$$

$$r'_1 = 0; \quad r'_2 = \frac{r_2}{\sqrt{1-a}} = \frac{a}{\sqrt{1-a}} = a' = b',$$

Digitized by Google

Otrzymujemy więc ruch kołowy o promieniu $r'_2 = \frac{a}{\sqrt{1-a}}$ w kierunku ruchu nadanego z okresem $T_2 = \frac{T}{\sqrt{1-a}}$, o czem wiemy już zresztą z poprzedniego.

Nadajmy wreszcie wahadłu naszemu ruch eliptyczny w kierunku zgodnym z kierunkiem obrotów krążka z półosiami a (wielka) i b (mała). Ruch ten jest ruchem wypadkowym ruchu kołowego o promieniu r_1 w kierunku obrotów krążka, i ruchu kołowego o promieniu r_2 w kierunku przeciwnym, przyczem:

$$r_1 + r_2 = a \quad ; \quad r_1 - r_2 = b, \qquad (r_1 > r_2).$$

Jeżeli krążek uprzednio w ruch obrotowy wprawiony został, otrzymamy ruch wypadkowy dwu ruchów kołowych:

1) W kierunku obrotów krążka:

z okresem $T_1 = \frac{n}{n+1} T_0 = \frac{T}{\sqrt{1+a}}$ o promieniu $r'_1 = \frac{r_1}{\sqrt{1+a}}$.

2) W kierunku przeciwnym:

z okresem $T_2 = \frac{n}{n-1} T_2 = \frac{T}{\sqrt{1-a}}$, o promieniu $r'_2 = \frac{r_2}{\sqrt{1-a}}$.

Ruch otrzymany jest jednocześnie ruchem wypadkowym ruchu eliptycznego o okresie T_0 z półosiami:

$$a' = r'_1 + r'_2 \quad ; \quad b' = r'_1 - r'_2,$$

w kierunku obrotów krążka [1]) oraz ruchu obrotowego jednostajnego w tym samym kierunku z okresem $\tau = nT_0$. Otrzymują się przeto krzywe, jakie wykreśla wahadło, poruszające się eliptycznie na papierze, obracanym dokoła środka wahań w kierunku przeciwnym ruchowi wahadła (szereg pionowy 2-gi na Tablicy II).

Zaznaczmy, że: $r'_1 < r_1$, $r'_2 > r_2$, przeto $b' < b$, to znaczy promień koła wewnętrznego, ograniczającego hypotrochoidę otrzymaną, jest mniejszy, aniżeli półoś mała nadawanego ruchu eliptycznego.

---

[1]) O ile $r'_1 > r'_2$; jeżeli wypadnie $r'_1 < r_2'$, otrzymujemy przypadek już rozważany.

Digitized by Google

Jeżeli wahadłu nadajemy ruch kołowy o promieniu a ($b=a$) w kierunku zgodnym z obrotem krążka, wówczas:

$$r_1 = a \quad ; \quad r_2 = 0,$$

$$r'_1 = \frac{a}{\sqrt{1+a}} \quad ; \quad r'_2 = 0,$$

$$a' = b' = \frac{a}{\sqrt{1+a}}.$$

Otrzymujemy ruch kołowy w kierunku n niu $a' = \frac{a}{\sqrt{1+a}}$ z okresem $T_1 = \frac{T}{\sqrt{1+a}}$, o czem już wiemy.

Na uwagę zasługuje przypadek, gdy $r'_1 = r'_2$. Znajdziemy zależność pomiędzy a i b, przy której $r'_1 = r'_2$. Mamy:

$$r'_1 = \frac{r_1}{\sqrt{1+a}} \quad ; \quad r'_2 = \frac{r_2}{\sqrt{1+a}},$$

gdzie:

$$r_1 = \frac{1}{2}(a+b) \quad ; \quad r_2 = \frac{1}{2}(a-b).$$

Równanie $r'_1 = r'_2$ daje więc:

$$\frac{a+b}{\sqrt{1+a}} = \frac{a-b}{\sqrt{1-a}}.$$

Stąd znajdujemy:

$$a = \frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}\, b, \text{ czyli } a = bn.$$

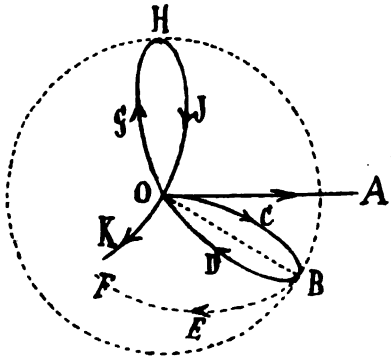
Jeżeli więc potrącimy wahadło, puszczając je jednocześnie z położenia największego wychylenia, nadając mu ruch eliptyczny (jakim by się poruszało, gdyby krążek nie wirował) z półosiami b i $a = bn$, gdzie n od urządzenia samego wahadła i szybkości obrotowej krążka zależy, w takim razie, jeżeli krążek wiruje, wahadło poruszać się będzie ruchem wypadkowym dwu ruchów kołowych, skierowanych przeciwnie, o jednakowych promieniach $r'_1 = r'_2$ z okresami T_1 i T_2, czyli ruchem wypadkowym ruchu prostego harmonicznego o okresie T_0 z amplitudą:

Digitized by Google

$$a' = r'_1 + r'^2 = \frac{a+b}{\sqrt{1+a}} = \frac{n+1}{n\sqrt{1+a}} \cdot a = \frac{T_0}{T} a,$$

oraz ruchu obrotowego jednostajnego dokoła środka wahań z okresem $\tau = nT_0$. Otrzymujemy więc w tym razie hypotrochody, przedstawione w pierwszym szeregu pionowym na Tablicy II, przechodzące przez środek wahań.

Trudno umiarkować potrącenie tak właśnie, by $a = bn$ wypadło. Toż samo jednak osiągniemy, jeśli wahadło, po uprzedniem wprawieniu w obrót krążka, wprawimy w ruch, wytrącając je z położenia równowagi. Istotnie, niechaj krążek, widziany z góry



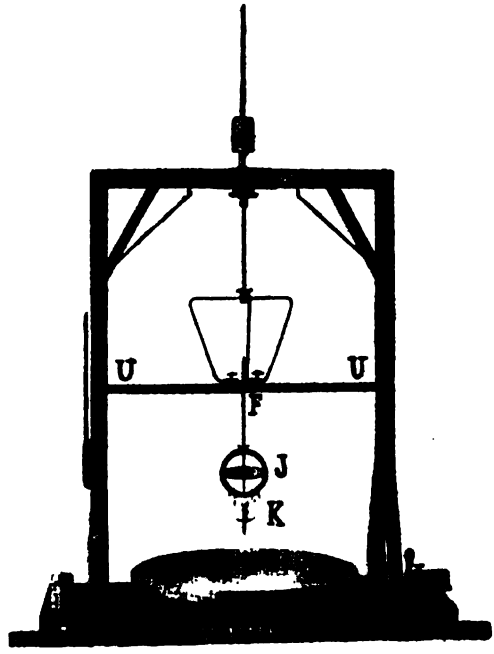
Rys. 12.

(z punktu zawieszenia wahadła), wiruje np. w kierunku wskazówek zegara. Wytrąćmy wahadło z położenia równowagi O w kierunku OA (rys. 12). Wahadło z kierunku tego wciąż zbaczać będzie na prawo, zakreślając krzywą OCB. W punkcie B największego wychylenia wahadło posiada pewną szybkość, prostopadłą do OB. Gdyby krążek wahadła po jego dojściu do B raptownie kręcić się przestał, wahadło poruszałoby się dalej po drodze eliptychnej BEF.....; że jednak krążek obraca się wciąż, wahadło zbacza na prawo, poruszając się z powrotem ku O po drodze BDO. Krzywa ta przejdzie przez środek wahań O. Zrozumiemy to, pamiętając, że wszystkie krzywe, przez wahadło giroskopowe zakreślane (hypotrochoidy), są symetryczne względem promieni, idących ze środka O do punktów krzywej, najbardziej od środka O oddalonych, w których krzywa styka się z ograniczającem ją ko-

Digitized by Google

łem zewnętrznem. W dalszym ciągu wahadło zakreśla drogi *OGH*, *HIO* i t. d.

Do demonstrowania ruchów wahadła giroskopowego przyrząd opisany (rys. 1), zaopatrzony jest w giroskop *I*. W tym celu używa się wahadła dolnego [1] (prętu *GH*, zawieszonego w *F*),

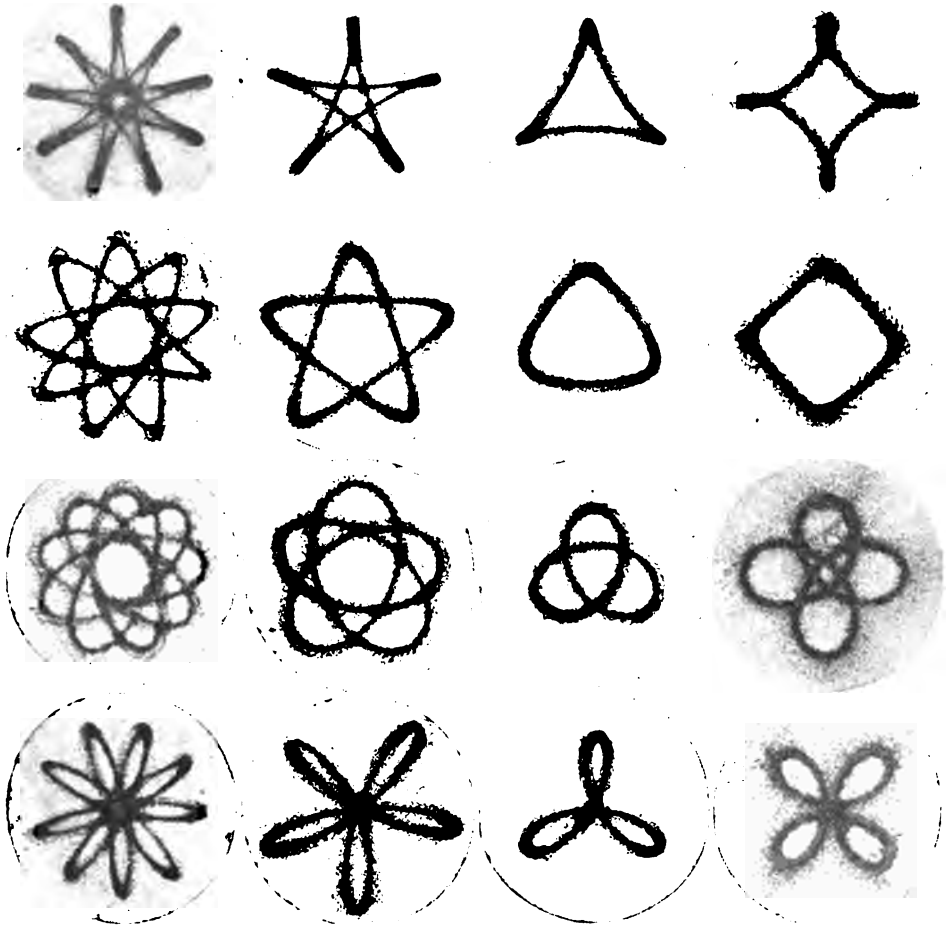


Rys. 13.

przyczem dolna część klatki *DE*, na której wahadło to jest zawieszone, zamocowuje się nieruchomo na belce poprzecznej *UU*, jak przedstawiono na rys. 13. Na rysunku tym widzimy giroskop *I*, zawieszony na pręcie krótszym, aniżeli na rys. 1. Zmniejszając długość wahadła (zawieszając je w pierścieniach *F* coraz wyżej), otrzymuje się przy tej samej szybkości obrotowej krążka ruchy wahadła po hypotrochoidach, odpowiadających coraz mniejszym

[1]) Wahadło całkowite, otrzymane po połączeniu prętów *AB* i *GH* opisaną wcześniej rurkę *L* (rys. 1), użyte jako wahadło giroskopowe, wykreśla hypotrochoidy, odpowiadające bardzo wielkim wartościom *n*, to znaczy, z bardzo gęsto obok siebie ułożonemi pętlicami.

Digitized by Google



Tablica III. (str. 30)

Digitized by Google

Digitized by Google

wartościom n (coraz większym wartościom a); powiększając długość wahadła lub nakładając na pręt jego ciężary (N na rys. 1), otrzymywać będziemy hypotrochoidy, odpowiadające większym wartościom n (o większej liczbie pętlic). Piasek, wysypujący się z lejka K, wykreśla ruchy wahadła na papierze podłożonym.

Tablica III zawiera zdjęcia fotograficzne krzywych, wykreślonych przez wahadło giroskopowe opisane. Krzywe, umieszczone w pierwszym szeregu pionowym, są to hypotrochoidy, odpowiadające wartości $n=9$ $\left(a=\frac{9}{41}\right)$; w następnych szeregach pionowych mieszczą się krzywe, wykreślone przez wahadło coraz krótsze, przy tej samej mniej więcej szybkości obrotowej krążka, Dla krzywych drugiego szeregu pionowego $n=5$ $\left(a=\frac{5}{13}\right)$, dla szeregu trzeciego $n=3$ $\left(a=\frac{3}{5}\right)$, wreszcie dla krzywych czwartego szeregu pionowego $n=2$ $\left(a=\frac{1}{5}\right)$ [1].

Krzywe, podane w pierwszym szeregu poziomym Tabl. III, otrzymano, puszczając swobodnie wahadło, po uprzedniem wprawieniu krążka w obrót, z położenia największego wychylenia. Bezpośrednie pomiary tych krzywych potwierdzają, że stosunek największej odległości punktów krzywej od środka (promienia koła zewnętrznego, obejmującego krzywą) do odległości najmniejszej (promienia koła wewnętrznego) zmniejsza się wraz z n; możemy na zasadzie tych niezbyt dokładnych pomiarów stosunek ten przyjąć równym n, jak tego wymaga teorya wyżej wyłożona.

Krzywe drugiego szeregu poziomego otrzymano, nadając wahadłu giroskopowemu ruch eliptyczny w kierunku przeciwnym obrotowi krążka; krzywe trzeciego szeregu poziomego zostały wykreślone przez wahadło, wprawione w ruch eliptyczny, skierowany zgodnie z kierunkiem obrotu krążka. Czwarty wreszcie szereg poziomy Tablicy III przedstawia krzywe, jakie otrzymano, wytrącając wahadło giroskopowe po wprawieniu krążka w obrót z położenia równowagi (por. rys. 12). Wszystkie te krzywe, jak to

[1]) Każda z krzywych przedstawionych otrzymana została po szeregu prób, skierowanych ku osiągnięciu krzywej w sobie zwartej.

Digitized by Google

widzimy z ich porównania z krzywemi Tablicy II, są takiemi, jakich wymaga nasza teorya.

Korzystając z urządzenia giroskopowego współdrganie za pomocą przyrządu opisanego w sposób następujący demonstrować można. Korzystamy w tym celu z wahadła podwójnego, urządzonego, jak opisano wcześniej, przy objaśnieniu wykreślania za pomocą niego krzywych Lissajous'a. Ustawiamy oba wahadła—całe i dolne—na okresy wahań jednakowe. Wprawiamy całe wahadło (wraz z dolnym) w ruch w płaszczyznie, do płaszczyzny ramy przyrządu prostopadłej. Jeśliśmy uprzednio krążek w powolny choćby obrót (np. palcami) wprawili, wahadło dolne wahać się poczyna bardzo mocno w płaszczyźnie, do płaszczyzny wahań całego wahadła prostopadłej. Pozostaje jednak w płaszczyźnie wahań całego wahadła (nie waha się dokoła osi swego zawieszania), jeśli okres jego różni się od okresu wahadła całego, co sprawić możemy, zdejmując lub nakładając jeden z ciężarów na tem lub owem wahadle (na pręcie AB lub na pręcie GH, rys. 1).

W wahadle giroskopowem oś krążka wypada na przedłużeniu pręta wahadła. W przyrządzie opisanym można też pierścień giroskopu J przymocowywać do prętu GH w taki sposób, by oś krążka do pręta była prostopadła. Wówczas nie dostrzegamy wcale wychylania się wahadła z kierunku nadanego mu ruchu po wprawieniu krążka w obrót; wahadło wahać się będzie tak samo, jak i z krążkiem nieruchomym. Istotnie, w tym razie przy ruchu wahadła na oś krążka wirującego działają jedynie siły, dążące do ustawienia jej prostopadle do płaszczyzny wahań wahadła, czyli równolegle do osi poziomej, dokoła której wahadło się kołysze [1]; siły te mogą przekręcać tylko nasz giroskop (w jednę i drugą stronę w czasie jednego wachnięcia wahadła) dokoła pręta GH.

Warszawa, grudzień 1905.
Pracownia Fizyczna Instytutu Politechnicznego.

---

[1]) Siły tego rodzaju dążą do ustawienia osi każdego giroskopu równolegle do osi ziemi.

Digitized by Google

T. FRIESENDORFF.

Zastosowanie Termodynamiki do Teoryi sprężystości.

(*Wyrazy termodynamiczne w równaniach Teoryi sprężystości.*)

§ 1.

Prawo pierwsze i drugie Termodynamiki wyrażają się analitycznie dwoma równaniami:

$$dE = \delta\Omega + \delta A_e = \delta\Omega - \delta A_i,$$

$$\delta\Omega = \vartheta . dS,$$

gdzie dE oznacza nieskończenie małą ilość ciepła, przypływającą do ciała z zewnątrz; δA_e nieskończenie małą pracę, wykonaną przez siły zewnętrzne działające na ciało; δA_i nieskończenie małą pracę, wykonaną przez ciało (nazewnątrz); dS nieskończenie małą zmianę entropii ciała, ϑ—temperaturę bezwzględną. Znak δ w odróżnieniu od znaku d (różniczki zupełnej) ma służyć do wskazania, że mamy do czynienia z wielkościami nieskończenie małemi. Dla dogodności, wszystkie powyższe wielkości odniesione są do jednostki objętości.

W Termodynamice gazów, najlepiej opracowanej, przyjmowane bywają zwykle jako zmienne niezależne (parametry): temperatura bezwzględna ϑ i objętość v, zajęta przez gaz; wtedy $\delta A_i = pdv$, gdzie $p = f(\vartheta, v)$ oznacza ciśnienie normalne, wywierane przez gaz na jednostkę powierzchni ścianki, przyczem objętość v powiększa się o dv. A zatem przy tem oznaczeniu praca siły zewnętrznej, potrzebna do zmniejszenia objętości v o dv. będzie $\delta A_e = -pdv$ tak, że dla ga-

Digitized by Google

zów pierwsze równanie Termodynamiki pisze się zwykle w postaci: $dE = \delta\Omega - pdv$.

Ponieważ stan ciał niegazowych (ciekłych i stałych) charakteryzuje się większą liczbę parametrów, przeto w celu zastosowania i do tych ciał równań Termodynamiki należy równania te rozciągnąć na większą liczbę parametrów.

Niechaj stan danego ciała charakteryzują, prócz temperatury ϑ, pewne wielkości $q_1, q_2, \ldots q_j, \ldots q_n$, t. j. niechaj zmiana wielkości $\vartheta, q_1, q_2, \ldots q_j, \ldots q_n$ zupełnie określa zmianę stanu ciała. Zmianę parametrów $q_1, q_2, \ldots q_j, \ldots q_n$ nazywają niektórzy siłami zewnętrznemi; otóż siłę zewnętrzną lub ogół sił zewnętrznych, powodujących zmianę parametru q_j, oznaczmy przez Q_j; przyczem sita Q_j niechaj wtedy tylko wykonywa pracę, gdy zmienia się odpowiedni parametr q_j. Iloczyn $Q_j dq_j$ przedstawia tedy pracę, wykonaną przez ciało przeciw sile zewnętrznej Q_j przy zmianie parametru q_j o dq_j. Przy równoczesnej zmianie parametrów $q_1, q_2, \ldots q_j, \ldots q_n$, odpowiednio o $dq_1, dq_2, \ldots dq_j, \ldots, dq_n$, przy działaniu sił zewnętrznych $Q_1, Q_2, \ldots Q_j, \ldots Q_n$ praca, wykonana przez ciało, wyraża się jako suma:

$$\sum_{j=1}^{j=n} Q_j\, dq_j = \delta A_i,$$

praca zaś sił zewnętrznych wyrazi się jako suma:

$$-\sum_{j=1}^{j=n} Q_j\, dq_j = \delta A_e.$$

Stąd pierwsze równanie Termodynamiki napisać można w postaci:

$$dE = \delta\Omega - \sum_{j=1}^{j=n} Q_j dq_j, \qquad \text{I.}$$

gdzie E wyobrażamy sobie jak wyrażone przez parametry $q_1, q_2, \ldots, q_n, \vartheta$.

Drugie równanie Termodynamiki pozostanie w postaci:

$$d\Omega = \vartheta\, dS, \qquad \text{II.}$$

gdzie S jest funkcyą parametrów $\vartheta, q_1, q_2, \ldots, q_n$, jak to można widzieć

Digitized by Google

z dowodzeń, podanych przez Kirchhoffa, Neumanna, Voigta i Helmholtza[1].

Przy tym wyborze parametrów różniczki dE i dS mają następujące wyrażenia:

$$dE = \frac{\partial E}{\partial \vartheta} d\vartheta + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial E}{\partial q_i} dq_i; \quad dS = \frac{\partial S}{\partial \vartheta} d\vartheta + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i;$$

podstawiając te wartości w równaniu (I) i uwzględniając równanie (II), znajdziemy:

$$\frac{\partial E}{\partial \vartheta} d\vartheta + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial E}{\partial q_i} dq_i = \vartheta \frac{\partial S}{\partial \vartheta} d\vartheta + \vartheta \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i - \sum_{i=1}^{i=n} Q_i dq_i. \quad (1)$$

Stąd, z powodu niezależności parametrów, otrzymujemy $n+1$ równań:

$$\frac{\partial E}{\partial \vartheta} = \vartheta \frac{\partial S}{\partial \vartheta}, \quad (2a)$$

$$\frac{\partial E}{\partial q_i} = -Q_i + \vartheta \frac{\partial S}{\partial q_i}. \quad (2b)$$

Ciepło właściwe ciała, t. j.

$$\gamma = \frac{\delta \Omega}{d\vartheta} = \frac{\vartheta dS}{d\vartheta},$$

wyrazi się tak:

$$\gamma = \frac{\vartheta \left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta} d\delta + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i \right)}{d\vartheta} = \vartheta \frac{dS}{d\vartheta} + \vartheta \sum_{i=1}^{i=n} \frac{dS}{dq_i} \frac{(dq_i)}{(d\vartheta)},$$

gdzie $\frac{(dq_i)}{(d\vartheta)}$ jest stosunkiem przyrostu parametru q_i do przyrostu para-

---

[1]) Kirchhoff. Vorlesungen über die Theorie der Wärme 1894.

C. Noumann, Verlesungen über die mechanische Theorie der Wärme 1875. Helmholtz, Vorlesungen über d. Theorie der Wärme 1903. Voigt. Thermodynamik I, 1903.

Digitized by Google

metru ϑ, nie zaś pochodną wielkości q_i względem ϑ, ponieważ q_i nie zależy od ϑ.

a Helmholtzem[1] wprowadzimy nową funkcyę:

$$H = E - \vartheta S,$$

którą Helmholtz nazywał energią swobodną (Freie Energie), Voigt zaś[2] „pierwszym potencyałem termodynamicznym".

Z uwagi na równania (2) otrzymujemy:

$$\frac{dH}{d\vartheta} = \frac{dE}{d\vartheta} - S - \vartheta \frac{dS}{d\vartheta} = - S, \qquad (3a)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial E}{\partial q_i} - \vartheta \frac{\partial S}{\partial q_i} = - Q_i, \qquad (3b)$$

a zatem:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial \vartheta} d\vartheta + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i = - S d\vartheta - \sum_{i=1}^{i=n} Q_i dq_i.$$

Wynika stąd:

$$\delta A_e = - \sum_{i=1}^{i=n} Q_i dq_i = dH + S d\vartheta = dH - \frac{\partial H}{\partial \vartheta} d\vartheta,$$

$$E = H + \vartheta S = H - \vartheta \frac{\partial H}{\partial \vartheta}.$$

Ponieważ nadto jest:

$$S = - \frac{dH}{d\vartheta}, \quad Q_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i},$$

przeto:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial Q_i}{\partial \vartheta} = - \frac{\partial^2 H}{\partial \vartheta_i \partial q_i},$$

i ciepło właśnie wyrazi się w ten sposób:

$$\gamma = - \vartheta \frac{\partial^2 H}{\partial \vartheta^2} - \vartheta \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial \vartheta} \frac{(dq_i)}{(d\vartheta)}.$$

---

[1]) Helmholtz, l. c. str. 268. [2]) Voigt, l. c. str. 216.

Digitized by Google

Tak więc wszystkie wielkości, zachodzące w równaniach I i II, oraz wielkość γ mogą być wyrażone jako funkcye pierwszego potencyału termodynamicznego.

Można też obrać za parametry wielkości ϑ, Q_1, Q_2, ... , Q_n i uważać wielkości, zachodzące w równaniach (I) i (II) (a także i q_1, q_2,...,q_n), jako funkcye tych nowych parametrów; otrzymamy wtedy równości:

$$dq_j = \frac{\partial q_j}{\partial \vartheta} d\vartheta + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} dQ_i,$$

$$\delta A_e = -\sum_{j=1}^{j=n} Q_j dq_j = -\sum_{j=1}^{j=n} Q_j \frac{\partial q_j}{\partial \vartheta} \partial\vartheta - \sum_{j=1}^{j=n} Q_j \sum_{i=1}^{i=n} \frac{dq_j}{\partial Q_i} \partial Q_i,$$

$$dE = \frac{\partial E}{\partial \vartheta} d\vartheta + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial E}{\partial Q_i} dQ_i,$$

$$dS = \frac{\partial S}{\partial \vartheta} d\vartheta + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial S}{\partial q_i} dQ_i,$$

a równanie (I) przybierze postać:

$$\frac{\partial E}{d\delta} d\vartheta + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial E}{\partial Q_i} dQ_i = \vartheta \frac{\partial S}{\partial \vartheta} d\vartheta + \vartheta \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial S}{\partial Q_i} dQ_i$$
$$- \sum_{j=1}^{j=n} Q_j \frac{\partial q_j}{\partial \vartheta} d\vartheta - \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=n} Q_j \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} dQ_i.$$

Porównywając spółczynniki przy nowych parametrach, znajdziemy:

$$\frac{\partial E}{\partial \vartheta} = \vartheta \frac{\partial S}{\partial \vartheta} - \sum_{j=1}^{j=n} Q_j \frac{\partial q_j}{\partial \vartheta} \qquad (2'a)$$

$$\frac{\partial E}{\partial Q_i} = \vartheta \frac{\partial S}{\partial Q_i} - \sum_{j=1}^{j=n} Q_j \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \qquad (2'b)$$

Na ciepło właściwe zaś otrzymujemy wyrażenie:

$$\gamma = \frac{\vartheta\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta} d\vartheta + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial S}{\partial Q_i} dQ_i\right)}{d\vartheta} = \vartheta \frac{\partial S}{\partial \vartheta} + \vartheta \sum_{=1}^{i=n} \frac{\partial S}{\partial Q_i} \frac{(d\,Q_i)}{(d\,\vartheta)},$$

Digitized by Google

gdzie $\frac{(dQ_i)}{(d\vartheta)}$ jest stosunkiem przyrostów wielkości Q i ϑ, nie zaś pochodną.

Wprowadzamy znów nową funkcyę:

$$Z = E - \vartheta S + \sum_{i=1}^{i=n} Q_i q_i = H + \sum_{i=1}^{i=n} Q_i q_i ,$$

którą, według Voigta[1], nazywamy drugim potencyałem termodynamicznym. Uwzględniając równości (2'), otrzymujemy:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} &= \frac{\partial E}{\partial \vartheta} - \vartheta \frac{\partial S}{\partial \vartheta} - S + \sum_{i=1}^{i=1} Q_i \frac{\partial q_i}{\partial \vartheta} = - S , && (3'a) \\ \frac{\partial Z}{\partial Q_i} &= \frac{\partial E}{\partial Q_i} - \vartheta \frac{\partial S}{\partial Q_i} + \sum_{j=1}^{j=n} Q_j \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + q_i = q_i . && (3'b) \end{aligned} \right.$$

A zatem:

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} d\vartheta + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial Z}{\partial Q_i} dQ_i = - S d\vartheta + \sum_{i=1}^{i=n} q_i dQ_i .$$

Ponieważ jest:

$$\sum_{i=1}^{i=n} q_i \, dQ_i = \sum_{i=1}^{i=n} q_i \, Q_i - \sum_{i=1}^{i=n} Q_i \, dq_i = d \sum_{i=1}^{i=n} q_i \, Q_i + \delta A_e ,$$

przeto:

$$\delta A_e = \sum_{i=1}^{i=n} q_i dQ_i - d \sum_{i=1}^{i=n} q_i Q_i = dZ + S d\vartheta - d \sum_{i=1}^{i=n} q_i \, Q_i$$

$$= dZ - \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} d\vartheta - d \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial Z}{\partial Q_i} Q_i ,$$

$$E = Z + \vartheta S - \sum_{i=1}^{i=n} Q_i q_i = Z - \vartheta \frac{\partial Z}{\partial \vartheta} - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial Z}{\partial Q_i} Q_i .$$

Prócz tego, na podstawie równań (3'), będzie:

---

[1]) Voigt, l. c. str. 217.

Digitized by Google

$$-\frac{\partial S}{\partial Q_i} = +\frac{\partial \varphi_i}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial^2 Z}{\partial Q_i \partial \vartheta},$$

$$\gamma = -\vartheta \frac{\partial^2 Z}{\partial \vartheta^2} - \vartheta \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 Z}{\partial Q_i \partial \vartheta} \frac{(dQ_i)}{(d\vartheta)}.$$

Widzimy tedy, że przyjąwszy jako parametry: ϑ, $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, i wprowadziwszy funkcyę Z, możemy wszystkie wielkości, zachodzące w równaniach I i II, a także wielkość γ wyrazić w postaci funkcyj samego drugiego potencyału termodynamicznego.

§ 2.

Przy pomocy powyższych wywodów rozpatrzymy odkształcenie ciała stałego sprężystego pod wpływem sił do niego przyczepionych, oraz temperatury ciała.

Przekształcenie sprężyste ciała stałego charakteryzuje sześć wielkości: trzy przedłużenia linijne $x_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $y_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, $z_z = \frac{\partial w}{\partial z}$, gdzie u, v, w są przyrosty spółrzędnych, pochodzące od odkształcenia, oraz trzy skręcenia $y_z = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$, $z_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$, $x_y = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}$, Z drugiej strony, jeżeli oznaczymy przez X_x. Y_y, Z_z napięcia normalne, przez Y_z, Z_x, X_y napięcia stycznościowe, działające na odpowiednie powierzchnie elementu ciała, prostopadłe do osi spółrzędnych, to praca elementu sprężystego $dx\,dy\,dz$, przy zmianie jego stanu wbrew tym napięciom, przedstawi się w postaci:

$$(X_x dx_x + Y_y dy_y + Z_z dz_z + Y_z dy_z + Z_x dz_x + X_y dx_y)\, dx\, dy\, dz,$$

a zatem, zgodnie z naszem znakowaniem, będzie:

$$X_x dx_x + Y_y dy_y + Z_z dz_z + Y_z dy_z + Z_x dz_x + X_y dx_y = \delta A_i.$$

Z tego względu za parametry, charakteryzujące stan ciała sprężystego

Digitized by Google

(włączając jego stan cieplny), można przyjąć wielkości ϑ, x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y, które oznaczymy odpowiednio przez ϑ, q_1 $q_3, \ldots, q_6$. Korzystając zaś z powyższych wzorów, znajdziemy związek pomiędzy napięciami X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_v, X_y, które oznaczymy odpowiednio przez Q_1, $Q_2, \ldots, Q_6$, a parametrami ϑ, q_1, $q_2, \ldots, q_6$.

Przy tych oznaczeniach będzie:

$$\partial A_1 = \sum_{j=1}^{j=6} Q_j \, dq_j; \quad dE = \delta\Omega - \sum_{j=1}^{j=6} Q_j \, dq_j; \quad \delta\Omega = \vartheta . dS,$$

a ponieważ wielkości Q_1, $Q_2, \ldots, Q_6$ i parametry $q_1, q_2, \ldots, q_6$ mogą być wyrażone przez potencyały termodynamiczne pierwszy i drugi, t. j. H i Z, przeto zadanie nasze sprowadza się do wyznaczenia tych funkcyj H i Z, które wogóle są niewiadome, lecz mogą być wyznaczone w przypadku danym przy niektórych założeniach.

Nazwijmy „normalnym“ ten stan ciała stałego sprężystego, przy którym wszystkie napięcia Q_i, a także wszystkie parametry q są równe zeru i ciało posiada temperaturę ϑ_0 otaczającego je ośrodka. Z tego stanu normalnego może być ono wyprowadzone pod wpływem sił Q_i i zmiany temperatury ϑ_0 na ϑ; niechaj $\vartheta - \vartheta_0 = \tau$.

Ponieważ $Q_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}$, przeto H nie może zawierać parametrów q_i liniowo, gdyż w stanie normalnym przy $q_i = 0$ musi być $Q_i = 0$, z wzoru zaś $S = -\dfrac{\partial H}{\partial \vartheta}$ wynika, że w wyrażeniu H parametr ϑ musi zachodzić nietylko liniowo, aby entropia nie była równa wielkości stałej.

Ponieważ w Teoryi sprężystości rozważamy odkształcenia, przy których można pomijać potęgi wielkości q_i wyższe od drugiej, przeto wyrażenie H może być napisane w postaci:

$$2H = -\sum_{j=1}^{j=6} \sum_{i=1}^{i=6} c_{ij} q_i q_j - 2\tau \sum_{i=1}^{i=6} b_i q_i - f(\tau),$$

gdzie $c_{ij} = c_{ji}$, b_i są niewiadomemi dotąd funkcyami wielkości ϑ lub $\tau = \vartheta - \vartheta_0$, a o funkcyi $f(\tau)$ możemy powiedzieć, że powinna być postaci $r\tau^2 + s\tau^3 + \ldots$, gdzie $r, s, \ldots$ są spółczynniki stałe.

Digitized by Google

W ten sposób otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned} Q_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{j=6} c_{ij} q_j + \tau b_i, \\ \gamma &= -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=6} \sum_{j=1}^{j=6} \frac{\partial c_{ij}}{\partial \tau} q_i q_j + \sum_{i=1}^{i=6} b_i q_i + \tau \sum_{i=1}^{i=6} \frac{\partial b_i}{\partial \tau} q_i + \frac{1}{2} \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

O wyrażeniu na ciepło właściwe:

$$\gamma = -\vartheta \frac{\partial^2 H}{\partial \vartheta^2} + \vartheta \sum_{i=1}^{i=6} \frac{\partial Q_i}{\partial \vartheta} \frac{(dq_i)}{(d\vartheta)},$$

zauważmy co następuje:

Dajmy, że ciało pozostaje przez czas pewien w stanie stałym odkształcenia (q_i = const.), lecz przy zmieniającej się temperaturze; wtedy, γ stanie się równem:

$$-\vartheta \frac{\partial^2 H}{\partial \vartheta^2} = \gamma_q;$$

γ_q oznacza t. zw. c i e p ł o w ł a ś c i w e p r z y o d k s z t a ł c e n i u s t a ł e m (analogicznie do ciepła właściwego przy stałej objętości dla gazów).

Według doświadczeń [1], przy niewielkich wahaniach temperatury i niewielkich ciśnieniach (w granicach kresu sprężystości), γ_q nie zależy od stopnia odkształcenia ciała, t. j. od parametrów q_i, a zależy tylko od temperatury ϑ; wtedy:

$$\frac{\partial \gamma_q}{\partial q_i} = -\vartheta \frac{\partial^3 H}{\partial \vartheta^2 \partial q_i} = \vartheta \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \vartheta^2} = 0,$$

t. j. $Q_i = \sum_{j=1}^{j=6} c_{ij} q_j + b_i \tau$ powinno być funkcyą liniową wielkości τ, a więc s p ó ł c z y n n i k i b_i p o w i n n y b y ć w i e l k o ś c i a m i s t a ł e m i, spółczynniki zaś c_{ij} mogą zawierać τ tylko w stopniu pierwszym.

---

[1]) V o i g t, Wied. Ann. **49** (1873) str. 707.

Digitized by Google

Z drugiej strony, jeżeli wprowadzimy drugi potencyał termodynamiczny:

$$Z = H + \sum_{i=1}^{i=6} Q_i q_i,$$

otrzymamy na γ wyrażenie:

$$\gamma = -\vartheta \frac{\partial^2 Z}{\partial \vartheta^2} - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial q_i}{\partial \vartheta} \frac{(dQ_i)}{(d\vartheta)}.$$

Jeżeli założymy, że ciało znajduje się przez czas pewien pod stałem ciśnieniem zewnętrznem ($Q_i = \text{const.}$), lecz przy zmieniającej się temperaturze, γ stanie się równem:

$$-\vartheta \frac{\partial^2 Z}{\partial \vartheta^2} = \gamma_Q;$$

wtedy γ_Q oznaczać będzie c i e p ł o w ł a ś c i w e p r z y c i ś n i e n i u s t a ł e m.

Wielkość γ_Q, według doświadczeń [1] w granicach wskazanych nie zależy od ciśnienia, pod którem ciało się znajduje, t. j. od wielkości Q_i, a zależy tylko od temperatury ϑ, a wtedy:

$$\frac{\partial \gamma_Q}{\partial Q_i} = -\vartheta \frac{\partial^3 Z}{\partial \vartheta^2 \partial Q_i} = -\vartheta \frac{\partial^2 q_i}{\partial \vartheta^2} = 0,$$

t. j. q_i, jako funkcya wielkości Q_i i ϑ, może zawierać ϑ tylko w stopniu pierwszym, lecz wyrażenie na q_i przez wielkości Q_i i ϑ otrzymujemy z równań postaci:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{j=6} c_{ij} q_i + b_i \tau,$$

w których, jak przekonaliśmy się, spółczynniki b_i są wielkościami stałemi, spółczynniki zaś c_{ij} są funkcyami liniowemi wielkości τ. Stąd

[1]) Voigt, l. c.

Digitized by Google

wypływa, że, aby wielkości q_i były funkcyami liniowemi wielkości τ, trzeba, by spółczynniki c_{ij} były wielkościami stałemi.

Wnosimy stąd, że gdy γ_q i γ_Q uważamy jako funkcye samej wielkości ϑ, wtedy w wyrażeniu na pierwszy potencyał termodynamiczny:

$$2H = -\sum_{j=1}^{j=6} \sum_{i=1}^{i=6} c_{ij} q_i q_j - 2\tau \sum_{i=1}^{i=6} b_i q_i - f(\tau) \qquad (5)$$

spółczynniki $c_{ij} = c_{ji}$ oraz b_i winny być wielkościami stałemi, a zatem:

$$\left.\begin{aligned} Q_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{j=6} e_{ij} q_j + \tau b_i \\ S &= -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = \sum_{i=1}^{i=6} b_i q_i + \frac{1}{2} \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

W założeniu, jakie czyni się zwykle w Teoryi sprężystości, że temperatura w czasie przebiegu odkształcenia pozostaje stałą ($\tau = 0$), równania (5) i (6) przechodzą na następujące:

$$(Q_i)_{\tau=0} = \sum_{j=1}^{j=6} c_{ij} q_j = (Q_i)_{\vartheta_0},$$

$$(2H)_{\tau=0} = -\sum_{j=1}^{j=6} \sum_{i=1}^{i=6} c_{ij} q_i q_j = (2H)_{\vartheta_0},$$

t. j. $(Q_i)_{\vartheta_0}$ i $(2H)_{\vartheta_0}$ są zwykłemi składowemi napięć i potencyałem sił sprężystych; wyrażenia te, dla odróżnienia od zupełnych wyrażeń na Q_i i $2H$, nazwać można izotermicznemi, stałe zaś c_{ij} mogą być nazwane stałemi izotermicznemi odkształcenia; są one zwykłemi 21 spółczynnikami sprężystości.

Wyrażenia całkowite na Q_i i $2H$ napisać można w postaci:

$$2H = (2H)_{\vartheta_0} + \left(-2\tau \sum_{i=1}^{i=6} b_i q_i - f(\tau)\right); \quad Q_i = (Q)_{\vartheta_0} + b_i \tau; \qquad (7)$$

spółczynniki b_i, określające wpływ odkształcenia na entropię, nazwać spółczynnikami termicznemi odkształcenia, wy-

Digitized by Google

razy zaś $b_i \tau$ — składowemi termicznemi napięć. Wielkości Q_i można uważać jako sumy dwóch napięć: jednego, powstałego wskutek sił zewnętrznych; drugiego, pochodzącego wskutek zmiany temperatury ciała przez ogrzewanie go lub ochładzanie zzewnątrz; mamy tu niejako coś w rodzaju nakładania działań (Superposition der Wirkungen), na co zwrócił był uwagę Duhamel w Jour. de l'Ecol Polytechnique 1838.

Zajmijmy się teraz wyznaczeniem wyrażenia na drugi potencyał termodynamiczny Z, który w przypadku ogólnym określa się równaniem:

$$Z = E - \vartheta S + \sum_{i=1}^{i=6} Q_i q_i,$$

gdzie $E - \vartheta S = H$ zakładamy jako wyrażone w funkcyi wielkości ϑ, $Q_1, Q_2, \ldots, Q$.

Z sześciu równań postaci:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{j=6} c_{ij} q_j + b_i \tau,$$

przez rozwiązanie ich względem $q_1, q_2, \ldots, q_6$, otrzymujemy:

$$q_j = \sum_{i=1}^{i=6} g_{ij} (Q_i - b_i \tau),$$

gdzie spółczynniki g_{ij} wyrażają się przy pomocy wyznaczników, utworzonych ze spółczynników c_{ij}, a więc są wielkościami stałemi. Oznaczywszy $\sum_{i=1}^{i=6} g_{ij} b_i$ przez $-h_j$, mamy:

$$q_j = \sum_{i=1}^{i=6} g_{ij} Q_i + h_j \tau.$$

Podstawiwszy te wyrażenia w równanie:

$$Z = H + \sum_{i=1}^{i=6} Q_i q_i = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=6} \sum_{i=1}^{i=6} c_{ij} q_i q_j - \tau \sum_{i=1}^{i=6} b_i q_i - \frac{1}{2} f(\tau),$$

Digitized by Google

i pamiętając, że $\frac{\partial Z}{\partial Q_i}$ ma być równe q_i, otrzymamy ostatecznie:

$$2Z = \sum_{j=1}^{j=6} \sum_{i=1}^{i=6} g_{ij} Q_j + 2\tau \sum_{i=1}^{i=6} h_i Q_i + f_1(\tau).$$

§ 3.

Nie uczyniliśmy dotąd żadnego założenia o własnościach rozważanego ciała sprężystego; przyjmiemy teraz, że mamy do czynienia z ciałami sprężystemi izotropowemi, dla których, jak wiadomo, 21 spółczynników sprowadza się do dwóch: λ i μ. W tym przypadku wyrażenie na $(2H)_{\vartheta_0}$ będzie następujące:

$$-(2H)_{\vartheta_0} = (\lambda + 2\mu)(q_1^2 + q_2^2 + q_2^2) + \mu(q_4^2 + q_5^2 + q_6) + 2\lambda(q_2 q_3 + q_3 q_1 + q_1 q_2) \quad ^{1)}$$

Co się tyczy spółczynników termicznych, to dla ciał izotropowych otrzymujemy:

$$b_1 = b_2 = b_3 = b; \quad b_4 = b_5 = b_6 = 0. \quad ^{2)}$$

Pierwszy potencyał termodynamiczny będzie zatem postaci:

$$2H = -(\lambda + 2\mu)(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) - \mu(q_4^2 + q_5^2 + q_6^2) - 2\lambda(q_3 q_2 + q_3 q_1 + q_1 q_2) - 2b(q_1 + q_2 + q_3)\tau - f(\tau),$$

skąd wynika, że:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{\partial H}{\partial q_1} = (\lambda + 2\mu) q_1 + \lambda(q_2 + q_3) + b\tau, \\ &= 2\mu q_1 + \lambda(q_1 + q_2 + q_3) + b\tau = 2\mu q_1 + \lambda\theta + b\tau, \\ Q_2 &= 2\mu q_2 + \lambda\theta + b\tau, \quad Q_3 = 2\mu q_3 + \lambda\theta + b\tau, \\ Q_4 &= \mu q_4, \quad Q_5 = \mu q_5, \quad Q_6 = \mu q_6. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

[1]) Weber, Partielle Differentialgleichungen, 2, § 65.

[2]) Voigt, Thermodynamik, 1, str. 308—310.

Digitized by Google

Z równań (8) łatwo otrzymujemy wielkości q_i, wyrażone przez $Q_1, Q_2, \ldots, Q_6, \tau$, mianowicie:

$$\left.\begin{aligned}
q_1 &= \frac{\lambda+\mu}{\mu(2\mu+3\lambda)} Q_1 - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}(Q_2+Q_3) - \frac{1}{2\mu+3\lambda} b\tau, \\
q_2 &= \frac{\lambda+\mu}{\mu(2\mu+3\lambda)} Q_2 - \frac{1}{2\mu(2\mu+3\lambda)}(Q_3+Q_1) - \frac{1}{2\mu+3\lambda} b\tau, \\
q_3 &= \frac{\lambda+\mu}{\mu(2\mu+3\lambda)} Q_3 - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}(Q_1+Q_2) - \frac{1}{2\mu+3\lambda} b\tau, \\
q_4 &= \frac{1}{\mu} Q_4, \quad q_5 = \frac{1}{\mu} Q_5, \quad q_6 = \frac{1}{\mu} Q_6,
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Po wprowadzeniu modułu sprężystości E i spółczynnika twardości $G = \frac{E}{2(1+\eta)}$ i posiłkując się związkami:

$$\lambda = \frac{\eta}{(1+\eta)(1-2\eta)} E, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\eta)}, \qquad ^{1)}$$

znajdziemy:

$$\left.\begin{aligned}
q_1 &= \frac{1}{E} Q_1 - \frac{\eta}{E}(Q_2+Q_3) - \frac{1-2\eta}{E} b\tau, \\
q_2 &= \frac{1}{E} Q_2 - \frac{\eta}{E}(Q_3+Q_1) - \frac{1-2\eta}{E} b\tau, \\
q_3 &= \frac{1}{E} Q_3 - \frac{\eta}{E}(Q_1+Q_3) - \frac{1-2\eta}{E} b\tau, \\
q_4 &= \frac{2(1+\eta)}{E} Q_4, \quad q_5 = \frac{2(1+\eta)}{E} Q_5, \quad q_6 = \frac{2(1+\eta)}{E} Q_6.
\end{aligned}\right\} \quad (9')$$

Stąd otrzymamy następujące wyrażenie na Z:

$$2Z = \frac{1}{E}(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^3) + \frac{2(1+\eta)}{E}(Q_4^2 + Q_5^2 + Q_6^2)$$
$$-2\frac{\eta}{E}(Q_2Q_3 + Q_3Q_1 + Q_1Q_2) - 2 \cdot \frac{1-2\eta}{E} b(Q+Q_2+Q_3)\tau + f_1(\tau).$$

---

[1]) F. Jasiński. Sobranie soczinenij 3. str. 102.

Digitized by Google

Jeżeli do równań (8) wprowadzamy spółczynniki E i G, znajdziemy:

$$\left.\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{E}{1+\eta}\left(q_1 + \frac{\eta}{1-2\eta}\theta\right) + b\tau, \\
Q_2 &= \frac{E}{1+\eta}\left(q_2 + \frac{\eta}{1-2\eta}\theta\right) + b\tau, \\
Q_3 &= \frac{E}{1+\eta}\left(q_3 + \frac{\eta}{1-2\eta}\theta\right) + b\tau, \\
Q_4 &= \frac{E}{2(1+\eta)}q_4, \quad Q_5 = \frac{E}{2(1+\eta)}q_5, \quad Q_6 = \frac{E}{2(1+\eta)}q_6,
\end{aligned}\right\} \quad (8')$$

które od zwykłych równań Teoryi sprężystości różnią się tem, że zawierają w sobie wyraz $b\tau$.

Zastosujmy otrzymane wzory do następujących przykładów:

1. Ciało izotropowe odkształca się pod wpływem ciepła (przez ogrzewanie lub ochładzanie) bez działania sił zewnętrznych. Wtedy $Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_6 = 0$, a równania (9') dają:

$$q_1 = -\frac{1-2\eta}{E}b\tau, \quad q_2 = -\frac{1-2\eta}{E}b\tau, \quad q_3 = -\frac{1-2\eta}{E}b\tau,$$

$$q_4 = q_5 = q_6 = 0,$$

lub

$$q_1 = q_2 = q_3 = a\tau,$$

gdzie $a = -\frac{1-2\eta}{E}b$ jest spółczynnikiem termicznego wydłużenia linijnego danego ciała. Ponieważ spółczynnik ten oraz wielkości E i η wyznaczono dla wielu ciał licznemi doświadczeniami, można przeto dla wielu ciał obliczyć $b = -\frac{E}{1-2\eta}a$, t. j. spółczynnik termiczny.

Otrzymane równania wskazują, że ciało izotropowe pod wpływem ciepła nie doznaje odkształcenia skrętu ($q_4 = q_5 = q_6 = 0$) a ulega tylko rozszerzeniu lub skurczeniu objętościowemu.

2. Pręt izotropowy doznaje ciągnienia lub ściskania pod wpływem siły P, działającej na koniec pręta normalnie do jego podstawy σ,

Digitized by Google

tak, że $\frac{P}{\sigma} = p$ jest siłą, działającą na jednostkę powierzchni normalnego przekroju pręta. Jeżeli przyjmiemy oś pręta za oś z i nie przyczepimy żadnych sił do powierzchni bocznej pręta, będzie:

$$Q_1 = Q_2 = Q_4 = Q_5 = Q_6 = 0,$$

$$Q_3 = \pm p \text{ (znak górny przy rozciąganiu, dolny przy ściskaniu).}$$

Równania (9′) dadzą:

$$q_1 = \mp \frac{\eta}{E} p - \frac{1-2\eta}{E} b\tau = \mp \frac{\eta}{E} p + a\tau,$$

$$q_2 = \mp \frac{\eta}{E} p - \frac{1-2\eta}{E} b\tau = \mp \frac{\eta}{E} p + a\tau,$$

$$q_4 = \pm \frac{1}{E} p - \frac{1-2\eta}{E} b\tau = \pm \frac{1}{E} p + a\tau,$$

(znak górny przy rozciąganiu, dolny przy ściskaniu.)

$$q_4 = q_5 = q_6 = 0.$$

Widać stąd, że przy rozciąganiu i jednoczesnem ogrzewaniu (z zewnątrz) pręta, więcej rozciąga się i mniej poprzecznie ściska, aniżeli bez ogrzewania; przy równoczesnem zaś ochładzaniu — odwrotnie.

§ 4.

Dotąd rozważaliśmy przypadki, w których ciało stałe odkształcało się pod wpływem sił zewnętrznych oraz ciepła przypływającego zzewnątrz, przyczem ciało przyjmowało odpowiednią temperaturę, t. j. przed odkształceniem posiadało temperaturę ϑ_0 otaczającego ośrodka, a potem w czasie odkształcenia przyjmowało temperaturę ϑ ciała nagrzewającego.

W doświadczeniach zwykłych nad odkształcaniem się ciał stałych tylko pod działaniem sił zewnętrznych zachodzi proces izotermiczny w tem znaczeniu, że ciało w czasie obserwacyi przyjmuje temperaturę otaczającego ośrodka. Przy takiem ustanowieniu doświadczeń nie po-

Digitized by Google

dobna oczywiście sądzić o tem, w jaki sposób odkształcenie ciała wpływa na jego temperaturę własną, t. j. niepodobna rozstrzygnąć, czy ciało ogrzewa się lub ochładza pod wpływem odkształceń, wywołanych w niem przez siły zewnętrzne. Aby módz ocenić wpływ odkształcenia ciała na jego stan termiczny, należałoby urządzić doświadczenia tak, by ciało nie mogło przyjmować temperatury otaczającego ośrodka; wtedy zaś mając ciało przy pewnej temperaturze początkowej i poddawszy go pierwszemu odkształceniu, możnaby było sądzić o zmianie jego temperatury w skutek tego odkształcenia. Chociaż urządzenie takich doświadczeń jest bardzo trudne, zauważono wszakże, że odkształceniu ciał stałych towarzyszy zawsze zmiana temperatury samego ciała.

Rozpatrzmy to zjawisko na zasadzie wyprowadzonych wzorów, pamiętając, że teraz będziemy mieli do czynienia z tak zwanym procesem adiabatycznym lub izentropowym, w którym nie zachodzi wymiana ciepła i—co zatem idzie—entropia przez cały przeciąg zjawisk odkształcenia pozostaje stałą.

Jeżeli dla początkowego stanu ciała, dla którego wszystkie Q_i i q_i są równe zeru, obierzemy pewną temperaturę początkową ϑ_0, nadamy tem samem entropii pewną wartość początkową dowolną; dajmy, że ta wartość jest zerem dla stanu początkowego, pozostanie tedy zerem w ciągu trwania rozważanego procesu adiabatycznego, t. j. będzie:

$$S = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = \sum_{i=1}^{i=6} b_i q_i + \frac{1}{2}\frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} = 0.$$

W równaniu tem $\tau = \vartheta - \vartheta_0$ wyraża oczywiście, przyrost temperatury samego ciała, wynikający z odkształcenia, funkcya zaś $f(\tau)$ powinna być postaci $f(\tau) = r\tau^2 + s\tau^3 + \ldots\ldots$, dla tego że założyliśmy, iż S ma być zerem dla $\tau = 0$ i $q_i = 0$. Z drugiej strony mamy na S wyrażenie inne, mianowicie:

$$S = -\frac{\partial Z}{\partial \vartheta} = -\sum_{i=1}^{i=6} h_i Q_i - \tfrac{1}{2}\frac{\partial f_1(\tau)}{\partial \tau} = 0,$$

gdzie $f_1(\tau)$ jest postaci $r_1\tau^2 + s_1\tau^3 + \ldots\ldots$ Dla ciała izotropowego otrzymujemy tedy dwa równania:

Digitized by Google

$$b(q_1 + q_2 + q_3) + \tfrac{1}{2}\frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} = 0,$$

$$-h(Q_1 + Q_2 + Q_3) - \tfrac{1}{2}\frac{\partial f_1(\tau)}{\partial \tau} = 0,$$

gdzie:

$$b = -\frac{E}{1-2\eta}a, \quad h = -\frac{1-2\eta}{E}b = a.$$

Aby pójść dalej, uczyńmy pewne założenia o funkcyach $f(\tau)$ i $f_1(\tau)$.

Ponieważ z doświadczeń wiadomo, że, przy odkształceniach nieznacznych, zmiana temperatury (τ) jest niewielka, przeto, pomijając stopnie wyższe wielkości τ, można przyjąć $f(\tau) = r\tau^2$, $f_1(\tau) = r_1\tau^2$, a wtedy będzie:

$$\left.\begin{aligned} S &= b(q_1 + q_2 + q_3) + r\tau = 0, \\ S &= -h(Q_1 + Q_2 + Q_3) - r_1\tau = 0. \end{aligned}\right\} (10)$$

Przy uczynionych założeniach o funkcyach $f(\tau)$ i $f_1(\tau)$ otrzymujemy następujące wyrażenia na γ_q i γ_Q:

$$\gamma_q = -\vartheta\frac{\partial^2 H}{\partial \vartheta^2} = \vartheta\frac{\partial S}{\partial \vartheta} = r\vartheta,$$

$$\gamma_Q = -\vartheta\frac{\partial^2 Z}{\partial \vartheta^2} = \vartheta\frac{\partial S}{\partial \vartheta} = -r_1\vartheta,$$

gdzie przez ϑ rozumieć należy temperaturę, przy której wyznaczano wielkości γ_q i γ_Q, a mianowicie, jeżeli wyznaczaliśmy je przy temperaturze początkowej ciała ϑ_0, to $\gamma_q = r\vartheta_0$, $\gamma_Q = = r_1\vartheta_0$, skąd:

$$r = \frac{\gamma_q}{\vartheta_0}, \quad r_1 = -\frac{\gamma_Q}{\vartheta_0},$$

a wtedy równania (10) przybierają postać:

$$b(q_1 + q_2 + q_3) + \frac{\gamma_q}{\vartheta_0}\tau = 0,$$

$$-h(Q_1 + Q_2 + Q_3) + \frac{\gamma_Q}{\vartheta_0}\tau = 0,$$

Digitized by Google

lub:

$$(11)\quad \begin{aligned} q_1 + q_2 + q_3 &= \frac{1-2\eta}{E}\,\frac{1}{a}\,\frac{\gamma_q}{\vartheta_0}\,\tau, \\ Q_1 + Q_2 + Q_3 &= \frac{1}{a}\,\frac{\gamma_Q}{\vartheta_0}\,\tau. \end{aligned}$$

Dla rozważanego procesu adiabatycznego należy w wyrażeniach na q_i i Q_i (8'), (9') odrzucić wyrazy, zawierające τ, gdyż w procesie tym niema przypływu ciepła do ciała (zzewnątrz); podstawiając więc wyrażenia (11) we wzory (8') i (9'), w których odrzucono uprzednio ostatnie wyrazy, znajdziemy:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= \frac{E}{1+\eta}\,q_1 + \frac{\eta}{1+\eta}\,\frac{1}{a}\,\frac{\gamma_q}{\vartheta_0}\,\tau, \\ Q_2 &= \frac{E}{1+\eta}\,q_2 + \frac{\eta}{1+\eta}\,\frac{1}{1}\,\frac{\gamma_q}{\vartheta_0}\,\tau, \\ Q_3 &= \frac{E}{1+\eta}\,q_3 + \frac{\eta}{1+\eta}\,\frac{1}{a}\,\frac{\gamma_q}{\vartheta_0}\,\tau, \\ Q_4 &= \frac{E}{2(1+\eta)}\,q_4, \quad Q_5 = \frac{E}{2(1+\eta)}\,q_5, \quad Q_6 + \frac{E}{2(1+\eta)}\,q_6; \end{aligned}\right\}(12)$$

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \frac{1+\eta}{E}\,Q_1 - \frac{\eta}{E}\,\frac{1}{a}\,\frac{\gamma_Q}{\vartheta_0}\,\tau, \\ q_2 &= \frac{1+\eta}{E}\,Q_2 - \frac{\eta}{E}\,\frac{1}{a}\,\frac{\gamma_Q}{\vartheta_0}\,\tau, \\ q_3 &= \frac{1+\eta}{E}\,Q_3 - \frac{\eta}{E}\,\frac{1}{a}\,\frac{\gamma_Q}{\vartheta_0}\,\tau, \\ q_4 &= \frac{2(1+\eta)}{E}\,Q_4, \quad q_5 = \frac{2(1+\eta)}{E}\,Q_5, \quad q_6 = \frac{2(1+\eta)}{E}\,Q_6. \end{aligned}\right\}(13)$$

Wzory te wskazują, że odkształceniom, wywołującym zmianę objętości ciała, towarzyszy zmiana jego temperatury.

Digitized by Google

Zastosujmy te wzory do przypadku ciągnienia lub ściskania pręta izotropowego pod wpływem siły $P = p\sigma$, działającej na koniec pręta w kierunku normalnym do jego podstawy σ. W tym przypadku jest $Q_1 = Q_2 = Q_4 = Q_5 = Q_6 = 0$, $Q_3 = -p$, a z równań (13) znajdujemy:

$$q_1 = -\frac{\eta}{E}\frac{1}{a}\frac{\gamma_Q}{\vartheta_0}\tau,$$

$$q_2 = -\frac{\eta}{E}\frac{1}{a}\frac{\gamma_Q}{\vartheta_0}\tau,$$

$$q_3 = \pm\frac{1+\eta}{E}p - \frac{\eta}{E}\frac{1}{a}\frac{\gamma_Q}{\vartheta_0}\tau.$$

Porównywając te wzory z wzorami, które daje Teorya sprężystości dla tego przypadku, mianowicie z wzorami:

$$(q_1)_{\vartheta_0} = \mp\frac{\eta}{E}p; \quad (q_2)_{\vartheta_0} = \mp\frac{\eta}{E}p; \quad (q_3)_{\vartheta_0} = \pm\frac{1}{E}p,$$

znajdujemy:

$$\mp\frac{\eta}{E}p = -\frac{\eta}{E}\frac{1}{a}\frac{\gamma_Q}{\vartheta_0}\tau,$$

skąd:

$$\tau = \pm\vartheta_0\frac{ap}{\gamma_Q}, \qquad (14)$$

gdzie znak górny odnosi się do przypadku ściskania, znak dolny do przypadku rozciągania.

Wzór (14) jest analogiczny do znanego wzoru Thomsona dla ciał gazowych.

Digitized by Google

H. A. LORENTZ.

TERMODYNAMIKA I TEORYE KINETYCZNE.

W Fizyce matematycznej posługujemy się teoryami dwojakiego rodzaju; jedne i drugie dają nam możność zrozumienia w pewnej mierze tego, co zachodzi w świecie materyalnym, mimo to różnią się one wielce co do istoty swej, jako też i celu.

W teoryach pierwszej kategoryi staramy się przeniknąć mechanizm wewnętrzny zjawisk; usiłujemy przedstawić sobie ruch cząsteczek, atomów i — jak należy dodać w naszych czasach—jonów i elektronów; wyznaczamy prędkości, wymiary, masy i ładunki elektryczne tych cząsteczek niezmiernie małych.

Wszystko to jest obce teoryom drugiej kategoryi. Fizycy, dający pierwszeństwo tym teoryom, zajmują się tylko wielkościami, bezpośrednio dostępnemi naszemu dostrzeganiu: temperaturami, ilościami ciepła, prądami elektrycznemi i t. d. Po wymierzeniu tych wielkości, ustanawiają oni wzajemne ich związki i stwierdzają, że związki te są w zgodzie z pewnemi zasadami ogólnemi, pomiędzy któremi do najważniejszych należą zachowanie energii i drugie prawo Termodynamiki.

Pozwólcie mi w tym wykładzie przedstawić niektóre uwagi o tych dwóch metodach i rzucić okiem na sposób, w jaki one stosowane bywają do pewnej liczby przypadków szczególnych. Przykłady wezmę z Teoryi ciepła; będę więc mówił z jednej strony o Termodynamice, w szczególności zaś o drugiem prawie, o zasadzie Carnota-Clausinsa, z drugiej zaś strony o teoryach kinetycznych, t. j. o teoryach

[1]) Wykład w Towarzystwie fizycznem francuskiem d. 27 kwietnia 1905, przełożony za upoważnieniem Autora.

Digitized by Google

opartych na pojęciu ruchu cząsteczkowego. Proszę, abyście to wyrażenie pojmowali w znaczeniu nieco ogólniejszem, bo nietylko atomy, lecz i elektrony uważać będziemy jako ożywione pewną prędkością, tem większą, im temperatura jest wyższa.

Wszyscy wiemy o ważnej roli, jaką odegrała tak Termodynamika, jak i Teorya kinetyczna w rozwoju wiedzy naszej. Przytaczanie na to licznych przykładów byłoby tu zbyteczne; pozwólcie wszakże, bym przypomniał niektóre wyniki. Termodynamika pozwoliła nam przewidzieć wpływ ciśnienia na punkt zamarzania wody, dostarczyła nam prawideł, dotyczących zmian temperatury, towarzyszących odmianom adiabatycznym, np. przy wydłużaniu lub kurczeniu się drutu metalicznego, i stała się podstawą nauki nowej o równowagach cząsteczkowych i chemicznych.

Prawie w całej tej dziedzinie teorye kinetyczne w chwili obecnej muszą uznać się za bezsilne. Natomiast Teorya kinetyczna gazów odsłoniła nam związek, istniejący pomiędzy spółczynnikiem tarcia wewnętrznego a spółczynnikiem przewodnictwa cieplnego; wykazała, wyprzedzając obserwacyę, że spółczynniki te są niezależne od gęstości, i stąd opierając się na zasadzie Dopplera, mógł Michelson wydobyć wyjaśnienie szerokości pasm widmowych nawet dla gazów najbardziej rozrzedzonych.

Wyniki te wykazują — jak mniemano — że te teorye są obie zarówno uzasadnione i upoważniają nas do przeświadczenia, że — należycie rzecz biorąc — nie powinny one być w żadnym przypadku istotnie przeciwnemi lub nieprzejednanemi. Wolno więc przypuścić, że wszystkie wyniki, wyprowadzone z Termodynamiki, powinny dać się otrzymać przy pomocy teoryj kinetycznych. Gdybyśmy potrafili wytworzyć sobie wyobrażenie dostatecznie dokładne o ruchach i siłach cząsteczkowych w masie wody, kawałku lodu lub drutu miedzianego, moglibyśmy z nich obliczyć punkt topliwości pod ciśnieniem danem, oraz ogrzanie, sprawione w drucie przez nagłe ściśnienie. Można nawet domniemywać się, że aby to spełnić, nie potrzeba wcale zgłębiać, we wszystkich szczegółach, niewidzialnych ruchów we wnętrzu ciał. Zasada Carnota-Clausiusa powinna odpowiadać pewnej własności ogólnej tych ruchów; dość więc znać te własności, albo — co na jedno wychodzi—podać wywód drugiego prawa Termodynamiki, oparty na Mechanice układów cząsteczkowych.

Digitized by Google

Niestety, ważne to zagadnienie, o którem traktuje ostatni rozdział „Termodynamiki“ Poincarégo, dalekie jest od całkowicie zadawalającego rozwiązania. Dla okazania tkwiącej w niem trudności, pozwolę sobie kwestyę przedstawić nieco szczegółowiej, ograniczając się dla prostoty do rozważenia stanów równowagi.

Określając stan równowagi jakiegokolwiek układu zapomocą pewnej liczby parametrów $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$, zmianę zaś nieskończenie małą tego stanu za pomocą różniczek $d\alpha, d\beta, d\gamma, \ldots\ldots$, będzie można przedstawić ilość ciepła, jakiej należy udzielić układom, by ta zmiana zastąpiła za pomocą wyrażenia postaci:

$$(1) \qquad A d\alpha + B d\beta + C d\gamma + \ldots\ldots,$$

w którem spółczynniki $A, B, C, \ldots\ldots$ sa funkcyami parametrów. Otóż prawo, o którem mowa, orzeka, że dzieląc to wyrażenie przez temperaturę bezwzględną T, otrzymujemy różniczkę zupełną; innemi słowy, że temperatura jest dzielnikiem całkującym wyrażenia, które otrzymano na ilość ciepła. Jest rzeczą jasną, iż przed podjęciem dowodzenia tego twierdzenia trzeba będzie sprawdzić, że pojęcie temperatury stosuje się do układu. Trzeba będzie tedy zdać sobie sprawę z faktów doświadczalnych, na których pojęcie to gruntuje się. Z faktów tych dość przypomnieć następujący: Jeżeli trzy ciała znajdują się w stanach takich, że nie zachodzi żadna wymiana ciepła, gdy pierwsze z nich z nich wprowadzimy w zetknięcie, drugiem czy z trzeciem, wtedy te dwa drugie ciała można również wprowadzić w zetknięcie bez jakiejkolwiek wymiany ciepła pomiędzy niemi.

Oto jest prawidło bardzo proste, którego wywód ogólny przedewszystkiem dać winniśmy, posiłkując się, oczywiście, tylko hypotezami stosowalnemi do wszystkich ciał stałych, ciekłych i gazów. Lecz, niestety, zachodzą tu wielkie trudności niepokonalne po dzień dzisiejszy. Tylko dla niektórych bardzo prostych przypadków teorya mogła doprowadzić do tego prawa równowagi temperatury.

Nie należy wszakże sądzić, że nie uczyniono żadnego postępu w sprawie ugruntowania Termodynamiki na zasadach Mechaniki. Zawdzięczamy Helmholtzowi[1]) ważne badania nad klasą układów,

[1]) Helmholtz, „Studien zur Statik monocyklischer Systeme“ (Sitzungsber d Akad. d. Wiss. Berlin, str. 159, 311; 1884).

Digitized by Google

których ruch przedstawia ścisłą analogię ze zjawiskami ciepła. Układy te, zwane, monocyklicznemi, charakteryzuje to, że ruch ich może być całkowicie określony przez jednę wielkość, odgrywającą rolę prędkości: nadto w ciągu ruchu własności układu nie podlegają żadnej zmianie. Aby mieć przykład, pomyślmy sobie rurę pierścieniową R (fig. 1), napełnioną całkowicie płynem nieściśliwym, a której ścianki mogą przybierać rozmiary i formy bardzo różne pod wpływem ciśnień płynu wewnętrznego oraz stosowanego doń układu sił zewnętrznych F. Dajmy, że nie zachodzi żadne tarcie ani w płynie, ani pomiędzy płynem a ściankami rury; wtedy płyn, raz wprawiony w ruch w zwrocie strzałek, krążyć nie przestanie.

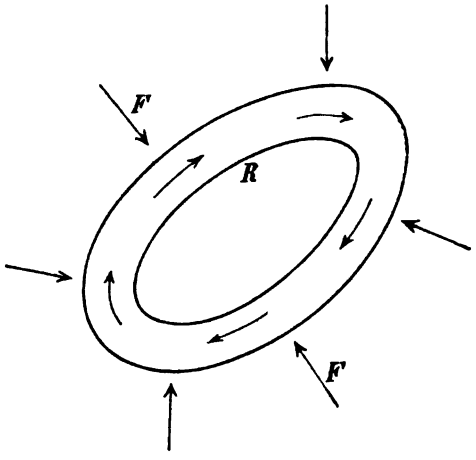


Fig. 1.

Wskażę wam teraz podobieństwo tego układu do układów, badanych w Teoryi ciepła, np. do masy gazowej, zamkniętej w walcu pod tłokiem ruchowym. Dla prostoty nadaję rurze formę kołową, taką, jaką widzimy na fig. 2. Aby nie psuć tej symetryi, siła wewnętrzne powinny mieć kierunek, wskazany przez strzałki F, lub kierunek przeciwny; powinny nadto być rozmieszczone jednostajnie na całym okręgu. To mając, możemy porównać krążenie płynu z ruchami cząsteczkowemi w gazach, a siły, o których mowa, z ciśnieniem zewnętrznem, którem działamy na tłok. Powiększając ciśnienie, możemy sprawić opadanie tłoka, co powiększy natężenie ruchu cząsteczkowego. Po-

Digitized by Google

dobnie, jeżeli przez zwiększenie sił F nadamy naszemu pierścieniowi mniejszą średnicę, płyn nabierze większej prędkości.

Dla zupełności analogii trzeba jeszcze wyobrazić sobie, że w jakikolwiek sposób można oddziałać bezpośrednio na krążenie płynu, przyśpieszając je lub zwalniając za pomocą sił w kierunku prądu lub w kierunku odwrotnym. Praca dodatnia lub ujemna tych sił—nazwijmy ją „pracą cykliczną“ — odpowiadać będzie ilości ciepła, udzielonego lub zabranego masie gazowej.

Pomyślmy teraz jakąkolwiek nieskończenie małą zmianę pierścienia, polegającą na zmianach jednoczesnych promienia i prędkości ruchu wewnętrznego. Można wtedy obliczyć pracę cykliczną i udowodnić, że

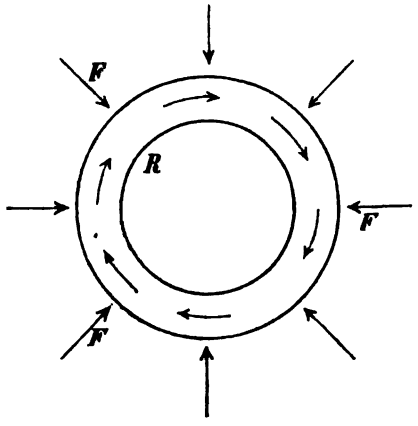


Fig. 2.

wyrażenie, do którego dochodzimy, staje się różniczką zupełną po podzieleniu go przez wartość energii kinetycznej płynu, przypadającą na jednostkę objętości. Wynik ten pozostaje prawdziwym i w przypadku rury jakiejkolwiek formy, dla której określenie stanu wymaga większej liczby parametrów niż dla rury kołowej.

Jesteśmy już dość blizcy prawa termodynamicznego; trzeba tylko tak rzecz urządzić, aby energia kinetyczna na jednostkę objętości odgrywała rolę temperatury. Można to uczynić bez trudności. Przypuśćmy, że mamy pewną liczbę tych rur pierścieniowych i że za pomocą pewnego dającego się obmyśleć mechanizmu możemy ustanowić związek pomiędzy ruchem płynu w dwóch rurach, oraz że ten związek jest

Digitized by Google

taki, iż wymaga równości pomiędzy prędkościami w dwóch układach. Wtedy, jeżeli zazębimy—że tak powiem—o siebie dwie rury, dla których energia kinetyczna na jednostkę objętości ma tę samą wartość, stan ich nie zmieni się; energia kinetyczna odpowiada tedy temperaturze.

Uwydatniona tu analogia iest zapewne bardzo ciekawa i zdaje mi się niewątpliwem, że przez tę teoryę układów monocyklicznych Helmholtz wskazał punkt istotny dedukcyi mechanicznej prawa termodynamicznego. W samej rzeczy, ruch cząsteczkowy ma mianowicie dwie własności, które napotkaliśmy w ruchu układu monocyklicznego. Natężenie tego ruchu może być w każdej chwili określone przez jednę tylko wielkość, np. przez energię kinetyczną całkowitą ciała, ruch zaś sam może trwać nieoznaczenie, nie wytwarzając najmniejszej zmiany w stanie układu.

Lecz—należy to zaznaczyć—istnieje mimo to głęboka różnica. Gdy w naszym pierścieniu płyn porusza się—że tak powiem—w jednej sztuce, to cząsteczki ciała mają ruchy nadzwyczajnie różne nietylko co do kierunku, ale i co do prędkości. Nie wolno do tego ruchu nieregularnego stosować bezpośrednio wyników, które otrzymano dla przypadku o wiele mniej zawiłego pierścieni napełnionych płynem. Zagadnienia, do których prowadzi układ, złożony z niezliczonych cząsteczek, wymagają osobnego badania metodą właściwą tego rodzaju pytaniom. Maxwell nakreślił już był drogę postępowania [1]), stwarzając swoją metodę statystyczną, która zresztą jest bardzo naturalna i nasuwa się prawie sama przez się. Ponieważ niepodobna śledzić myślą pojedyńczych cząsteczek, połączono je w grupy takie, że cząsteczki, należące do tej samej grupy, mogą być uważane jako posiadające ten sam stan ruchu. Wtedy zwraca się uwagę na liczbę cząsteczek, znajdujących się w grupie określonej i na zmiany tej liczby od jednej chwili do drugiej, i bada się udział różnych grup we własnościach całego układu i w zjawiskach, które można obserwować.

Widzicie, że przypomina to bardzo statystykę ludności i rozumiecie, że obawiać się należy tego tylko, by liczba indywiduów, t. j. cząsteczek nie była zbyt mała dla stosowania metody statystyki; otóż

---

[1]) Maxwell, Phil. Mag. (4) **19**, str. 19, 1860; **20**, str. 21, 1860; **35**., str. 729, 185; 1868.

Digitized by Google

liczba cząsteczek zawartych w jednem milimetrze sześciennym gazu jest tak wielka, że żadna ludność nie mogłaby jej dosięgnąć.

Metodę statystyczną jako gałąź Mechaniki, rozwija ostatnie dzieło Gibbsa „Zasady elementarne Mechaniki statystycznej“ Boltzmann zaś („Wykłady o teoryi gazów“) posługiwał się nią w swych badaniach nad teoryą cząsteczkową. Wymienię tu bardzo ważne twierdzenie, które zostało w ten sposób, jeżeli nie ściśle udowodnione, to przynajmniej uczynione bardzo prawdopodobnem; mianowicie, że dla danej temperatury każda cząsteczka indywidualna, czy nią będzie molekuła, atom czy jon, uczestnicząca w ruchu cząsteczkowym, posiada przeciętnie w każdem ciele tą samą energię kinetyczną i że energia ta jest proporcyonalna do tem-

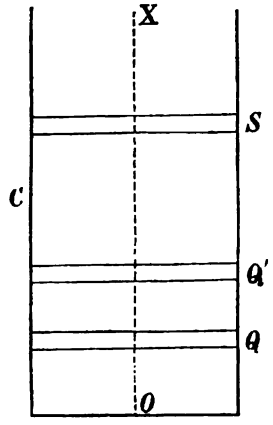


Fig. 3.

peratury bezwzględnej T, tak że można ją wyrazić przez aT, gdzie a jest stałą powszechną.

Jest to wynik lub — jeżeli chcecie — hypoteza, którą będziemy tu posługiwali się; stałą a znajdziemy w wielu z naszych równań.

Co się tyczy wywodu drugiego prawa Termodynamiki, to pozostaje on jeszcze do zrobienia, jakkolwiek w teoryi układów monocyklicznych posiadamy już model oraz odpowiednie narzędzie, konieczne w metodzie statystycznej. Nie będę tedy zatrzymywał się nad tym przedmiotem, a przejdę do zagadnień specyalnych, które chciałem wam

Digitized by Google

przedstawić. Zagadnienia te są nieco luźne i proszę wybaczyć mi, że rozważając je, zboczę niekiedy od mojego przedmiotu głównego, którym jest związek pomiędzy Termodynamiką a teoryami kinetycznemi.

Rozważmy najprzód masę gazową, zamkniętą tą w walcu pionowym C (Fig. 3) i poddaną działaniu ciężkości. Jaki stan stateczny (umiejscowiony) powstanie w tym układzie?

Termodynamika ma na to odpowiedź gotową. Wymaga ona, aby temperatura była stała na wszystkich wysokościach; bo gdyby było inaczej, moglibyśmy łatwo pomyśleć doświadczenie, w którem ciepło przenosiłoby się od ciała zimnego do ciała ciepłego, wbrew zasadzie Carnota-Clausiusa.

Oto wynik, który — zdaje się — trudno pogodzić z Teoryą kinetyczną. W samej rzeczy, na pierwsze wejrzenie zdawałoby się, że możnaby rozumować w sposób taki: Cząsteczka spadająca będzie miała pod działaniem siły ciężkości ruch przyśpieszony, cząsteczka wnosząca się tracić będzie na prędkości; stąd w niższej części kolumny mieć będziemy prędkości większe niż w części wyższej, t. j. temperatura będzie wyższa u podstawy, niż u szczytu kolumny, gdyż siła żywa średnia określa temperaturę.

Na szczęście, ta pierwsza trudność może być pokonana. Maxwell wykazał [1], prawie czterdzieści lat temu, że jeżeli to rozumowanie powierzchowne zastąpimy rozumowaniem ściślejszem, opartem na metodzie statystycznej, powinniśmy w istocie wywnioskować z niego równość temperatury w całej kolumnie.

Wskażę wam rozwiązanie Maxwella i sprawdzę je. W tym celu wprowadzamy trzy osi spółrzędnych, wzajemnie prostopadłe, z których jedna OX jest skierowana ku górze; oznaczmy przez ξ, η, ζ, składowe prędkości cząsteczki według tych osi; przez g zaś oznaczmy przyśpieszenie ciężkości. Niechaj dx będzie grubością warstwy poziomej— nazwijmy ją Q—położonej na wysokości x; warstwę tę możemy uważać jako nieskończenie cienką dla naszych obserwacyj, co nie przeszkadza temu, by zawierała w sobie niezmiernie wiele cząsteczek. Pomiędzy temi cząsteczkami jest pewna liczba takich, dla których pierwsza składowa prędkości zawiera się pomiędzy ξ i $\xi + d\xi$, składowa druga pomiędzy η i $\eta + d\eta$, składowa trzecia pomiędzy ζ i $\zeta + d\zeta$, gdzie $d\zeta$,

[1]) Maxwell, Phil. Mag. (4), 35, str. 215 (1868)

Digitized by Google

$d\eta$, $d\zeta$ są nadzwyczajnie małe w stosunku do samych prędkości, lecz, mimo to, dość wielkie jeszcze, aby grupa cząsteczek, którą one określają, była bardzo liczna. To mając, można powiedzieć z Maxwellem, że liczba cząsteczek tej grupy, znajdującej się w pewnej chwili w warstwie dx, może być przedstawiona przez:

$$A\, e^{-2ghx}\, e^{-h[\xi^2+\eta^2+\zeta^2]}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, dx, \tag{2}$$

gdzie A i h są wielkości stałe. Wyrażenie to wyda wam się, być może, zbyt zawiłem, lecz jeżeli pomyślicie, iż zawiera ono w sobie całą statystykę ruchów cząsteczkowych i że pozwala wskazać dokładnie stan gazu na wszelkiej wysokości, uznacie je za prawdziwie proste.

Przechodzę teraz do sprawdzenia. Dzięki czynnikowi

$$e^{-h[\xi^2+\eta^2+\zeta^2]},$$

stan, przedstawiony przez wyrażenie (2), ma tę własność, iż nie ulega zmianie wskutek wzajemnych uderzeń cząsteczek. Maxwell podał na to dowodzenie, którego nie powtarzam; wspominam zaś o tem twierdzeniu dlatego, aby mieć prawo odwrócić uwagę od uderzeń. Winienem zatem pokazać, że gdy założymy, iż każda cząsteczka może swobodnie odbywać swą drogę, stan gazu nie ulega zaburzeniu przez działanie ciężkości.

Stan gazu będzie oczywiście statecznym wtedy, gdy w jakiejkolwiek warstwie znajdziemy w danej chwili tę samą liczbę cząsteczek, ożywionych prędkością daną; wtedy bowiem jakkolwiek coraz nowe cząsteczki znajdować się będą w warstwie, mnogość ich nie zmieni swych własności, które jedynie obserwować można.

Niechaj t oznacza jakikolwiek przedział czasu. Na początku tego przedziału warstwa dx zawiera daną przez wyrażenie (2) liczbę cząsteczek, których składowe prędkości są zawarte w granicach wyżej wskazanych. Lecz cząsteczki te opuszczą rozważaną warstwę. Na końcu czasu t znajdziemy je w warstwie Q', położonej na wysokości x' i z prędkościami ξ', η, ζ, z których druga i trzecia nie uległy zmianie. Można dowieść, że grubość nowej warstwy wolno przyjąć jako równą grubości dx i że odchylenia krańcowych wartości składowych prędkości będą również $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$. Widzimy tedy, że liczba cząsteczek, które po upływie czasu t znajdą się w warstwie Q' i których prędkości są

Digitized by Google

zawarte pomiędzy ξ' a $\xi'+d\zeta$, η a $\eta+d\eta$, ζ a $\zeta+d\zeta$, jest dana również przez wyrażenie (2). Z drugiej strony, jeżeli stan jest umiejscowiony, jeżeli przeto wzór (2) stosuje się do wszystkich chwil, powinniśmy otrzymać tę samą liczbę, zastępując w nim x przez x', ξ przez ξ'. Trzeba tedy, aby było:

$$A e^{-2ghx-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)} = A e^{-2ghx'-h(\xi'^2+\eta^2+\zeta^2)}.$$

Widzimy wprost, że tak jest rzeczywiście, gdyż dla cząsteczki, poddanej działaniu ciężkości prędkości, pionowe ξ i ξ' na wysokościach x i x' czynią zadość związkowi:

$$2gx+\xi^2 = 2gx'+\xi'^2.$$

Przypatrzmy się teraz nieco bliżej wyrażeniu (2). Zawiera ono dwa wyrazy, z których jeden zależy tylko od x, drugi zaś od ξ, η, ζ. Stąd, gdy x się zmienia, liczby cząsteczek, zawartych w różnych grupach różniących się prędkościami, zmieniać się będą wszystkie w tym samym stosunku. Jeżeli tedy sporządzimy statystykę cząsteczek, położonych w warstwie Q, a następnie statystykę cząsteczek w innej warstwie znajdziemy dla grup różnych liczby, różniące się czynnikiem stałym. Jest to tak samo, jak gdyby miało się do czynienia z dwiema ludnościami i gdyby każdej liczbie mieszkańców pewnego wieku w pierwszej odpowiadała w drugiej liczba dwa razy większa mieszkańców tego samego wieku. Wiek średni byłby jednakowy w obu przypadkach. W tenże sam sposób możecie wnieść, że prędkość średnia i energia kinetyczna są te same na wszystkich wysokościach; temperatura nie zmienia się tedy od jednej warstwy do drugiej.

Co się tyczy gęstości, to jest ona oczywiście proporcyonalna do czynnika e^{-2ghx}. Można dowieść, że zgadza się to z prawem zwykłej teoryi równowagi masy gazowej; jest to prawo, którem posługujemy się w pomiarach wysokości gór za pomocą barometru.

Moglibyśmy przejść teraz do układów coraz więcej skomplikowanych, usiłując zawsze tworzyć sobie ich obrazy, odpowiadające dedukcyom termodynamicznym. By dać na to przykład, nie pozbawiony interesu, możemy przyjąć, że gaz, o którym mówię i który oznaczę dla skrócenia przez literę M, daje się rozłożyć na dwa inne gazy M_1 i M_2 za pomocą dy-

Digitized by Google

socyacyi, zmierzającej ku stanowi równowagi. Będziemy tedy mieli mieszaninę trzech gazów M, M_1, M_2 i stopień dysocyacyi, który zależy od gęstości, nie będzie jednakowy w całej rozciągłości naszej kolumny pionowej.

Termodynamika atoli wymaga. aby, mimo różnic w gęstościach, równowaga utrzymywała się równocześnie we wszystkich warstwach poziomych. Jest to znowu wynik, który powinna wyjaśnić Teorya kinetyczna.

Wystarczy przypomnieć sobie—czego łatwo dowieść—że stała h w naszym wzorze (2) jest proporcyonalna do ciężaru cząsteczkowego gazu i wprowadzić znane prawo dysocyacyi Guldberga i Waagego.

Oznaczywszy gęstości trzech gazów przez Δ, Δ_1, Δ_2, możemy prawo to wyrazić wzorem:

$$\Delta = k\Delta_1\Delta_2, \tag{3}$$

gdzie k jest stałą, i gdzie założono, że cząsteczka gazu M rozkłada się na cząsteczkę gazu M_1 i na cząsteczkę gazu M_2. Z drugiej strony oznaczmy przez h, h_1, h_2 stałe, zachodzące we wzorze Maxwella, gdy wzór ten zastosujemy do trzech ciał. Równowaga każdego z gazów rozważanego osobno wymaga wtedy, aby gęstości zmieniały się od warstwy w tym samym stosunku jak wielkości:

$$e^{-2ghx},\ e^{-2gh_1x},\ e^{-2gh_2x};$$

innemi słowy, aby dały się wyrazić w ten sposób:

$$\Delta = Ce^{-2ghx},\quad \Delta_1 = C_1e^{-2gh_1x},\quad \Delta_2 = C_2e^{-2gh_2x}.$$

Ponieważ spółczynniki h, h_1, h_2 są proporcyonalne do ciężarów cząsteczkowych, a ciężar cząsteczkowy gazu M jest sumą ciężarów cząsteczkowych gazów M_1, M_2, będzie:

$$h = h_1 + h_2.$$

Wprowadźmy wartości na Δ, Δ_1, Δ_2 do równania (3); można podzielić to równanie przez czynnik e^{-2ghx} równy iloczynowi wielkości e^{-2gh_1x}, e^{-2gh_2x} i równość nasza będzie:

$$C = kC_1C_2.$$

Digitized by Google

Ponieważ zniknęła spółrzędna x, przeto równowaga może istnieć równocześnie we wszystkich wartościach [1]).

Do tej pory mówiłem tylko o ciałach gazowych, mających gęstość tak małą, że ulegają prawom Boyle'go i Gay-Lussaca. Zagadnienie staje się o wiele trudniejszem, gdy przechodzimy do stanów gęstszych materyi. Wzór tak płodny, przy pomocy którego van der Waals wyjaśnił ciągłość stanów ciekłego i gazowego, jest przecież tylko przybliżony, a w swojej pięknej teoryi mieszanin fizyk ten musiał posługiwać się jednocześnie rozumowaniami, opartemi na teoryi cząsteczkowej, oraz innemi, należącemi do Termodynamiki.

Aby wam dać przykład zagadnienia, którego Teorya kinetyczna nie mogła dotąd rozwiązać, jakkolwiek nie wiele jeszcze braknie do tego, powiem kilka słów o równowadze roztworu poddanego działaniu ciężkości.

Wiecie, że wiele własności takiego roztworu można związać z pojęciem ciśnienia osmotycznego. Posługując się tem pojęciem, znajdziemy łatwo prawidło, kierujące zmianami koncentracyi w kierunku pionowym,

W samej rzeczy, wyobraźcie sobie, że roztwór zawarty jest w walcu pionowym, zanurzonym w płynie rozpuszczającym—dajmy na to—w wodzie, i którego ścianki niższe i wyższe są napółprzepuszczalne. Według Termodynamiki, będziemy mieli z pewnością stan równowagi.

Nazwijmy w tym stanie przez p_1 i p_2 ciśnienia, zachodzące w roztworze na podstawach górnej i dolnej walca, przez p'_1 i p'_2 ciśnienia

---

[1]) Łatwo uogólnić powyższe rozumowanie dla przypadku, w którym reakcyę pomiędzy trzema gazami przedstawia według znanego znakowania wzór

$$nM \rightleftarrows n_1 M_1 + n_2 M_2,$$

gdzie n, n_1, n_2 są jakiekolwiek liczby całkowite. Na zasadzie proporcyonalności spółczynników h, h_1, h, i ciężarow cząsteczkowych, będzie:

$$nh = n\,h_1 + n_2 h_2:$$

prawo zaś Guldberga i Waagego przybierze postać:

$$\Delta^n = k\Delta_1^{n_1}\,\Delta_2^{n_2}\,.$$

Warunek równowagi:

$$C^n = kC_1^{n_1}\,C^{n_2},$$

będzie znów niezależny od wysokości.

Digitized by Google

w wodzie, będącej w zetknięciu z temi ściankami, przez O_1 i O_3 ciśnienie osmotyczne u podstawy i w wierzchołku kolumny. Będzie według definicyi:

$$p_1 - p'_1 = O_1, \quad p_2 - p'_1 = O_2.$$

Przyjmijmy, że przecięcie poziome walca równa się jednostce powierzchni i że można pominąć grubość ścianek. Jeżeli Q jest wagą roztworu, zawartego w walcu, Q' — wagą równej objętości wody, będzie:

$$p_1 - p_2 = Q, \quad p'_1 - p'_2 = Q',$$

stąd:

$$O_1 - O_2 = Q - Q'. \tag{4}$$

Jest to prawidło szukane, albowiem dozwala nam poznać różnice wartości ciśnienia osmotycznego na różnych wysokościach, a wartości te są ściśle związane z koncentracyą.

Gdybyśmy chcieli otrzymać ten sam wynik, posługując się metodą cząsteczkową, znaleźlibyśmy, że jest to w samej rzeczy możliwe, jeżeli przyjąć jedno, czego do tej pory nie można było ściśle udowodnić [1]). Jeżeli rozpuścicie nieco soli w jednym litrze wody i jeżeli chcecie, aby mieszanina zajmowała także objętość jednego litra, musicie zabrać pewną małą ilość wody. Można powiedzieć, że tę małą ilość wody zastąpiono solą. Otóż, by dojść do wzoru (4), trzeba przyjąć, że w roztworze, podległym działaniu większości, cząsteczki soli doznają razem wzięte ze strony cząsteczek wody działania siły równej i przeciwnej ciężarowi wody przesuniętej.

Twierdzenie to, przypominające zasadę Archimedesa, jest tak proste, iż można spodziewać się, że da się uzasadnić za pomocą rozumowania bezpośredniego. Jeżeli to się uda, ustanowi się znowu zgoda z Termodynamiką.

Wniosek, wysnuwający się z tych przykładów, jest taki. Jakkolwiek Termodynamika powinna pozostać na długo naszym najpewniejszym przewodnikiem w labiryncie zjawisk, mamy wszelako słuszne powody, by coraz bardziej rozwijać teorye kinetyczne. Nie zastą-

---

[1]) Lorentz. Sur la théorie moleculaire des dissolutions diluées. (Archives neerlandaises 25, str. 107, (1892).

Digitized by Google

pią one odrazu zasady Carnot-Clausiusa, lecz mogą być bardzo użyteczne w celu rozjaśnienia wyników z wzorów Termodynamiki, które same w sobie nie przemawiają wcale do wyobraźni.

Prowadzić będę dalej nasze porównanie z tych dwóch punktów widzenia, przeniósłszy się do innej dziedziny Fizyki.

Zbadajmy najprzód zjawiska termoelektryczne, t. j. 1-o, siłę elektromotoryczną, wytworzoną w obwodzie, złożonym z dwóch metali przez różnicę temperatur miejsc zetknięcia; 2-o, wywiązywanie się lub pochłanianie ciepła w tych miejscach zetknięcia, znane pod nazwą zjawiska Peltiera, i 3-o, zjawisko cieplne w metalu niejednostajnie ogrzanym, po którym przebiega prąd elektryczny.

Te różne zjawiska są związane ze sobą za pomocą wzorów termodynamicznych, które pierwsi podali Clausius[1] i Kelvin[2]. Lord Kelvin mógł nawet przewidzieć ostatnie z powyższych trzech zjawisk. Z równań swych wywnioskował on, że prąd elektryczny, skierowany od części ciepłych do części zimnych metalu, powinien w niektórych metalach sprawić wywiązywanie się, w innych pochłanianie ciepła i że te zjawiska odwracają się, gdy odwrócimy kierunek prądu. Doświadczenie w sposób świetny stwierdziło to przewidywanie.

Teorya kinetyczna przez długi czas nie posuwała się naprzód i dopiero w ostatnich czasach Riecke[3] i Drude[4] zastosowali ją z powodzeniem do teoryi elektronów. Przedstawię wam ją z pewnem uproszczeniem, które chcę najprzód usprawiedliwić.

Liczne poszukiwania stwierdziły, że masa elektronów ujemnych, stanowiących promienie katodalne i promienie β radu, jest znacznie mniejsza od masy atomu wodoru; stanowi ona zaledwie tysiączną lub dwutysiączną część tegoż, tak, iż można powiedzieć, że cząsteczki te, wyrzucane przez rad z niezmiernemi prędkościami, są najmniejsze z po-

---

[1]) Clausius. Pogg. Ann. **90**, str. 513, (1853); „Die mechanische Wärmetheorie". Wyd. 2-gie, t. II, str. 170 (1879).

[2]) W. Thomson. Edinb. Roy. Soc. Trans. **21**, 1854.

[3]) Riecke. Zur Theorie des Galvanismus und der Wärme (Ann. der Physik und Chemie, **66**, str. 353, 545, 1199; 1898).

[4]) Drude. Zur Elektronentheorie der Metalle. (Ann. der Physik, **1**, str. 565; 1900; **3**, str. 369; 1900).

Digitized by Google

między wszystkich znanych. Przeciwnie, dla elektronów dodatnich, wyrzucanych przez rad w promieniach α i napotykanych w pewnych zjawiskach wyładowania elektrycznego, znaleziono, że wielkość ich masy jest tego samego rzędu, co wielkość samych atomów.

Te wyniki prowadzą do przyjęcia, że ładunki elektryczne są zawsze związane z atomami ważkiemi; przyjmiemy, że jest to prawdą także dla metali i że elektrony ujemne, przesuwając się w przestrzeniach międzycząsteczkowych, przenoszą elektryczność z jednego punktu do drugiego.

Koncepcya ta nasuwa—co prawda—trudności, gdy idzie o wyjaśnienie wpływu pola magnetycznego na ruch elektryczności w metalach; lecz nie będę zatrzymywał się nad tem. Zresztą, mniej jest ważnem to, że hypoteza ta nie jest zupełnie zgodna z rzeczywistością; dla naszego celu wystarczyłoby rozważanie metalu fikcyjnego; będziemy mogli tedy ograniczyć się na jednym gatunku elektronów wolnych.

Wyobraźmy sobie teraz, że te cząsteczki uczestniczą w ruchu cieplnym, ożywiającym atomy ważkie; wtedy układ elektronów pomiędzy atomami metalu daje się przybliżenie porównać z gazem zamkniętym w ciele porowatem. Co się tyczy prędkości średniej elektronów, to ta powinna być bardzo znaczna, jeżeli chcemy, aby energia czynna średnia miała tę samą wartość αT, jaką ma dla cząsteczki gazowej. Ponieważ masę takiego elektronu można ocenić jako równą jednej 2000-ej masy atomu wodoru, t. j. jednej 4000-ej masy cząsteczki tego gazu, przeto i jego prędkość powinnaby być więcej niż 60 razy większa od prędkości cząsteczek wodoru w tej samej temperaturze. Daje to dla temperatury 0^0C prędkość większą niż 100 kilometrów na sekundę.

Nie należy wszakże sądzić, że z tą niezmierną prędkością elektrony mogą przebywać wielkie odległości po linii prostej. W istocie, podobnie, jak cząsteczki gazu, z któremi je porównywamy, będą miały ruch po linii zygzagowatej. Po bardzo krótkim przebiegu znajdą drogę zatamowaną przez atom metalu i doznawać będą niezliczonych uderzeń, które odrzucać je będą to w jednym, to w drugim kierunku.

Można przyjąć, że liczba elektronów wolnych na jednostkę objętości dla danego metalu i danej temperatury ma wartość oznaczoną i że ta wartość zmienia się od metalu do metalu, będąc dla każdego ciała funkcyą temperatury. Hypoteza ta jest bardzo naturalna, jeżeli wyobrazimy sobie, że elektrony ruchome zostały wyzwolone przez pe-

Digitized by Google

wien gatunek dysocyacyi. W samej rzeczy, stopień tej dysocyacyi zależny będzie niewątpliwie od temperatury.

Mając te dane, nie trudno zbudować teoryę termoelektryczności[1]. Można najprzód wyjaśnić różnicę potencyału, istniejącą pomiędzy dwoma kawałkami różnych metali A i B, będących w zetknięciu, i to w sposób bardzo interesujący. Dajmy, dla oparcia myśli, że metal B zawiera większą liczbę elektronów wolnych niż metal A. Wtedy, dzięki ruchowi cieplnemu, pewna liczba tych elektronów przeniesie się, poprzez powierzchnię oddzielającą, z metalu B ku metalowi A. Można będzie prawie powiedzieć, że nastąpi ulatnianie się elektryczności ujemnej w pierwszem ciele i zagęszczanie tejże w drugiem. Rzecz ma się podobnie, jak gdybyśmy w jednej połowie umieścili dwie sole z wodą krystalizacyi o różnych prężnościach pary.

Tymczasem w przypadku dwóch metali istnieje przyczyna, która, po upływie bardzo krótkiego czasu, kładzie tamę procesowi dystylacyi. Rozumiemy, że od chwili, gdy niektóre elektrony wolne przeniosły się ku metalowi A, ciało to otrzymało przez to pewien ładunek ujemny, któremu naturalnie towarzyszy ładunek dodatni ciała B. Siły elektryczne, pochodzące od tych ładunków, sprzeciwiają się przenoszeniu nowych elektronów i wreszcie powstrzymują je całkowicie. Nastąpi więc prędko stan równowagi, i można dowieść, że stan ten charakteryzuje różnica potencyału, całkowicie określona przez liczby N_a i N_b elektronów, zawartych w jednostce objętości każdego z dwóch metali.

Należy dodać, że różnica potencyału mogłaby powstać też przez siły cząsteczkowe, działające na bardzo małych odległościach pomiędzy atomami ważkiemi a elektronami. Gdyby np. te ostatnie były silniej przyciągane przez metal A aniżeli przez metal B, wynikłoby stąd także podniesienie potencyału na metalu B i obniżenie potencyału na metalu A. Lecz ponieważ te siły cząsteczkowe nie mogłyby nigdy wytworzyć prądu w obwodzie zamkniętym, możemy przeto pominąć to rozważanie.

Oto w jaki sposób obliczyć można siłę elektromotoryczną, ujawniającą się w obwodzie termoelektrycznym.

Należy w tym celu mieć na uwadze to, że liczby N_a i N_b są funkcyami temperatury. Wynika stąd nietylko, że różnica potencyału nie

[1]) L o r e n t z. The motion of electrons in metallic bodies (Proceedings Acad. of. sc. Amsterdam. str. 438, 585, 684: 1904—1905).

Digitized by Google

jest ta sama w dwóch miejscach zetknięcia dla tego, że mają one temperatury różne, ale i dla tego jeszcze, że w częściach jednorodnych obwodu ruch cieplny dąży do nadania elektronom ruchu w kierunku oznaczonym. Kombinując te różne skutki, dochodzimy do wzoru, który pozwolę sobie napisać. Jeżeli T' i T'' oznaczają temperatury dwóch zetknięć i jeżeli siłę elektromotoryczną F uważamy za dodatnią, gdy wytwarza prąd, idący po przez pierwsze zetknięcie od A ku B, będzie:

$$F = \frac{2a}{3e} \int_{T'}^{T''} \log \frac{N_b}{N_a} \, dT.$$

Tu N_a i N_b mają znaczenie wskazane, a jest stałą powszechną, o której już mówiliśmy, e zaś jest ładunkiem elektrycznym elektronu. Jeżeli przyjmiemy wraz z wieloma fizykami, że ten ładunek jest równy ładunkowi atomu wodoru w elektrolitach, będzie można obliczyć stosunek $\frac{a}{e}$, Znajdujemy tym sposobem, że spółczynnik całki powyższej ma wartość 8700, jeżeli wszystko jest wyrażone w jednostkach elektromagnetycznych. Gdy więc F zmierzono w jednostkach bezwzględnych, można będzie stąd wyznaczyć wartość stosunku N_b/N_a. Dla dwóch metali, znajdujących się na krańcach szeregu termoelektrycznego, jak bizmut i antymon, otrzymujemy na ten stosunek wartość blizką 4; kierunek prądu wskazuje, że bizmut powinien być mniej bogaty w elektrony wolne.

Mamy już teraz zupełnie wytkniętą drogę do wyjaśnienia skutków cieplnych prądu. Obliczymy dla elementu obwodu pracę sił, działających na elektrony wskutek różnic potencyału, i uwzględnimy zarazem energię cząsteczek, wchodzących do tego elementu i z niego wychodzących. Tym sposobem znajdziemy wzory dość proste na zjawisko Peltiera i zjawisko Thomsona. Wzorów tych nie podaję; nadmieniam tylko—co nas najbardziej obecnie obchodzi—że zgadzają się one najzupełniej z rezultatami, otrzymanemi przez Clausiusa i lorda Kelvina.

Oto znowu zgodność wielce znamienna pomiędzy dwiema teoryami, których porównaniem się zajmujemy. Jest ona tem godniejsza uwagi, że na prawdę nie mieliśmy prawa oczekiwać tego. W samej rzeczy, według teoryi elektronów, zjawiska termoelektryczne są ściśle zwią-

Digitized by Google

zane z przewodzeniem ciepła w obwodzie, gdy w teoryi termodynamicznej należy właśnie odwrócić uwagę od przewodzenia, które jest zjawiskiem nieodwracalnem. Jeżeli, opierając się na Mechanice cząsteczkowej, usiłujemy uzasadnić drugie prawo Clausiusa, powinniśmy wykazać, dlaczego w stosowaniu tego prawa do termoelektryczności wolno pominąć przewodzenie ciepła, jakkolwiek należy je poczytywać za zjawisko zasadnicze.

Ostatni problemat, o którym chcę mówić z wami, należy również do dziedziny, w której spotykają się Teorya elektronów i Termodynamika. Mam tu na myśli Teoryę promieniowania ciepła. Wiecie, że teoryę tę zapoczątkowały sławne badania Kirchhoffa i że posiadamy obecnie w niej trzy bardzo ważne prawa: Kirchhoffa, Boltzmanna i Wiena.

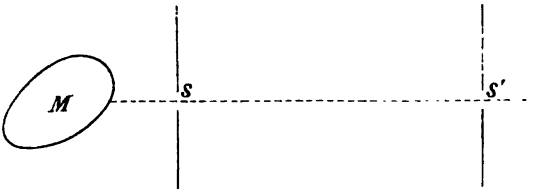


Fig. 4.

W prawach tych idzie o stosunek zdolności emisyjnej E jakiegokolwiek ciała do jego zdolności absorbcyjnej. Dla przypomnienia sobie znaczenia, w jakiem Kirchhoff używa tych terminów, wyobraźmy sobie, że przed ciałem M (Fig. 4) ustawiliśmy dwa ekrany z porobionemi w nich bardzo wązkiemi otworami s i s'. Pewna część całkowitego promieniowania ciała M odbywać się będzie przez te otwory i można tę część rozłożyć na promienie o różnych długościach fali.

Rozważmy natężenie promieniowania, t. j. ilość energii wysyłanej w jednostce czasu, mianowicie energii należącej do promieni, których długość fali zawiera się pomiędzy wartościami λ i $\lambda + d\lambda$. Łatwo widzieć, że jest ona proporcyonalna do pól s i s' otworów i odwrotnie proporcyonalna do kwadratu ich odległości r; nadto jest proporcyonalne do $d\lambda$. Może tedy być wyrażone przez:

$$\frac{Ess'}{r^2}\, d\lambda.$$

Digitized by Google

gdzie czynnik E będzie dla danego ciała funkcyą oznaczoną temperátury i długości fali λ.

Dla zdefiniowania zdolności pochłaniania ciała A przyjmiemy, że wiązka promieni o długości fali, znów równej λ, została skierowana na ciało M poprzez otwory s i s'. Przez A rozumieć będziemy ułamek wskazujący, jaka część energii padającej jest zatrzymywana przez ciało, i mówić będziemy teraz o stosunku $\frac{E}{A}$.

Pierwsze z trzech praw, t. j. prawo Kirchhoffa[1]) orzeka, że wielkość tego stosunku jest niezależna od natury ciała M. Wynika stąd, że zdolność emisyjna będzie tem większa, im pochłanianie jest większe. Największą wartość na E powinny posiadać ciała, pochłaniające całość promieni padających; są to ciała doskonale czarne, albo mówiąc prościej, ciała czarne. Dla tych ciał będzie $E=1$; jeżeli więc oznaczymy ich zdolność emisyjną przez E_n, będzie dla wszystkich innych ciał:

$$\frac{E}{A} = E_n .$$

Można więc powiedzieć, że należy zbadać wysyłanie promieni przez ciało czarne w zależności od temperatury i długości fali .

Zresztą ta wielkość E_n lub $\frac{E}{A}$ pozwala nam jeszcze na trzecią bardzo ciekawą interpretacyę. Pomyślmy powłokę ze wszech stron zamkniętą o ściankach doskonale czarnych, utrzymywaną w temperaturze T; przestrzeń wewnętrzna niechaj będzie pusta, t. j. zajęta przez eter. Przez przestrzeń tę przechodzą niezliczone promienie, krzyżujące się we wszystkich kierunkach, a stąd jest ona siedliskiem pewnej energii. Niechaj D będzie energia na jednostkę objętości, inaczej mówiąc, gęstość energii, pochodzącej od promieni, których długość fali zawiera się pomiędzy λ i $\lambda + d\lambda$. Można dowieść, że wartość liczebna

---

[1]) Kirchhoff. Ueber das Verhältniss zwischen den Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Warme und Licht. (Pogg. Ann. **109**, str. 375; 1860).

Digitized by Google

tej wielkości różni się tylko czynnikiem stałym od $E_\varkappa$; w samej rzeczy jest:

$$D = \frac{4\pi}{c} E_\varkappa d\lambda,$$

gdzie c jest prędkością światła.

Zanim pójdziemy dalej, zauważmy co następuje: Stan promieniowania wewnątrz naszej powłoki mógłby być pobudzony zarazem przez to, że promienie pochodziłyby nie od ścian L (Fig. 5), lecz od ciała czarnego M, umieszczonego gdziekolwiek w przestrzeni wewnątrz powłoki; lecz w takim razie należałoby przypuścić, że ścianki powłoki są doskonale odbijające. Wtedy, nie dorzucając nic do energii, służyłyby one do roznoszenia promieniowania w całej przestrzeni wewnętrznej. Każdy promień przebiegać będzie tę przestrzeń, póki nie napotka ciała M, które go pochłonie.

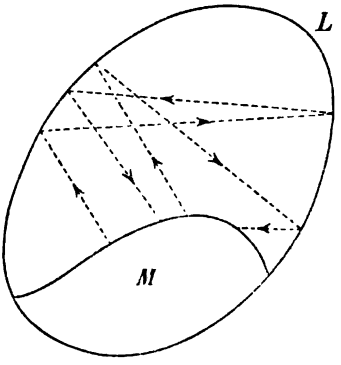


Fig. 5.

Nakoniec najbardziej godnem uwagi jest to, że ten sam stan promieniowania, charakteryzujący się gęstością D energii, istnieć będzie wtedy, gdy ciało M nie jest czarne, lecz jakiekolwiek, byleby dla wszystkich długości fali istniała pewna zdolność emisyjna, jakkolwiek mała. Jest to wniosek, który sam Kirchhoff wyprowadził już był ze swego prawa.

Dla każdej temperatury T można nakreślić krzywą, przedstawiającą wielkość $E_\varkappa$ w funkcyi długości fali, lub, jak powiedzieć też można,

Digitized by Google

dające nam rozmieszczenie energii w widmie ciała czarnego. Ponieważ energia powinna być bardzo mała dla dwóch widm, przeto przewidzieć można, że linia będzie miała postać, którą widzimy na fig. 6-ej. Zresztą formę jej znaleziono na drodze doświadczalnej. Dodam jeszcze, że z punktu widzenia doświadczalnego zagadnienie zostało zupełnie rozwiązane.

Po tym wstępie możemy teraz przejść do praw Boltzmanna i Wiena. Za pomocą subtelnego rozumowania termodynamicznego, pierwszy z tych fizyków [1] przekonał się, że pole całkowite, zawarte pomiędzy krzywą a osią λ, t. j. energia całkowita, wysyłana przez ciało czarne, jest proporcyonalna do czwartej potęgi temperatury.

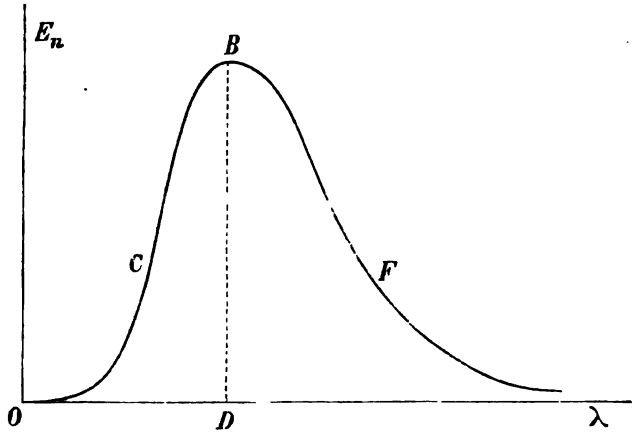


Fig. 6.

Później Wien [2], przy pomocy niemniej bystrych rozważań wykazał, że gdy znamy krzywą dla pewnej temperatury T, możemy przez proste przekształcenie otrzymać z niej krzywą, odpowiadającą innej temperaturze T'. Dość w tym celu zmienić wszystkie odcięte w stosunku T' do T i wszystkie rzędne w stosunku T^5 do T'^5. Wi-

[1]) Boltzmann. Ableitung des Stefan'schen Gesetzes betreffend die Abhängigheit der Wärmestrahlung von der Temperatur aus der elektromagnetischen Lichttheorie. (Ann. d. Physik u. Chemie 22. str. 291; 1884).

[1]) W. Wien. Sitzungsberichte d. Akad. d. Wiss. Berlin, str. 55; 1873.

Digitized by Google

dzimy, że ten wynik obejmuje w sobie prawo Boltzmanna. Zauważmy jeszcze, że według tego wyniku, otrzymanego przez Wiena, długość fali, dla której energia jest największa i którą oznaczę przez λ_m (t. j. odcinek OD na naszej figurze), powinna być, jak wszystkie odcięte, odwrotnie proporcyonalna do temperatury. Im bardziej podniesiemy temperaturę, tem mniejsze długości fali ukażą się w promieniowaniu.

Nie przytaczam wam sprawdzenia dwóch praw, które zresztą zostały stwierdzone zupełnie przez doświadczenia. Mogę tylko powiedzieć, że sprawdzenie to jest wolne od jakiegokolwiek zarzutu i że wszystkie rozumowania, w niem zachodzące, są należycie uzasadnione.

Spożytkowano naprzykład w tem dowodzeniu twierdzenie, które wyprowadzamy z teoryi elektromagnetycznej światła, mianowicie, że promienie wywierają pewne ciśnienie na ciała, na które uderzają. Nadto w rozumowaniach Wiena jest mowa o zmianie, której doznaje długość fali, gdy promienie zostają odbite przez zwierciadło, będące w ruchu. Tę zmianę określa zasada dobrze znana Dopplera. Otóż nikt nie zechce podać w wątpliwość ani tej zasady, ani istnienia ciśnienia, sprawianego przez promieniowanie, stwierdzonego zresztą doświadczalnie przez Lebedewa oraz przez Nicholsa i Hulla.

Jakiem w obec tych wyników jest stanowisko Teoryi kinetycznej? Nic dla niej łatwiejszego, jak wyjaśnić zarysach ogólnych wysyłanie i pochłanianie światła i ciepła. W samej rzeczy dynamika elektronów uczy nas, że cząsteczka naładowana staje się środkiem promieniowania od chwili, gdy doznaje zmiany prędkości. Powinno to oczywiście zachodzić w każdem ciele ważkiem, zawierającem elektrony ruchome, gdy te cząsteczki już to wykonywają drgania mniej lub więcej regularne, już to, gdy są we wzburzeniu nieregularnem, dającem się porównać ze wzburzeniem cząsteczek ciała ciepłego. Z drugiej strony elektrony mogą być wprawione w ruch, lub ruch ich może być zmodyfikowany przez siły elektryczne, istniejące w wiązce promieni, które na nie uderzają; wiązka ta ustąpi im pewnej ilości energii i ta będzie mogła przybrać postać, którą nazywamy ciepłem. Oto jest pochłanianie.

Rozumiecie wszakże, że nie można się na tem zatrzymać, i że Teorya kinetyczna powinna postawić sobie pytanie trudniejsze. Nie wystarcza to, że nam pokaże mechanizm, stanowiący podstawę praw

Digitized by Google

Boltzmanna i Wiena; powinna ona dać nam także poznać formę funkcyi, którą przedstawia rysunek nasz, i znaczenie fizykalne dwóch parametrów, określających wymiary krzywej dla temperatury danej. Za te parametry można przyjąć, z jednej strony, pole całkowite, t. j. całkowitą emisyę ciała czarnego, z drugiej strony długość fali λ_m, przedstawioną przez odcinek OD, dla którego emisya jest najmocniejsza.

Pytanie to czyni szczególnie interesującem ta okoliczność, że oba parametry powinny być niezależne od specyalnych własności ciał. Weźmy ciało jakiekolwiek: kawałek metalu lub kryształ kwarcu. Gdybyśmy znali jego budowę i umieli poradzić sobie ze wszystkiemi trudnościami matematycznemi, bylibyśmy w stanie obliczyć emisyę E i absorbcyę A dla długości fali i temperatury, dowolnie obranych. Wyniki zależałyby od własności rozważanego ciała: nie byłyby jednakowe dla metalu i dla kwarcu. Tymczasem wartość stosunku $\frac{E}{A}$, który znaleźliśmy dla obu ciał, byłyby te same, o czem wątpić nie można.

Otóż, ponieważ jedna z tych wartości jest określona przez własności metalu, druga przez własności kwarcu, obie substancye różne muszą mieć koniecznie coś wspólnego. Należy do Teoryi kinetycznej wykrycie tego, na czem ta wspólność polega.

Winienem wspomnieć tu o bardzo ważnej teoryi promieniowania, podanej przez Plancka[1]. Ten uczony znalazł wzór na rozmieszczenie energii w widmie ciała czarnego, zgadzający się zadawalająco ze spostrzeżeniami. Lecz ta teorya zbyt odbiega od zakresu naszego wykładu, abym się mógł nad nią zatrzymać.

Teorya kinetyczna uczyniła dopiero pierwszy krok ku rozwiązaniu naszego zagadnienia. Opierając się[2] na pojęciach podstawowych teoryi elektronów i na zasadach, któremi już się posługiwaliśmy, gdy była mowa o termoelektryczności, obliczyłem zdolność emisyjną i zdol-

---

[1]) Planck. Ueber irreversible Strahlungvorgänge Ann. d. Physik 1 s. 63: 1900;; Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum (tamże 4, s. 553; 1901): Ueber die Elementarquanta der Materie und der Elektricität (tamże 4, s. 564; 1901).

[2]) Lorentz. On the emission and absorption by metals of rays of heat of great wave-lengths (Proceedings Acad. of Sc. Amsterdam, s. 666; 1902—3)

Digitized by Google

absorbcyjną cienkiej płytki metalowej, zakładając, że kierunek promieni jest do płytki prostopadły, lecz mogłem wykonać te rachunki tylko dla bardzo wielkich długości fali. Znalazłem następujące wyrażenia: na zdolność emisyjną.

$$E = \frac{4\pi c^2}{3\lambda^4} N\mathfrak{e}^2 l \Delta,$$

na zdolność pochłaniania;

$$A = \frac{\pi c}{aT} N\mathfrak{e}^2 u l \Delta.$$

We wzorach tych $\mathfrak{e}$ jest ładunkiem elektronów, wyrażonym w jednostkach elektromagnetycznych, N liczbą elektronów na jednostkę objętości, l długością średnią odległości, na której przesuwają się one pomiędzy dwoma kolejnemi spotkaniami z atomami metalu, u - prędkością średnią ich ruchu cieplnego, c--prędkością światła w eterze, Δ—grubością płytki. Podobnie jak we wzorach poprzednich, T oznacza temperaturę bezwzględną, a--stałą powszechną, którą już napotykaliśmy.

Otóż, jeżeli pierwsze wyrażenie podzielimy przez drugie, wielkości N, l i Δ, zmieniające się od jednej płytki metalu do drugiej, znikną i na stosunek $\frac{E}{A}$, mający być równy zdolności emisyjnej ciała czarnego, otrzymamy wartość:

$$E_n = \frac{E}{A} = \frac{4}{3} \frac{caT}{\lambda^4}.$$

Jest ona niezależna od własności specyalnych ciała, jak tego wymaga prawo Kirchhoffa. Równocześnie znaleźliśmy formę funkcyi E_n, lecz nie należy zapomnieć o tem, że w ten sposób można wyznaczyć tylko część krańcową po prawej stronie krzywej.

Szczęśliwym zbiegiem okoliczności, wynik ten zgadza się z wzorem Plancka i — co szczególnie zasługuje na uwagę — z prawem Wiena. Jeżeli zastąpicie T przez T' i pomnożycie równocześnie λ przez $\frac{T}{T'}$, znajdziecie E_n pomnożone przez $\frac{T'^5}{T^5}$

Digitized by Google

Inny dowód na to, że ta teorya i teorya Plancka są na dobrej drodze, daje nam wartość wielkości α, którą można stąd otrzymać, porównawszy ją z pomiarami emisyi ciał czarnych, albo raczej z tem, co z tej wartości wyprowadzamy. Po wyznaczeniu spółczynnika α znamy wartość bezwzględną energii kinetycznej średniej, jaka posiada cząsteczka gazowa w danej temperaturze. Następnie, ponieważ energia całkowita cząsteczek gazu daje się wyprowadzić z ciśnienia, można będzie obliczyć kolejno liczbę cząsteczek i masę każdej z nich, i wreszcie, kombinując wyniki z równoważnikiem elektrochemicznym wodoru, ładunek jonu tego ciała w jednostkach bezwzględnych. Według nowych poglądów, wartość tego ładunku jest równocześnie wartością ładunku elektronu.

Nie będę przytaczał tych rachunków, wykonanych przez Plancka. Wystarczy wspomnieć, że na masę atomu wodoru znajdujemy:

$$1{,}3 \times 10^{-24} \text{ gramów},$$

a na ładunek jonu tego ciała:

$$1{,}3 \times 10^{-20} \text{ jednostek elektromagnętycznych.}$$

Pierwszy wynik można porównać z liczbą 10^{-24}, podaną przez van der Waalsa w r. 1873, drugi z wartością, wynikającą z badań J. J. Thomsona nad ładunkiem jonu gazowego. W ostatnich swych pomiarach z r. 1903 fizyk ten znalazł, że ładunek ten wyraża się liczbą $3{,}4 \times 10^{-10}$ w jednostkach elektrostatycznych, lub liczbą $1{,}1 \times 10^{-20}$ w jednostkach elektromagnetycznych. Zgodność, jak widzicie, jest zupełnie zadawalająca.

Nie można niestety powiedzieć o tej teoryi promieniowania, że tylko początek jest trudny. To, co pozostaje do zrobienia, jest o wiele trudniejsze. Wypływa z poprzedzającego, że energia cząsteczek przedstawiona w naszych wzorach przez stałą powszechną α. określa jeden z dwóch parametrów naszej krzywej; lecz było dla mnie nie możliwem wynalezienie wielkości, wyznaczającej drugi parametr, t. j. wartość długości fali λ_m. Prawdopodobnie zależy ona od własności elektronów i te to mianowicie własności stanowią podstawę jedności ciał najróżnorodniejszych w tych pytaniach o promieniowaniu. Lecz należy

Digitized by Google

wyznać, że nic prawie o nich nie wiemy; jest nawet niemożliwem dziś wyjaśnić należycie, dlaczego ogrzewając ciało, przesuwamy promieniowanie ku stronie małych długości fali, albo—mówiąc prościej—dlaczego ciała stają się świecącemi w pewnej temperaturze.

Zakończę wykład pewną dedukcyą teoretyczną, która zdaje mi się zasługiwać na uwagę. W pewnych przypadkach—a jest ich bardzo wiele—gdy niepodobna zbadać całkowicie mechanizmu zjawiska, można często, dla wykrycia przynajmniej czegokolwiek, korzystać ze środka sztucznego, polegającego na porównaniu dwóch układów podobnych. Rozumiem przez to, że wartości wielkości geometrycznych lub fizycznych w pierwszym układzie różnią się od odpowiednich wartości w drugim tylko czynnikiem, jednakowym dla wszystkich wielkości tego samego gatunku, np. dla wszystkich długości, dla wszystkich prędkości, dla wszystkich mas i t. d., lecz który może zmieniać się od jednego gatunku do drugiego.

Posługując się tą metodą, można dowieść twierdzenia następującego: jeżeli ciało ważkie M o temperaturze T, otoczone ze wszystkich stron ścianami doskonale odbijającemi, wytwarza w eterze wewnątrz tych ścian promieniowanie, dla którego gęstość energii ma pewną wartość A, można zawsze pomyśleć drugie ciało M', którego cząsteczki mają tę samą siłę żywą średnią i które mimo to wytwarza w eterze gęstość energii, będącą jedną ósmą gęstości A. Dość w tym celu podwoić wszystkie wymiary liniowe, średnice cząsteczek, atomów i elektronów, oraz ich odległości wzajemne, nie zmieniając mas i zwiększając równocześnie ładunki elektryczne w stosunku $1:\sqrt{2}$.

Jeżeli nie obchodzą nas elektrony i promienie przez nie wysyłane, t. j. gdy nie przekraczamy zwykłych teoryj cząsteczkowych, nie ma żadnego powodu przypuszczać, że drugie ciało M' mogłoby nie istnieć. Lecz w teoryi, która nas obecnie zajmuje, tak nie jest; niepodobna, aby oba ciała miały równocześnie istnienie realne.

W rzeczy samej, te dwa ciała miałyby tę samą temperaturę, ponieważ energia ich cząsteczek jest jednakowa. Zachodziłaby zatem sprzeczność pomiędzy prawem, tak gruntownie uzasadnionem przez

---

[1]) Lorentz. The theory df radiation and the second law of Thermodynamics (Proceedings Acad. of Sc. Amsterdam. s. 435; 1900—1901).

Digitized by Google

Kirchhoffa, a tym faktem, że gęstość energii w eterze byłaby różna w obu przypadkach. Prawdopodobnie, powodu, dla którego ciał M i M' nie mogą istnieć oba jednocześnie, należy szukać w tożsamości elektronów, istniejących we wszelkiej materyi ważkiej, znajdującej się w naturze; jeżeli zniesiemy tę tożsamość, zbudujemy ciała fikcyjne, nie znajdujące się w naturze i nie dające się nigdy zrealizować.

Wniosek, który wydobyliśmy z rozważania układów podobnych, wywołuje ostatnią uwagę o drugiem prawie Termodynamiki. Rozważając teorye cząsteczkowe zwykłe, mieliśmy wrażenie, że to prawo stosuje się do wszelkich układów bez żadnego wyjątku. Potem w dyskusyi zjawisk termoelektrycznych znaleźliśmy, że może być ono stosowane nawet w przypadku, kiedy nie mieliśmy prawa tego oczekiwać. Teraz, przeciwnie, zjawiska promieniowania wykazały, że zasada Carnota-Clausiusa nie może być prawdziwa dla wszystkich, dających się pomyśleć, układów; mogła ona utrzymać się tylko wtedy, gdyby dwa ciała, które nazwałem M i M', istniały równocześnie.

Widzicie tedy z wszystkiego, że nieco uważniejsze badanie teoryj nasuwa nam pytania, mające dla nas wielką wagę, jeżeli chcemy poznać istotę praw, które stosujemy, i granice ich stosowalności. Miejmy nadzieję, że matematyk, który odpowie na te pytania, nie da zbyt długo czekać na siebie.

Digitized by Google

Digitized by Google

Obserwatoryum astronomiczne im. Jędrzejewicza

rok 1904 i 1905.

W ciągu ostatnich dwóch lat znacznie się pogorszyły warunki istnienia naszego Obserwatoryum z przyczyny nowo wzniesionych budowli na placach, sąsiadujących z ogrodem Szkoły Technicznej Wawelberga i Rotwanda. Od strony północnej, w odległości kilkunastu metrów, wzniesiono szereg 5-cio piętrowych kamienic, zasłaniając kilka użytecznych gwiazd około-biegunowych, jakkolwiek α Urs. min. pozostaje nadal widzialna. Gorsze są jeszcze warunki na stronie wschodniej, gdzie podobnie wysoki gmach zakrył tę stronę nieba, a na południo-wschodzie na wiosnę stanie nowa kamienica. W tych warunkach gwiazd przy kącie godzinnym —6^h dostrzedz nie można i wyznaczenie spółrzędnych refraktorów jest bardzo utrudnione; obserwacye komet są możliwe tylko w wyjątkowo dogodnych warunkach widzialności i przez czas krótki. Wśród tej zbitej masy murów, zwłaszcza w porze letniej, z przyczyny wypromieniowania ciepła wytwarzają się w ciągu nocy wstępujące prądy powietrza mącąc obrazy; w upalne wieczory drżenie gwiazd jest nader wyraźne. Już obecnie silne światło lamp Auera osobliwie z wieczora, gdy sklepy są otwarte, psuje tło nieba; i pod tym względem tylko pogorszenia oczekiwać można, skoro wprowadzone będzie światło elektryczne.

Mamy nadzieję wszelako, że swobodniejsze w blizkiej przyszłości warunki pracy naukowej odbiją się korzystnie i na losach naszej pracowni, że znajdzie ona odpowiedniejsze pomieszczenie, rozszerzając zakres swej działalności tak, aby zasób narzędzi i ich rodzaj odpowiednio do współczesnych wymagań mógł być wyzyskany.

Digitized by Google

Zajęcia w ciągu r. 1904 mogły się odbywać normalnie, jak w latach poprzednich; w ciągu zaś r. 1905 tylko dorywczo, dla braku nieodzownego przy pracy obserwacyjnej spokoju.

Refraktor Steinheila z mikrometrem nitkowym używany był przeważnie do obserwowania komety I 1904, peryodycznej Enckego i komety I 1905.

Kometa 1904 I mogła być obserwowana przez czas dłuższy, dla jej wyjątkowo powolnego ruchu, a mianowicie w ciągu lipca, sierpnia i września; ostatni raz widzialna była z wieczora o zmroku d. 30 września na krótko, poczem już ją zakryły otaczające budowle.

Kometę Enckego po raz pierwszy spostrzegłem d. 11 listopada 1904 r. w postaci bardzo słabo świecącej, bezkształtnej masy, nie nadającej się do pomiarów; następnie obserwowana była d. 1 i 2 grudnia 1904 r., gdy zaś jej blask wzrósł, przestała być widzialna dla naszego narzędzia. Interesującą, gdyż jak się okazało później, peryodyczną kometę 1905 I na życzenie p. T. Banachiewicza obserwowałem kilkakrotnie w pierwsze dni po odkryciu, aby dostarczyć potrzebnych mu miejsc do obliczenia efemerydy, ogłoszonej w „Astronomische Nachrichten“ № 4011. Wyjątkowo nikła, bez śladów większego skupienia materyi, kometa znikała w polu widzenia przy najsłabszem oświetleniu nitek mikrometru, i pomiar z dnia 1 i 9 kwietnia 1905 r. był niepewny, jakkolwiek wystarczający do przybliżonego rachunku.

Fotometrem klinowym systemu Pritcharda, w połączeniu z refraktorem Cooke'a, zajmowałem się w ciągu okresu sprawozdawczego w celu zastosowania tego narzędzia do pomiarów blasku mgławic. Jak wiadomo, jest to sprawa dotąd nieledwie nietknięta, jeżeli nieliczyć próbnych pomiarów, przytoczonych przez G. Müllera, w „Die Photometrie der Gestirne“ str. 419—422. W ścisłym związku z pytaniem poprzedniem pozostaje sprawa pomiarów blasku komet.

Liczba mgławic, dogodnych do pomiarów fotometrycznych, niewiele przenosi 150, lecz i te, zależnie od swej budowy, rozdzielić należy na 4 grupy: mgławice bez jądra, mgławice z silnem skupieniem materyi w postaci jądra, planetarne i grupy kuliste, właściwie zbiorowiska gwiazd w części środkowej nierozwiązalne. Najważniejsze są tylko pierwsze dwie grupy, najliczniejsze mgławice w ścisłem znaczeniu.

Digitized by Google

O naszym fotometrze klinowym wspominałem szczegółowo w Sprawozdaniu Obserwatoryum za r. 1900 (Wiad. matem. t. V, str. 227—229) z tytułu pomiarów blasku Nowej w Perseuszu. Pomimo wad narzędzia, z których ważniejsze dają się usunąć przy zastosowaniu odpowiedniej ostrożności, fotometr klinowy do tu poruszonych pytań wydaje się jako najodpowiedniejszy, jak to zaznacza Müller (l. c. p. 422). Należy atoli pamiętać o trudnościach, z jakiemi są połączone pomiary fotometryczne ciał niebieskich, które nie są punktami świecącemi, t. j. gwiazdami, o ścisłej zależności wyników od średnicy objektywu refraktora i użytego powiększenia, a nawet wielkości źrenicy obserwatora. Tylko przy pewnych ograniczeniach pomiary takie mogą być porównywalne.

Moje próbne pomiary fotometryczne ograniczały się do wyznaczenia różnicy blasku powierzchni w jednostkach skali fotometru mgławic dość blizkich, aby wpływ extynkcyi był nieznaczny. Gwiaździste jądra mgławic były porównywane z poblizkiemi gwiazdami.

Wyniki pomiarów wypadły zachęcająco, lecz nasz fotometr, przeznaczony do gwiazd znacznej wielkości, przy względnie wielkiej stałej równej mag. 0.20, niedość się nadaje. Jest przytem dawnej konstrukcyi, tak dalece niedogodnej dla obserwatora, że dłuższa systematyczna praca jest odstręczająca. Zdanie to jest powszechne (Müller l. c. p. 184). Niedrogi i nader dogodny fotometr klinowy, połączony z przyrządem samopiszącym, przygotował mechanik Töpfer w Potsdamie. Nabycie tego narzędzia byłoby dla Obserwatoryum wysoce pożądane, zważywszy niewielkie rozmiary naszych refraktorów, które przedewszystkiem w połączeniu z fotometrami winny być używane. Wprawdzie dziś w powszechniejszem użyciu jest fotometr Zöllnera, lecz i klinowy znajduje coraz szersze koło zwolenników; do pomiarów zaś blasku komet w ostatnich latach użyty, dał interesujące wyniki.

Od r. 1870 Lohse (Bothkamper Beobachtungen, II zeszyt) zapoczątkował systematyczne obserwacye zmian na powierzchni Jowisza i przypuszczał możliwość, że zmiany te pozostają w związku ze zmienną działalnością słońca. To samo pytanie poruszył niedawno p. Hansky. Od czasów Lohsego do dziś posiadamy liczne, często równoległe szeregi obserwacyj, i ponieważ ta sprawa interesuje mnie wyjątkowo, od r. 1903 zacząłem systematyczne spostrzeżenia, tem wię-

Digitized by Google

cej, że już od r. 1901 mam nieco materyałów, popartych rysunkami. Zmiany na tarczy Jowisza, rozpatrywane przez wielkie współczesne refraktory, zachodzą z dnia na dzień, pomimo to daje się wydzielić ogólny obraz tarczy, stan średni niejako, obdarzony znaczną stałością, podległy zmianom powolnym z roku na rok. Tarcza planety widzialna przez nasze małe narzędzia, przy niewielkiem powiększeniu, około 100—150, daje obraz najwięcej zbliżony do typowego przebiegu średniego. Zamierzając rozpatrzyć krytycznie dotychczasowy materyał za całe 35-lecie, musiałem z charakterem zmian zapoznać się na zasadzie własnej obserwacyi.

Niewielką liczbę pomiarów mikrometrycznych mgławic wykonałem w pierwszej połowie 1904 r.; pogodne bezksiężycowe noce z drugiej połowy zajęła mi kometa 1904 I; w ciągu r. 1905 mikrometrycznie mgławic nie obserwowałem.

Podobnie jak w r. 1903 możliwie często oglądałem zjawiska na powierzchni słońca przy pomocy spektroskopu uniwersalnego Browninga i helioskopu Merza.

Częściowe zaćmienie słońca z d. 30 sierpnia 1905 r. z przyczyny zachmurzonego nieba nie dało się obserwować.

W tomie XVI „Prac matematyczno-fizycznych“ podałem pracę p. t. „Wpływ zmiennej działalności słońca na nieokresowe ruchy atmosfery ziemskiej i temperaturę powietrza w strefie pozarównikowej.

Biblioteka Obserwatoryum powiększyła się o tytułów 41, licząc w d. 1 stycznia 1906 r. tytułów 381.

Digitized by Google

OBSERWACYE.

Kometa 1904. I. Refraktor Steinheila; mikrometr nitkowy, powiększenie 100.

1904	Czas sr. Warszaw.	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	liczba porów.	α app.	log p. Δ	δ app.	log p. Δ	Red ad l. app.	* po równ.
13. VII	$11^h36^m14^s$	—	$-46''.4$	7	—	—	$+50^\circ 50' 00''.7$	0.569	$+8''.3$	1
13. VII	11 49 52	$+51^s 59$	—	7	$12^h25^m14^s.25$	9.746	—	—	$+0^s.16$	1
14. VII	10 53 14	—	$-4' 38''2$	5	—	—	$+50^\circ 30' 03''.4$	0.619	$+8''.3$	2
14. VII	11 20 22	$+2^m 5^s.91$	—	14	$12^h24^m29^s.84$	9.752	—	—	$+0^s 14$	2
16. VII	11 45 25	—	$+6' 32''.5$	10	—	—	$+50^\circ 16' 37''.0$	0.527	$+7''.9$	3
16 VII	12 22 58	$-59^s.95$	—	10	$12^h 3^m05^s.64$	9.711	—	—	$+0''.11$	3
17. VII	12 27 42	$-1^m35^s.44$	—	10	$12^h22^m27^s.12$	9.690	—	—	$+0^s.08$	3
17. VII	13 5 39	—	$-5' 6''.1$	8	—	—	$+50^\circ 4' 58''.2$	0.287	$+7^s.7$	3
18. VII	12 16 10	$+41^s.20$	—	14	$12^h21^m52^s.12$	9.705	—	—	$+0''.08$	4
18. VII	12 33 12	—	$-3' 37''.3$	6	—	—	$+49^\circ 54' 24''.1$	0.388	$+7^s.6$	4
3. VIII	10 7 38	—	$+6' 17''.1$	8	—	—	$+47^\circ 17' 51''.5$	0.604	$+5''.2$	5
3. VIII	10 24 30	$-14^s.13$	—	8	$12^h16^m21^s.12$	9.712	—	—	$-0^s.13$	5

Digitized by Google

4. VIII	10 5 48	—	+29″.6	10	—	--	+47° 8′ —	0.598	+5″. 0	6
4. VIII	10 23 20	+10ˢ.32	—	10	12ᵍ16ᵐ11ˢ —	9.709	--	—	- 0ˢ.12	6
12. VIII	9 41 51	—31ˢ.81	--	10	12ᵍ15ᵐ47ˢ.13	9.705	—	—	−0ˢ.20	7
12. VIII	10 9 32	—	—4″.5	6	—	—	+46° 2′ 51″.5	0.572	+3″.7	7
19. VIII	9 16 10	—	+1′ 35″.3	10	—	—	+45° 12′ 18″.6	0.606	+2″.4	8
19. VIII	9 29 48	+20ˢ.14	—	15	12ᵍ16ᵐ14ˢ.65	9.688	—	—	- 0″.24	8
6. IX	8 34 45	—	−3′ 57″ 2	6	—	—	+43° 33′ 14″.2	0.579	- 1″.0	9
6. IX	8 55 20	+12ˢ.25	—	6	12ᵍ19ᵐ53ˢ.11	9.656	—	—	- 0ˢ.31	9
7. IX	8 14 47	—	+6′ 7″.0	7	—	—	+43° 29′ 13″.9	0.598	1″.4	10
7. IX	8 31 34	−5ˢ.43	—	5	12ᵍ20ᵐ 9ˢ.18	9.671	—	—	- 0ˢ.31	10
8. IX	8 20 39	+11ˢ.41	—	6	12ᵍ20ᵐ26ˢ.03	9.675	—	0.556	−0ˢ.31	10
8. IX	8 38 36	—	+2′ 1″ 6	8	—	—	+43° 25′ 08″.4	—	-- 1″.5	10

Digitized by Google

Gwiazdy porównywane.

№	α 1904.0	δ 1904.0	
1	$12^g 24^m 22^s.50$	$+50^0 50' 39''.0$	AG. Lund 4085.
2	$12^g 22^m 23^s.79$	$+50^0 43' 33''.0$	$-9^m.5$ połączona z AG. Harv. 4070 $+8^s.14$ $-3' 6''.6$
3	$12^g 24^m 2^s.48$	$+50^0 9' 56''.6$	AG. Harv 4083.
4	$12^g 21^m 10^s.84$	$+49^0 57' 53''.8$	AG. Harv. 4072.
5	$12^g 16^m 35^s.37$	$+47^0 11' 29''.2$	DM. + 47.1953. W. Wirtz. Astr. Nach. 3996
6	$12^g 16^m 1^s.$ —	$+47^0 8'$ —	DM. + 47.1952.
7	$12^g 16^m 19^s.14$	$+46^0 2' 52''.3$	AG. Bonn 8460.
8	$12^g 15^m 54^s.75$	$+45^0 10' 40''.9$	DM. + 44.2[illegible]27 W. Wirtz. Astr. Nach. 3996
9	$12^g 19^m 41^s.17$	$+43^0 37' 12''.4$	AG. Bonn 8488.
10	$12^g 20^m 14^s.93$	$+43^0 23' 08''.3$	AG. Bonn 849[illegible].

Digitized by Google

D. 13.VII. Jądro = * 10^m otoczone słabą mgłą, tworzącą głowę komety; warkocza niema: powietrze dobre.

D. 14.VII. Dość jasna, okrągła, znaczne skupienie w części środkowej; jądro = * $11^m.5$; koncentracya materyi bardzo silna, sprawia wrażenie gwiazdy, pokrytej materyą komety. Gwiazdy porównywanej $9^m.5$ niema w DM, wyznaczyłem jej położenie, połączywszy z AG. Harv. 4078.

D. 18.VII. Kometa jaśniejsza niż wczoraj, wydłużona, jądro gwiaździste = * $11^m.5$.

D. 12.VIII. Słabe jądro = * 12^m; wydłużona.

D. 19.VIII. Słaba plamka z jądrem; powietrze bardzo dobre, lecz blask księżyca przeszkadza.

D. 1.IX. Jądro = * 11^m otoczone słabą mgłą; dość jasna.

D. 6.IX, W pobliżu komety znajduje się * 11^m i przeszkadza punktacyi.

D. 30.IX. Kometa dość jasna i łatwo mogłaby być obserwowana, lecz kryje się za otaczającemi budowlami.

Warszawa, w lutym 1906 r.

R. Merecki.

Digitized by Google

Stacya Centralna Meteorologiczna

PRZY MUZEUM PRZEMYSŁU I ROLNICTWA

w Warszawie, rok 1905.

Wzorem lat ubiegłych [1]) w niniejszem czwartem sprawozdaniu podane są wiadomości o stanie Sieci meteorologicznej warszawskiej, oraz o działalności Stacyi Centralnej przy Muzeum w Warszawie w roku 1905. Działalność ta przedstawia ciąg dalszy prac, podjętych w okresach poprzedzających, i zobrazowana została w związku z temi ostatniemi.

a) Skład osobisty, posiedzenia, udział Towarzystw przemysłowych i fabryk cukru.

W porównaniu z r. 1904, w składzie Komisyi oraz Zarządu, kierownictwa i personelu Stacyi Centralnej zaszły następujące zmiany: 1-o, wskutek wyjazdu p. W. Gorczyńskiego (w celach naukowych), obowiązki jego jako członka Komisyi, członka Zarządu i współkierownika Stacyi, pełnił zastępczo od lipca 1905 r. p. St. Boufałł; 2-o, obserwatora p. E. Sopoćkę zastępował p. W. Perkowski.

W ten sposób w r. 1905 skład osobisty Komisyi i Zarządu oraz kierownictwa i personelu Stacyi Centralnej przedstawiał się jak następuje:

---

[1]) Por. „Stacya Centralna Meteorologiczna“ w Warszawie, rok 1904. Odbitka z „Wiadomości Matematycznych“ t. IX, 1905.

Digitized by Google

1) Członkowie „Stałej Komisyi Meteorologicznej przy Sekcyi VI Cukrowniczej“: W. Brygiewicz, S. Dickstein (przewodniczący Komisyi), Wł. Gorczyński, W. Karpiński, J. Leski, A. Machczyński, R. Merecki, T. Rutkowski, M. Wortman, S. Wroński i od lipca S. Bouffałł.

2) Zarząd Sieci meteorologicznej i Stacyi Centralnej stanowili trzej członkowie Komisyi, a mianowicie: S. Dickstein, R. Merecki i Wł. Gorczyński, pod przewodnictwem S. Dicksteina, i od lipca S. Bouffałł.

3) Kierownicy Stacyi Centralnej: R. Merecki, Wł. Gorczyński i od lipca S. Bouffałł. Obserwatorzy Stacyi Centralnej: do lipca E. Sopoćko, od lipca W. Perkowski. Sekretarka i obserwatorka J. Śmigielska. Buchalter R. Mejer.

Komisya Stała odbyła w roku 1905 dwa posiedzenia: w dniu 22 stycznia i 6 czerwca w lokalu Tow. pop. przemysłu i handlu. Posiedzenia Komisyi odbywały się przed każdorazowemi zebraniami ogólnemi Członków Sekcyi Cukrowniczej, przyczem omawiano sprawy budżetowe i przygotowano na zasadzie wykazów kierowników Stacyi sprawozdanie z działalności Sieci, na zasadzie zaś wykazów buchaltera stan rachunków i bilans Stacyi Centralnej za r. 1904. Sprawozdanie to wraz z wykazem rachunkowym zostało przedstawione i odczytane na zebraniu ogólnem Sekcyi Cukrowniczej w dniu 1 lipca 1905 roku i ogłoszone drukiem w № 40 „Gazety Cukrowniczej“.

Prócz spraw administracyjnych i budżetowych, zajmowano się na posiedzeniach Komisyi kwestyami: rozszerzenia liczby stacyj prowincyonalnych Sieci warszawskiej, inspekcyi tych stacyj przez delegatów Stacyi Centralnej, oraz drukowania spostrzeżeń w „Pamiętniku Fizyograficznym“. Na posiedzeniu z d. 18 czerwca 1905 r. załatwiono pomyślnie sprawę przygotowania przez Zarząd Stacyi popularnego podręcznika z dziedziny Meteorologii — sprawę, którą jeszcze w styczniu r. 1904 zainicyował był członek Komisyi S. Wroński. Wybór Zarządu padł na dziełko Webera p. t. „Wind. und Wetter“, przedstawione przez S. Dicksteina. Przekład tego dziełka, uzupełniony zarysem Meteorologii rolniczej (według książki Houdaille'a) oraz obrazem klimatu Polski, oryginalnie skreślonym przez członka Zarządu, R. Mereckiego, złożony został w końcu roku w redakcyi „Gazety Rolniczej“. W myśl umowy, zawartej z S. Wrońskim,

Digitized by Google

redaktorem tego pisma i członkiem Komisyi, 300 egzemplarzy dziełka, którego druk już się rozpoczął, stanowić będzie własność Stacyi, która roześle je wszystkim obserwatorom Sieci.

Prócz posiedzeń Komisyi, odbyły się w dniu 6 i 21 kwietnia, oraz w dniu 31 grudnia posiedzenia Zarządu Stacyi Centralnej.

W r. 1905 składkę wpłaciły następujące stacye: Nałęczów, Młodzieszyn, Krasiniec, Tow. Rolnicze Płockie, Szepetówka, Silniczka, Sieniawa, Leśmierz, Łubna, Czersk, Michałów, Ostrowy, Uładówka, Ciechanów, Rytwiany, Sanniki, Kożanka, Szamrajówka, Saliwonki, Olszana, Sobieszyn, Józefów, Brześć Kujawski. Nadto na prośbę Komisyi Meteorologicznej i przy poparciu Zarządu Sekcyi Cukrowniczej przyznane zostało Stacyi Centralnej subsydyum od Rady Tow. popr. przem. i handlu w Warszawie. Szczegółowy wykaz wszystkich składek podany Komisyi w bilansie buchaltera, przedstawiany jest na czerwcowych obradach ogólnych Sekcyi Cukrowniczej warszawskiej.

b) Sieć stacyj meteorologicznych.

Liczba czynnych stacyj meteorologicznych wynosiła w 1905 roku 62.

Sieć warszawska przedstawia się w okresie sprawozdawczym jak następuje:

a) Stacye miejskie: Warszawa (Stacya przy Muzeum), Warszawa (punkt obserwacyjny przy stacyi filtrów).

b) Przy fabrykach cukru: Berszada (podolska), Brześć Kujawski (warszawska), Czersk (warszawska), Częstocice (radomska), Izabelin (płocka), Krasiniec (płocka), Kremieńczuki (wołyńska), Leśmierz (kaliska), Łanięta (warszawska), Michałów (warszawska), Młodzieszyn (warszawska), Model (warszawska), Klemensów (lubelska), Olchowiec (kijowska), Olszana (kijowska), Ostrowy (warszawska), Plisków-Andruszówka (kijowska), Rytwiany (radomska), Saliwonki (kijowska), Sieniawa (kijowska), Silniczka (piotrkowska), Sójki (warszawska), Szamrajówka (kijowska), Szpanów (wołyńska), Trawniki (lubelska). Uładówka (podolska). Ogółem stacyj przy fabrykach cukru 26.

Digitized by Google

c) Przy stacyach rolniczych doświadczalnych i hodowli nasion: Baranówka (podolska), Chruszczewo-Ciechanów (płocka), Jeżówka (warszawska), Kazimierz n./W. (lubelska), Kutno rol. (warszawska), Karabczejówka (podolska), Niemiercze (podolska), Płock (przy Tow. rolniczem), Sobieszyn (siedlecka), Strzelniki (podolska). Ogółem stacyj 10.

d) Ze stacyj kolejowych. Aleksandrów, Częstochowa, Koluszki, Kutno kol., Łazy, Myszków, Piotrków, Noworadomsk. Ruda Guzowska, Skierniewice, Włocławek, Ząbkowice—położonych w okręgu warszawskim i piotrkowskim: do tej liczby zaliczyć należy stacyę w Łodzi, funkcyonującą przy Stacyi Centralnej tamtejszej kolei elektrycznej miejskiej. Ogółem stacyj 13.

e) Przy zakładach leczniczych dwie stacye: Nałęczów (lubelska), Ojców (kielecka).

f) Wreszcie ze stacyj w dobrach i majątkach ziemskich: Bzury (łomżyńska), Drozdowo (łomżyńska), Klimontów (kielecka), Kośmin (warszawska), Majdan Księżpolski (lubelska), Podzamcze (siedlecka) Pohorylce (wołyńska), Sieburczyn (łomżyńska), Wądołki Borowe (łomżyńska). Ogółem stacyj 9.

Co się tyczy rozmieszczenia stacyj meteorologicznych na terytoryum sieci, to rozmieszczenie to jest bardzo niejednostajne, podobnie jak i w latach ubiegłych. Poniżej zestawione są dane, odnoszące się do roku 1905.

gub.	płocka	stacyj	4	gub.	kielecka	stacyj	2
„	warszawska	„	18	„	siedlecka	„	2
„	kaliska	„	1	„	lubelska	„	5
„	piotrkowska	„	9	„	wołyńska	„	3
„	łomżyńska	„	4	„	podolska	„	6
„	radomska	„	2	„	kijowska	„	6

W poniższej tabelce podajemy spis alfabetyczny stacyj każdego rzędu kolejno, z zaznaczeniem nazwisk kierowników i obserwatorów, a także wykazów miesięcznych lub buletynów, nadesłanych Stacyi Centralnej w okresie sprawozdawczym. Położenia geograficzne tych stacyj podane były (w stopniach i ich setnych częściach) w sprawozdaniu Stacyi Centralnej za r. 1903, a także w wydawanych w „Pamiętniku Fizyograficznym“ Spostrzeżeniach meteorologicznych Sieci warszawskiej.

Digitized by Google

№	Nazwa stacyi	Nazwisko obserwatora lub kierownika.	Wykaz nadesłanych spostrzeżeń
	Stacye z narzędziami samopiszącemi.		
1	Warszawa (Muzeum)	Personel Stacyi Centralnej	Spostrz. miesięczne I—XII
2	Łódź	W. Delof urz. kolei elektrycznej	„ „ I—XII (całość)
	Stacye rzędu II		
3	Chruszczewo-Ciechanów	Dr. Ign. Kosiński st. rol. dośw.	„ „ I—XII
4	Czersk	I. Preibisz, chem.-tech. fab. cuk.	„ „ I—VIII
5	Jeżówka	R. Wieszczycki, asyst. st. rol.	„ „ I—V i VII—XII
6	Karabczejówka	E. Ludkiewicz, stac rol. dośw.	„ „ I—XII
7	Klimontów	W. Kobyliński, nauczyciel	„ „ I—XII
8	Nałęczów	Dr. Br. Malewski, Trószyńska i Dr. P. Rudzki.	„ „ I—IV, VIII i X—VIII
9	Niemiercze	J. Wańtuchowski, st. rol. dośw.	„ „ I—XII
10	Ojców	Dr. St. Niedzielski,	„ „ I—V
11	Olszana	F. Wyszyński, chem. fabr. cuk.	„ „ I—XII
12	Ostrowy	W. Księżopolski, w.-dyr. f. c.	„ „ I—X
13	Piotrków	O. Nestorowicz, urzędnik tel.	„ „ I—XII

Digitized by Google

№	Nazwa stacyi	Nazwisko obserwatora lub kierownika	Wykaz nadesłanych spostrzeżeń
14	Płock	B. Bajenkiewicz, Tow. roln.	Spostrz. miesięczne I—XII
15	Saliwonki	F. Witowski, urz. fabr. cukru	„ „ I—XII
16	Silniczka	K. Milde, wicedyr. fabr. cukru	„ „ I—XII
17	Sobieszyn	Dr. Różycki, Dr. F. Grabski, St. Leśniowski, st. dośw.	„ „ I—XII
18	Warszawa (Stacya filtrów)	Cyngeist, J. Trzciński	„ „ I—XII
19	Wądołki Borowe	Fr. Wyszyński, właśc. majątku	„ „ I—XII
20	Włocławek	S. Domański, inż. Dr. Ż. W.-W.	„ „ I—XII
21	Ząbkowice	Fr. Harland, urzęd. telegrafu	„ „ I—XII
	Stacye rzędu III		
22	Aleksandrów	J. Sulimierski, M. Safronienko	„ „ I—XII
23	Berszada	W. Milkiewicz, K. Biernacki	„ „ I—IX
24	Brześć Kujawski	J. Sikorski, gr. dr. urz. f cuk.	„ I—X, bul. I—VI VII—IX
25	Częstocice	F. Nowak, chemik fabr. cukru	Buletyny V (10—30), i IV
26	Częstochowa	I. Skotnicki, urzęd. telegr.	Spostrz. miesięczne I—XII
27	Drozdowo	Koehler, nadleśny w dobrach	„ „ I—XII
28	Koluszki	J. Anczykowski, urz. Dr. Ż. W.-W.	Spostrz. miesięczne I—XII
29	Krasiniec	J. Bonecki, urz. akc. przy f cuk.	Buletyny I—XII

Digitized by Google

30	Kremieńczuki	Kopista Jan, chem. fabr. cukru	Buletyny IV—IX, i spostrzeżenia mies. II VII,
31	Kutno kol.	B. Żakiewicz, techn. Dr. Ż. W.-W.	Spostrz. miesięczne I—XII
32	Kutno rol.	Personel stacyi rolniczej dośw.	„ „ I—XII
33	Klemensów	St. Ilnicki, chem. fabr. cukru	Buletyny X—XII.
34	Leśmierz	T. Kowalski, chem. fabr. cukru	Spostrz. miesięczne VII—IX
35	Łazy	Dębicki, urzęd. Dr. Ż W.-W.	„ „ I—XII
36	Michałów	A. Olszewski, chemik	Buletyny VI (1 - 10)
37	Majdan - Księżpolski	L. Rogowski, zarządz. dobrami	Spostrz. miesięczne XI, XII
38	Młodzieszyn	St. Pacuła, St. Niewiarowicz	„ „ I—XII
39	Myszków	E. Wiciejewski. urzęd. telegr.	„ „ I—XII
40	Noworadomsk	E. Dąbkowski, „ „	„ „ I—XII
41	Olchowiec	Cz. Sankowski, urzęd. fabr. cuk.	Buletyny V (10—20) i VI - IX
42	Pisków - Andruszówka	T. Dobrowolski, urzęd. dóbr	Buletyny I—VII
43	Ruda Guzowska	K. Niemirycz, urzęd. telegr.	Spostrz. miesięczne I—XII
44	Rytwiany	Dr. St. Kugler, chem. fabr. cukru	„ „ IX—XII
45	Sieniawa	J. Majchrowicz, chem. fabr. cuk.	Buletyny VI—IX
46	Skierniewice	A. Szermer, urzędnik telegrafu	Spostrz. miesięczne I - XII
47	Strzelniki	Szafirowicz, stac. rol. dośw.	Buletyny IV - IX (1—20)
48	Szamrajówka	K. Witkowski, buchalter fabryki cukru	Spostrz. mies. I—II, bulet. IV—XII
49	Uładówka	L. Sempołowski, chemik fabryki cukru	Buletyny I— XII
	Stacye rzędu IV (deszczowe)		
50	Bzury	H. Kozłowski, właśc. majątku	Spostrz I—XII

Digitized by Google

№	Nazwisko stacyi	Nazwisko obserwatora lub kierownika	Wykaz nadesłanych spostrzeżeń
51	Baranówka	J. Kotkowski, stacya roln. dośw.	Spostrz. I—XII
52	Kazimierz n./W.	J. Matusiak, ogrodnik stacyi doświadczalnej	Spostrz. I—XII
53	Kośmin	St. Czekanowski, wł. majątku	„ I—XII
54	Izabelin	J. Modzelewski, chem. fab. cuk.	„ I—XII
55	Łanięta	J. Dębicki, chem. fabr cukru	„ I—XII
56	Model	A. Lewartowski, urzędnik fabryki cukru	„ I—V i VII—XII
57	Podzamcze	F. Różyński, zarządz. dobrami	„ I—XII
58	Pohorylce	T. Rzepecka, wieś Pohorylce	„ I—XII
59	Sieburczyn	C. Kuberski, właśc majątku	„ I—XII
60	Sójki	L. Hakowski, urzęd. fabr. cukru	„ V—IX
61	Szpanów	St. Czachórski, chem. fabr. cuk.	Buletyny IV (20—30), V (1—10 i 20—30), VI (1—10 i 20—30), VII (20—30).
62	Trawniki	L. Nieprzecki, urzęd. fab. cuk.	Spostrz. I, II i IV—XII.

Nie nadsyłały w dalszym ciągu swych spostrzeżeń stacye: w Ciechanowie, Gucinie, Łubnie, Oradówce, Sannikach i Szepietówce; przerwały nadsyłanie stacye: w Brzozówce, Józefowie, Kożance, Płońsku, Ruszkowie, Sosnówce i Wytycznie.

Digitized by Google

c) Uwagi o stacyach Sieci warszawskiej oraz ich inspekcya w roku 1905.

W końcu roku 1905 do liczby stacyj rzędu II-go przybyła stacya w Szykszniewie (gub. suwalskiej), wyposażona w przyrządy samopiszące. Założył ją — mówiąc ściśle, stacyę swoją, dawniej już istniejącą, przyłączył do Sieci warszawskiej — właściciel Szykszniewa Aleksander Gromadzki, wypełniając tym sposobem dotkliwą lukę w dotychczasowym rozkładzie punktów obserwacyjnych.

Stacya rzędu II-go przy stacyi doświadczalnej rolniczej w Miłoszewcu (pod kierunkiem d-ra Kosińskiego) przeniesiona została do Chruszczewa pod Ciechanowem, w gub. płockiej.

Do stacyj deszczowych oraz rzędu III-go przybyły: stacya Bzury deszczowa, w majątku Henryka Kozłowskiego w gub. łomżyńskiej; stacya Chmielnik, deszczowa, w majątku Maksymiliana Dobrskiego, w gub. lubelskiej; stacya Orłów Murowany, deszczowa, w gub. lubelskiej, założona z inicyatywy stacyi doświadczalnej rolniczej w Sobieszynie; stacya Majdan Księżpolski, rzędu III-go, w gub. lubelskiej, założona staraniem p. Czarnockiego, plenipotenta dóbr hr. M. Zamoyskiego; stacya Klemensów (przy cukrowni), rzędu III-go, jak wyżej.

Spostrzeżenia, notowane przez przyrządy samopiszące lub heliografy nadsyłały stacye: Łódź, Silniczka, Jeżówka, Strzelniki, Plisków-Andruszówka i Olszana.

Inspekcya w roku sprawozdawczym objęła stacye; w Nałęczowie, Sobieszynie, Łodzi, Lublinie i Karabczejówce, a dokonana została przez Wł. Gorczyńskiego.

Poniżej podane są wyciągi z dziennika inspekcyjnego:

1. Stacya meteorologiczna w Nałęczowie istnieje od r. 1892 przy miejscowym zakładzie leczniczym. Na drugiem piętrze gmachu zakładowego przy oknie, należącem do laboratoryum chemicznego, umieszczona jest budka cynkowa; wzniesienie budki wynosi $8\frac{1}{2}$ metra nad powierzchnią gruntu. Laboratoryum chemiczne nie bywa opalane; temperatura pokoju sąsiadującego z budką spada w porze zimowej tylko rzadko poniżej 5^0 powyżej zera, według słów miejscowych obserwatorów. Od północy niedaleko budynek niewielki, mieszczący ku-

Digitized by Google

chnię jednopiętrową, którą od gmachu zakładowego oddziela nadto mały ogródek z drzewkami.

Barometr (system Fuessa № 271) umieszczony był przy ścianie pokoju laboratoryjnego; poprawka stała, uwzględniana od dłuższego czasu, wynosiła — 0,1 mm. W roku sprawozdawczym, od czasu zawiadomienia Stacyi Centralnej, dołączano do poprawki stałej także i poprawkę na ciężkość (+ 0,4 mm), tak że wspólna poprawka wynosi + 0,3 mm.

W budce znajdowały się w dniu objazdu: termometr suchy (F. N. 573a), nieco zewnętrznie uszkodzony; termometr wilgotny N. 2750 z naczyńkiem, oraz termograf maximum-minimum dawnego systemu Sixa (Cel.), dający wskazania niezupełnie pewne.

Wiatromierz systemu Wilda, umieszczony na dachu budynku zakładowego z osobnem wejściem, w ostatnich czasach nie posiadał deseczki do oceny szybkości wiatru.

Deszczomierz Hellmanna znajdował się na górze w miejscu niezupełnie odpowiedniem.

Z powodu potrzeby zmiany niektórych narzędzi, ze Stacyi Centralnej wysłano w ciągu stycznia 1905r. dla stacyi nałęczowskiej: 2 termometry typu zwykłego do obserwacyj psyhrometrycznych w budce, 1 termometr maximum, 1 termometr minimum, lupę do odczytywań. Nadto dołączono brakującą deseczkę do wiatromierza Wilda i parę deszczomierzy systemu Hellmanna z zwykłą miarką cylindryczną.

Objazd miał miejsce w dniu 1 stycznia 1905 r.; spółrzędne Nałęczowa wynoszą: $\varphi = 51^0 17'$, $\lambda = 22^0 13'$ Gr. Wzniesienie barometru nad poziom morza wynosi 178 m.; liczba ta jest średnią z porównań hypsometrycznych średnich pięcioletnich barometru w Nałęczowie z danemi dla Warszawy, Łowicza, Włocławka, Puław i Brześcia Litewskiego.

Stacya Nałęczowska znajduje się pod starannem kierownictwem Dra B. Malewskiego.

2. Stacya w Sobieszynie zwiedzana była w d. 25 i 26 marca 1905 r. Obserwacye prowadzone były przy miejscowej stacyi rolniczej doświadczalnej; zabudowania tej ostatniej, oraz folwarku Sobieszyn, ugrupowane są w niewielkiej dolinie, kilkanaście metrów poniżej pól przyległych i pola doświadczalnego.

Digitized by Google

Budka cynkowa bez klatki drewnianej przymocowana była na niewielkiej wysokości (2 2 m.) przy budynku mieszkalnym piętrowym (około przedsionka nieopalanego).

W budce znajdowały się termometry: suchy (Fuess N. 379b), zwilgocony (F. N. 379a); poprawki tych termometrów zostały wyznaczone w październiku 1903 r. z okazyi przyjazdu członka Obserwatoryum fizycznego petersb. Stosownie do nadesłanego następnie certyfikatu poprawki wynoszą: dla N. 379b poprawka $-0^0,2$ do $+20^0,5$, $-0^0,1$ od $20^0,6$ do $28^0,0$ i $0^0,0$ od $28^0,1$ do $30^0,0$; dla N. 379a poprawka $-0^0,2$ do $+10^0,5$, $-0^0,1$ od $10^0,6$ do $20^0,0$, $0^0,0$ od $20^0,1$ do $30^0,0$. W skutek nieporozumienia przy stosowaniu tych poprawek, brano zamiast $-0^0,2$ poprawkę $0^0,0$ dla temperatur poniżej zera.

Termometr max.-min. (starej konstrukcyi), niesprawdzony, działał niezadawalająco.

Wzniesienie budki blaszanej nad powierzchnią gruntu 2,3 metra.

Barometr (naczyńkowy, firmy Fuess, system morski N. 1049) z poprawką stałą $+1,0$ mm., wraz z poprawką na ciężkość; poprawka ogólna wynosi $+0,4$ mm. Należy zaznaczyć, że w styczniu i lutym 1905 r. dodawano, wskutek nieporozumienia, poprawkę 1,4 mm. zamiast 0,4 mm. Termometr przy barometrze poprawek nie posiada.

Wiatromierza systemu Wilda stacya sobieszyńska nie posiadała; szybkość wiatru szacowana była na oko, według skali dowolnej 0 – 3,

Deszczomierz systemu Hellmanna umieszczony był na wysokości 1 m. w dostatecznem oddaleniu od gmachów.

Od dnia 1 kwietnia 1905 r. stacya meteorologiczna sobieszyńska przeniesiona została na pole doświadczalne, znajdujące się w odległości około 2 km. od poprzedniego miejsca. Budka blaszana umieszczona została w osobnej klatce drewnianej z żaluzyami według instrukcyi, w miejscowości otwartej koło kilku zabudowań.

Nowe narzędzia, przeznaczone do spostrzeżeń, są następujące:

a) Termometr maximum (M. 7156, OF. 25638) z popr. $0^0,0$.

b) Termometr minimum (M. 7493, OF. 27422) z poprawką $0^0,0$ od $0^0,1$ do $+17^0$ i $+0^0,1$ od $0^0,0$ do $-20^0,0$.

c) Termograf samopiszący systemu Richarda (M. 232); porównania z lipca 1904 w Obs. Fiz. Pet. wykazały poprawki: $-0^0,3$ przy -20^0, $-0^0,1$ przy -10^0, $0^0,0$ przy 0^0, $-0^0,1$ przy $+10^0$, $-0^0,2$ przy $+20^0$.

Digitized by Google

d) Wiatromierz systemu Wilda (M. 34620) z deseczką do oceny szybkości wiatru.

e) Termometr do mierzenia temperatury na powierzchni gruntu (co $0^0,5$). Poprawki tego termometru (M. 8515, OF. 34085) wynoszą: $-0^0,1$ w zakresie skali od $-20^0,0$ do $-5^0,6$ i $0^0,0$ od -5^05, do $+40^0,0$ (wrzesień 1904).

f) Termometr gruntowy na głębokość 10 cm. z podziałką (co $0^0,2$ (M. 8416, OF. 33575). Poprawka wynosi: $0^0,0$ w zakresie skali od $-20^0,0$ do $+30^0,0$ (lipiec, 1904 r.).

g) Termometr gruntowy (M. 8415*, OF. 33574) z podziałką co $0^0,2$ na głęb. 50 cm. Poprawka $0^0,0$ od $-20^0,0$ do $+30^0,0$ (lipiec 1904 r.).

h) Heliograf Campbella z ruchomą podstawą do papierków (według projektu Dra Kosińskiego).

i) Lupa do odczytywań.

Spółrzędne dotychczasowej stacyi sobieszyńskiej wynoszą $\varphi = 51^0 35'$, $\lambda = 22^0 11'$ Gr.

Wzniesienie dotychczasowe (obliczone przy pomocy tablic hypsometrycznych z porównań średnich pięcioletnich barometru z okresu 1896—1900 z Warszawą, Łowiczem, Włocławkiem, Puławami i Brześciem Litewskim) wynosi średnio 129 m. Wzniesienie nowej stacyi na polu doświadczalnem będzie około 20 metrów wyższe, jak to wskazują tymczasowe porównania, dokonane w dniu 26 marca 1905 r. z przeniesieniem barometru rtęciowego.

Stacya meteorologiczna zostaje pod kierunkiem p. Leśniowskiego, obserwacye zaś prowadzi jeden z współpracowników stacyi rolnej, mieszkający na polu doświadczalnem.

2. Stacya w Łodzi, założona w sierpniu 1903 r. przez Zarząd Kolei elektrycznej łódzkiej, odwiedzana była w d. 2 kwietnia 1905 r. Opis tej stacyi, oraz posiadanych przez nią narzędzi, podany został w poprzednich inspekcyach (por. sprawozdanie za r. 1904); co się zaś tyczy tegorocznej, to należy zauważyć, że do 1.IV.1905 nie uwzględniano w barometrze poprawki stałej, która wraz z poprawką na ciężkość (+0,4 mm.) wynosi +0,3 mm. Wraz z wprowadzeniem w użycie tej poprawki, ułożona została pomocnicza tabelka poprawek barometru na temperaturę z dodaniem stałej wartości +0,3 mm. dla barometru łódzkiego.

Digitized by Google

Również do 1.IV.05 od początku istnienia stacyi odczytywano termometry maximum i minimum o 7-ej rano; od tego zaś czasu zalecono wprowadzenie do tych odczytań godz. 9 wieczorem.

Zabrano ze stacyi łódzkiej dla zmiany termometr maximum (M. 7791), w którym według obserwatora rtęć z trudnością się opuszcza w niższych temperaturach.

4. Nowopowstająca stacya meteorologiczna przy fabryce cukru w Lublinie odwiedzana była w dniu 9 lipca 1905 r. dla wyboru miejsca spostrzeżeń i instalacyi narzędzi. Ze względu, że stacya ta w okresie sprawozdawczym znajdowała się w fazie przygotowawczej i nie rozpoczęła stałego nadsyłania spostrzeżeń, podany jest poniżej tylko wykaz posiadanych przez nią narzędzi.

a) Barometr rtęciowy systemu Fortina (działki noniusza co 0,05mm.); poprawka stała przyrządu w porównaniu z barometrem Stacyi Centralnej w Warszawie wynosiła +0,67 mm. Poprawka stała wraz z poprawką na ciężkość (0,4 mm.) oznaczona została na +1,1mm.

b) Budka cynkowa z wentylatorem; do spostrzeżeń psychrometrycznych termometr zw. (M. 7972, OF. 31591) z poprawką $0^0,0$ w zakresie skali od $-20^0,0$ do $+30^0,0$ (luty, 1904 r.); termometr zwilgocony (M. 7971*, OF. 31590) z popr. $0^0.0$ od $-20^0,0$ do $+30^0,0$ (luty, 1904 r.).

Termometr maximum (M. 8140, OF. 32993) z popr. $0^0,0$ w zakresie skali od $-10^0,0$ do $+40^0,0$ (maj, 1904 r.).

Termometr minimum (M. 7491, OF. 27420) z popr. $-0^0,1$ od $+20^0,0$ do $+14^0.1$, $0^0,0$ od $+14^0,0$ do $-3^0,3$ i $+0^0,1$ od $-3^0,4$ (luty, 1904 r.).

1 lupa do odczytywań.

c) Wiatromierz systemu Wilda z deseczką do oceny szybkości wiatru.

d) Para deszczomierzy systemu Hellmanna z miarką cylindryczną.

Nadto polymetr Lambrechta (OF. 35628) kontrolujący oraz termograf i hygrograf samopiszący systemu Richarda.

Spółrzędne miasta Lublina wynoszą: $\varphi = 51^0 15'$, $\lambda = 22^0 35'$ E od Greenwich; wzniesienie średnio koło 200 metrów.

5. Stacya w Karabczejówce mieści się przy gmachu jednopiętrowym laboratoryum selekcyjnego hodowli nasion buraczanych. Teren

Digitized by Google

powierzchni wogóle pagórkowaty, chociaż w najbliższej okolicy niema większych różnic wzniesień.

Według inspekcyi z dnia 12 lipca 1905 r. tamtejsza stacya meteorologiczna posiada następujące narzędzia:

a) Barometr systemu morskiego (Fuess N. 1125) w stanie nieuszkodzonym. Poprawka stała stosowana nie była; od 1. I. 1905 uwzględniano poprawkę na ciężkość + 0,2 mm., wskazaną przez Stacyę Centralną w Warszawie.

b) Budka blaszana umieszczona była koło okna laboratoryjnego od północy; sąsiedni pokój nieopalany, obserwacye dokonywano po przysunięciu budki blizko do okna, odczytywano termometry i barometr bez lupy.

Do pomiarów psychrometrycznych służyły: termometr suchy (F. N. 879) i zwilgocony (F. N. 880). Termometr maximum (F. N. 2531) i minimum (F. N. 3735). W wartościach, odczytywanych na termometrach, nie stosowano poprawek.

c) Wiatromierz systemu Wilda umieszczony na wysokim słupie ponad dachem laboratoryjnym. W dniu 12 lipca deseczka była nieco skrzywiona, co, według słów obecnego obserwatora p. Ludkiewicza, zauważono już od sierpnia 1903 roku. W ocenie prędkości wiatru według porządku sztyftów położenie pionowe uważano za sztyft 0 i oceniano następne odchylenia o jeden numer za nizko; stosuje się do spostrzeżeń, dokonanych w czasie od 1 kwietnia do 13 lipca 1905 roku. Kierunek N w wiatromierzu nie był zmieniany w czasach ostatnich.

d) Deszczomierz umieszczony w odległości kilkunastu metrów od laboratoryum w kierunku ku północy, na pólku obsianem. Wzniesienie nad powierzchnią gruntu półtora metra. Drugi egzemplarz był nieco uszkodzony w części zewnętrznej.

Stacya znajduje się pod kierunkiem zarządzającego laboratoryum selekcyjnem p. Ludkiewicza, któremu w spostrzeżeniach pomagają praktykanci.

Digitized by Google

d) Stacya Centralna w Warszawie.

1. *Przyrządy i obserwacye.*

Spostrzeżenia terminowe nad stanem ciśnienia (o 7 rano, 1 pop. i 9 wiecz. prowadzone z pomocą barometru rtęciowego, kontrolującego (Fuess N. 226), którego poprawka stała, wyznaczona w kwietniu 1904 roku, wynosiła — 0,07 mm. Barometr ten systemu Wilda-Fuessa, posiada noniusz, podzielony na sto części z działkami bezpośredniemi co 0,05 mm. Termometr attaché Celsyusza (M. N. 326, OF. 21464) posiada poprawkę $0^0,0$ w zakresie skali od $0^0,0$ do 30^00 (maj 1901). Uwzględniając poprawkę na ciężkość dla Warszawy (+ 0,47), utworzono łącznie z poprzednią jednę poprawkę stałą, którą w postaci zaokrąglonej + 0,4 mm. dodawano do bezpośrednich odczytań barometru, niezależnie od poprawek na sprawdzenie do 0^0.

Niezależnie od barometru rtęciowego działał barograf samopiszący systemu Richarda.

W budce psychrometrycznej, umieszczonej w klatce z żaluzyami przy oknie balkonu bocznego Stacyi Centralnej, działały termometry: suchy (M. 7221. OF. 26304) z poprawką $0^0,0$ od $+30^0,0$ do $-13^0,3$ i popr. $-0^0,1$ od $-13^0,4$ do $-20^0,0$ (październik 1902 r.); zwilgocony (M. 7221*, OF. 26305) z poprawką $0^0,0$ od $-20^0,0$ do $+30^0,0$ (październik 1902 r.); termometr maximum (M. 7126, OF. 25606) z popr. $0^0,0$ od $-20^0,0$ do $+15^0,7$ i $-0^0,1$ od $+15^0,8$ do $+20^0,0$ (marzec 1904 r.). Koło budki na osobnej półce w środku klatki drewnianej umieszczony był hygrometr włosowy systemu Fuessa, sprawdzany od czasu do czasu na punkt 100 przez umieszczenie w przestrzeni nasyconej. Również w tem miejscu działały czasowo: termograf samopiszący Richarda i ewaporograf systemu Houdaille'a.

Niezależnie od odczytań termometrów psychrometrycznych w budce, posiadających nadto wentylator sprężynowy, prowadzono stałe spostrzeżenia w godzinach terminowych z psychrometrem aspiracyjnym Assmanna, zawieszanym na balkonie bocznym w blizkości

Digitized by Google

budki. Przyrządy te, pochodzące z pracowni Fuessa w Berlinie, znajdowały się w dwóch egzemplarzach N. 78 i 157, które, jak widać z dołączanych świadectw, były sprawdzone przez ich wynalazcę, prof. Assmanna. Poprawki termometrów są mniejsze od $0^0,05$.

W zestawieniach miesięcznych dla Warszawy wpisywano spostrzeżenia z psychrometrem aspiracyjnym; tylko dane maximum i minimum temperatury brane były z spostrzeżeń termometrów w budce. Wilgotność bezwzględną i względną obliczano z danych przyrządu Assmanna, na zasadzie wzoru uproszczonego $f = f' - \frac{1}{2}(t - t')$, t. j. pomijając czynnik $\frac{b}{755}$.

Wiatromierz systemu Wilda działał na balkonie górnym Stacyi Centralnej; w środku okresu obserwacyjnego założono nową deseczkę do oceny szybkości wiatru.

Opad mierzono trzy razy dziennie w godzinach terminowych, przyczem jeden z deszczomierzy (systemu Hellmanna) znajdował się na balkonie górnym, drugi (systemu Deutsche-Seewarte z kranikiem) na balkonie bocznym. Sumę dzienną otrzymywano z wszystkich obserwacyj, a mianowicie: z 1 pop., 9 wiecz. i 7 rano dnia następnego. Z dwóch jednoczesnych pomiarów z deszczomierzami brano zawsze ten, który dawał wysokość większą. Niezależnie od tych dwóch deszczomierzy odczytywano dla porównań (raz dziennie o 7 rano) wysokość opadu na dole w ogródku, należącym do Muzeum przemysłu i rolnictwa.

Nadto na Stacyi Centralnej znajdował się deszczomierz samopiszący, który jednak funkcyonował z przerwami i dawał wskazania niezadawalające. To samo dotyczy i meteorografu systemu Assmanna z wentylatorem elektrycznym.

Liczby godzin słonecznych notowane były z pomocą heliografu Campbella z ruchomą podstawką do papierków (przekładaną o 1 pop.) oraz heliografu systemu Wieliczko. Szczególną uwagę zwracano na spostrzeżenia nad natężeniem promieniowania słonecznego, które też były prowadzone w ciągu całego okresu sprawozdawczego w godzinach okołopołudniowych w dni dostatecznie pogodne. Stałe

Digitized by Google

spostrzeżenia prowadzone były z aktynometrem systemu Chwolsona; w czasie od 1.I.1905 do 11.V. i od 19.IX do końca roku używano aktynometru zimowego (skala od —20° do +30°), złożonego z termometrów N№ 29 i 44. Aktynometr letni (skala od 0° do 50°), złożony z termometrów № 69 i 70, działał od 11 maja do 12 września 1905 roku, przyczem w czasie od 11 do 31 maja używano naprzemian obu aktynometrów w celu porównań.

Dni obserwacyjnych było w styczniu 7, w lutym 3, w marcu 3 w kwietniu 10, w maju 17, w czerwcu 6, w lipcu 8, w sierpniu 7, we wrześniu 5, w październiku 1, w listopadzie 3 i w grudniu 2. Ogółem dni 72, w ciągu których dokonano 1017 pomiarów, składających się każdy z 10 odczytań termometrów.

Niezależnie od spostrzeżeń z aktynometrem Chwolsona prowadzone były — głównie w miesiącach wiosennych — liczne serye jednoczesnych pomiarów z pyrheliometrem Ångströma. Pomiary te, kontrolujące się wzajemnie, dostarczyły znacznej liczby danych do wyznaczeń spółczynników przejścia dla zamiany wartości, dawanych przez aktynometry, na jednostki bezwzględne.

Co do „spółczynnika przejścia" aktynometru systemu Ångströma-Chwolsona należy zaznaczyć, że przy pomiarach warszawskich nie okazał się on wartością zupełnie stałą, lecz nieco zmienną wraz z mierzonem natężeniem promieniowania słonecznego. Rezultat ten, ważny sam przez się, jest tembardziej interesujący, że dotąd uważano „spółczynnik" ten powszechnie za „stałą" przyrządu, jak to zaznaczył wyraźnie prof. Chwolson w swych „Actinometrische Untersuchungen".

W drugiej połowie roku 1904 oraz pierwszej połowie 1905 przeprowadzono znaczną liczbę (443 pomiary wciągu 39 dni) porównań, obserwując jednoczesnie pyrheliometr elektryczny i aktynometr. Spostrzeżenia te, wymagające dwóch obserwatorów, były czynione przez, Wł. Gorczyńskiego (pyrheliometr elektryczny) oraz J. Śmigielską, obserwatorkę Stacyi Centralnej (aktynometr).

Szeregując otrzymane stąd dane według grup (co 0,1), stosownie do wskazań aktynometru, otrzymano dla:

wartości względnej aktynometru	1.00;	spółczynnik przejścia	0.805.
„ „ „	1.10;	„ „	0.829.
„ „ „	1.20;	„ „	0.853.
„ „ „	1.30;	„ „	0.877.

Digitized by Google

Dane te stosują się do aktynometru (№ 44 i 29), a błąd w poszczególnych oznaczeniach jego „spółczynników przejścia“ nie powinien przekraczać 0,5%.

Z powyższej tabelki widzimy, że „spółczynnik przejścia“ wzrasta nieco więcej, niż o 2% wraz z powiększeniem się radyacyi o 0,1 kaloryi gramowej.

W sposób, zupełnie analogiczny do podanego poprzednio, przeprowadzono seryę porównań aktynometru letniego (№ 69, 40) z pyrheliometrem elektrycznym kompensacyjnym Ångströma (№ 52 bis).

Otrzymano dla:

wartości względnej aktynometru	1.00;	spółczynnik przejścia	1.005,
„ „ „	1.10;	„ „	1.035,

co odpowiada zmienności prawie 3% wraz z wzrostem radyacyi o 0,1 kaloryi gramowej.

Rezultaty te uczą, że opracowując dane aktynometryczne, należy do przemiany wskazań względnych przyrządu na kalorye gramowe stosować różne „spółczynniki przejścia“, uważając je jako funkcye wartości mierzonej. W ten sposób osiągnie się także zwiększenie dokładności pomiarów aktynometrycznych w porównaniu z dotychczasowemi, w których zmienność „spółczynnika przejścia“ nie była ani znana, ani stosowana. Należy jednak zauważyć, że granice tej zmienności są różne dla różnych przyrządów; np. dla aktynometru (№ 60, 57), używanego w r. 1901 przy pomiarach warszawskich, zmienność „spółczynników przejścia“ była następująca:

wartość względna aktynometru	1.00;	spółczynnik przejścia	0.734;
„ „ „	1.10;	„ „	0.737;
„ „ „	1.20;	„ „	0.739;
„ „ „	1.30;	„ „	0.742;
„ „ „	1.40;	„ „	0.744;
„ „ „	1.50;	„ „	0 747;
„ „ „	1.60;	„ „	0.749,

„Spółczynnik przejścia“ powiększa się tu w stopniu daleko słabszym, niż poprzednio; wzrost jego wynosi w przybliżeniu tylko 0,3% wraz z zwiększaniem się radyacyi o 0,1 kaloryi gramowej. Ponieważ

Digitized by Google

amplituda roczna natężenia promieniowania słonecznego w Warszawie niewiele przekracza 0,3 gr. cal., więc zmienność tą zawarta będzie ogółem w granicach koło 1%.

Jest rzeczą nader interesującą, że powyższy rezultat doświadczalny co do wzrostu „spółczynnika przejścia" aktynometru Ångstrôma-Chwolsona wraz z wzrostem jego wskazań względnych, może być wyprowadzony na drodze teoretycznej. Nie przytaczając szczegółowych wywodów, które będą ogłoszone na innem miejscu, zaznaczymy tu tylko, że teorya kompletna prowadzi do następującego wyrażenia na spółczynnik przejścia s:

$$s = K \cdot \left(1 + \frac{d.h}{k}\right) \cdot \left(1 + \frac{m^2 t^2}{12}\right) + \varepsilon, \qquad \text{(A)}$$

zamiast dotychczasowo przyjmowanego:

$$s = K = \frac{2c}{a.s}. \qquad \text{(a)}$$

W równaniach tych oznaczają:

c — pojemność cieplną termometru aktynometrycznego;
a — spółczynnik absorbcyi powierzchni wyczernionej aktynometru;
d — grubość ścianek szklanych powłoczki termometru akt.;
h — spółczynnik zewnętrznego przewodnictwa cieplnego;
k — przewodnictwo cieplne powłoczki termometrycznej;
m — spółczynnik ochładzania się;
t — czas;
ε — pewien czynnik dodatkowy, rosnący wraz z zwrostem radyacyi i zależny od tego, że do pyrheliometru kompensacyjnego promieniowanie słoneczne dochodzi poprzez diafragmy w obrębie wązkiego kąta bryłowego, zaś na płytki odbiorcze aktynometru energia promienista działa we wszystkich kierunkach.

W równaniu (A) K będzie stałą przyrządu, czynnik $1 + \frac{m^2 t^2}{12}$ (nie przekraczający 1,01) zmienia się nieznacznie, a wartość ε jest jednakowa dla wszystkich porównań: najistotniejszą zaś rolę odgrywa w zmienności s czynnik:

$$+ \frac{d.h}{k} \qquad \text{(b)}$$

Digitized by Google

zależny od spółczynnika przewodnictwa cieplnego. Ponieważ zaś ten ostatni, jak wiadomo z doświadczeń odnośnych, rośnie wraz z temperaturą, a więc powiększa się przy pomiarach aktynometrycznych od zimy do lata, więc i „spółczynnik przejścia“ s winien wzrastać wraz z temperaturą powietrza lub pośrednio wraz z zwiększeniem się radyacyi.

Że to rozumowanie teoretyczne jest słuszne, wynika z poprzednio przytoczonych tabelek; jednocześnie zaś, zależnie od wartości wyrazu

$$\frac{d.h}{k}$$

dla danego przyrządu, wzrost s może być silniejszy lub słabszy, jak to okazuje się przy porównaniach doświadczalnych różnych aktynometrów z pyrheliometrem.

II. Prace w Biurze stacyjnem.

Prace te obejmowały przedewszystkiem sprawdzanie całego pozostałego materyału spostrzeżeń stacyi Sieci warszawskiej i przygotowywanie poszczególnych wykazów rocznych oraz innych zestawień. Bieżące sprawdzania nadsyłanych spostrzeżeń były z jednej strony potrzebne do miesięcznie ogłaszanych przeglądów pogody, a z drugiej strony pozwalały na dokładniejsze oryentowanie się co do wartości nadsyłanych obserwacyj.

Podobnie, jak i w latach poprzednich, udzielane bywały potrzebne wykazy i informacye różnym instytucyom zagranicznym i miejscowym, które się w tym celu do Stacyi Centralnej zwracały. Obszerne zwłaszcza odpisy przygotowano na prośbę berlińskiej „Landesanstalt für Gewässerkunde“; materyały te obejmowały w odpowiedniem opracowaniu wysokości poziomu Wisły w Warszawie za okres 1892—1905; na życzenie tejże instytucyi dostarczono jej również wykazu opadów (obejmującego 25 stacyj) za czerwiec 1902 r.

III. Korespondencya.

W biurze stacyjnem prowadzona była w sprawach stacyjnych dość obszerna korespondencya; prócz wykazów spostrzeżeń, których

Digitized by Google

liczba dosięga 700, otrzymano listów w różnych sprawach 289. W tym czasie wysłano około 300 listów w kraju i za granicę w sprawach stacyjnych.

Po obserwacyi południowej przygotowywane były na Stacyi Centralnej stale buletyny codzienne dla pism warszawskich, a mianowicie dla: „Dziennika dla wszystkich," „Gazety Handlowej," „Gazety Polskiej", Kuryera Polskiego" i „Słowa". W buletynach tych wypisywane były dane barometru, temperatury, wilgotności względnej i kierunku wiatru dla trzech obserwacyj terminowych z dołączeniem uwag o zachmurzeniu i opadach.

Nadto dla tygodnika „Wszechświat" przygotowywane były buletyny tygodniowe i miesięczne.

e) Publikacye Stacyi Centralnej.

Z materyałów, przygotowanych w Biurze stacyjnem do ogłoszenia, przedewszystkiem wymienić należy opracowanie do druku w tomie XIX „Pamiętnika Fizyograficznego" Spostrzeżeń stacyj meteorologicznych Sieci warszawskiej za lata 1901, 1902 i 1903. Wskutek przyczyn niezależnych od Zarządu Stacyi Centralnej, druk tych materyałów, rozpoczęty w b. r., nie mógł być ukończony w okresie sprawozdawczym.

W dziale „Pamiętnika Fizyograficznego", poświęconym meteorologii i hydrografii krajowej, wydane będą w bieżącym tomie XIX także „Materyały do hypsometryi kraju", opracowane przez J. Witkowskiego. Druk tych ostatnich, rozpoczęty w połowie roku, nie mógł być także ukończony.

Ze stałych komunikatów Stacyi Centralnej są w okresie sprawozdawczym do wymienienia następujące:

1) 12 sprawozdań miesięcznych o przebiegu pogody w czasopiśmie „Gazeta Cukrownicza".

2) Buletyny dziesięciodniowe w „Gazecie Cukrowniczej" w czasie od 1 kwietnia do 1 października 1905 r.

3) 12 przeglądów miesięcznych pogody w tygodniku „Gazeta Rolnicza".

Digitized by Google

4) Wyniki spostrzeżeń meteorologicznych w organie Tow. Pszczelniczo-Ogrodniczego „Pszczelarz i Ogrodnik".

5) 12 przeglądów o przebiegu pogody w organie Tow. Ogrodniczego w Warszawie p. t. „Ogrodnik Polski".

6) Stacya Centralna Meteorologiczna w Warszawie. Sprawozdanie z działalności za rok 1904. Warszawa, 1905, str. 30 (odbicie z „Wiadomości Matematycznych").

7) Sprawozdanie z działalności Stacyi Meteorologicznej przy Muzeum w r. 1903 (przedstawione na zebraniu ogólnem Sekcyi Cukrowniczej w Warszawie w dniu 1 lipca 1905 r.), drukowane w „Gazecie Cukrowniczej" № 40.

Poniżej podane są nadto niektóre publikacye, ogłoszone w okresie sprawozdawczym z materyałów stacyjnych lub przez osoby, pracujące na Stacyi Centralnej:

W odbitce z „Prac matematyczno-fizycznych„ tom XVI (str. 33) ogłoszona została praca R. Mereckiego p. t. „Wpływ zmiennej działalności słońca na nieokresowe ruchy atmosfery ziemskiej i temperaturę powietrza strefy pozarównikowej". Jest to część druga pracy, poprzednio podanej w tomie XIV „Prac mat.-fiz", a zarazem rozszerzenie danych, ogłoszonych w t. XXI czasopisma „Meteorologische Zeitschrift" w artykule „Die Sonnentätigkeit und die unperiodischen Luftdruckänderungen".

W tymże tomie XVI „Prac matem.-fiz." podany został artykuł Wł. Gorczyńskiego: „O sposobach wyprowadzenia prawa Kirchhoffa" (str. 113—132, Warszawa. 1905).

Nadto wymienić należy, że na propozycyę redaktora „Gazety Rolniczej" J. Wrońskiego Zarząd Stacyi Centralnej podjął wydawnictwo dziełka, zawierającego podstawowe wiadomości z Meteorologii i przeznaczonego dla obserwatorów stacyj oraz osób, interesujących się tą gałęzią nauki.

f) Wymiana wydawnictw. Biblioteka.

Wzamian za publikacye Sieci warszawskiej otrzymała Stacya Centralna w Warszawie roczniki i wydawnictwa;

Digitized by Google

1) z Berlina od Instytutu Meteorologicznego: Deutsches Meteorologisches Jahrbuch für 1903, Heft II (1904). Regenkarte der West Preussen und Posen, 1900. Niederschlags - Beobachtungen für 1901 (1905). Anleitung zur Anstellung und Berechnung meteorologischer Beobachtungen, I i II część (1905).

2) z Bruksclli: Météorologie (Anvers) 1904.

3) z Budapesztu: Bericht über die Thätigkeit der Königl. Ung. Reichs-Anstalt für Meteorologie u. Erdmagnetismus 1903 (1904).

4) z Bukaresztu: Analele Institutului Meteorologic al Romaniei, Anul 1900, Tomul XVI (1903); Buletinul Lunar al Observatiunilor Meteorologice din România, 1904 (1905) Anul XIII.

5) z wyspy Cuba: Observaciones magneticas y meteorologicas Hechas en el Observatorio del Collegio de Belen de la Compania de Jesus en la Habana, za rok 1904 (1905).

6) z Christianii: Jahrbuch des norwegischen Instituts für 1900 (1901), 1901 (1902), 1902 (1903).

7) z Chemnitz: Jahrbuch des Königlich sächsichen meteorologischen Instituts za rok 1900 (1904).

8) z Dorpatu: Observations de la station météorologique l'Ecole réale de Jurief, Octobre, Novembre, Décembre 1904 et I, II, XI i XII z r. 1905.

9) z Edynburga: Meteorological Observations at Stations of the second Order, For the Year 1900 (1905).

10) z Granady: Observatorio astronómico, geodinàmico y meteorologico de Granada. Anno 1905 (I—XII).

11) z O. Gyalla: Beobachtungen angest. am Kön. ung. Meteorologisch - Magnetischen Observatorium in O. Gyalla, Januar, Februar, 1905.

12) z Habany. Estacion Central Habana: Buletin correspondiente al mes de Noviembre, Decembre 1904; I—VII 1905. Perturbacion Ciclonica, Octubre 10—20, 1904. Rectificacion (1906)). La tormenta Tropical de Octubre de 1904 y la armonia entre dos centros Tempestuosos por E. del Monte (1905), Habana. Las differentes corrientes de la atmosfera en el Cielo de la Habana, por. P. P. Gangoti S. J. (Habana 1904).

13) z Helsingforsu: Observations publiées par L'Institut Météorologique Central de la Societé des Sciences de Finlande, za lata 1893—1894 (1905), 1894—1895 (1905) Etat des glaces et des neiges.

Digitized by Google

Observations météorologiques faites à Helsingfors en 1899 (1904), 1900 (1905). Observations faites aux stations de Sodalkyla et de Kultala, par S. Lemström et E Briese, Tome III (1898).

14) z Krakowa od Akademii Umiejętności: Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie 1903. Materyały do Klimatografii Galicyi 1902 (1903). Meteorologische Beobachtungen 1901—1903, 1904 i 1905. Sprawozdanie Komisyi Fizyograficznej 1901 (1903) XXXVII. Rozprawy Wydziału Matem. przyr. Akad. Umiejętności 1904, tom 4A (1904), tom 4B (1904). Spis autorów Wydziału Matem.-przyr. Akad. Um. do roku 1900 włącznie (1905).

15) z Leon (Meksyk): Boletin Mensual del Observatorio Meteorologico de Leon (Noviembre 1905).

16) z Londynu: Weekly Weather Report of the Meteorological Office 1905. N. 1—52.

17) z Messyny: Annuario per l'anno 1904 (1905).

18) z Montevideo: Boletin Mensual del Observatorio Meteorologico del Collegio Pio de Villa Colon Nums. 10, 11, 12, 1904, Anno XVIIi NN. 1—3, 7—12, Anno XVIII.

19) z Odesy: Annales de l'Observatoire magnétique et météorologique 1899 (1900), 1900 (1901), 1901—1903 (1905). Travaux du réseau météorologique du Sud-Ouest de la Russie 1899 (1900) IV, 1900 (1901) V, 1901—1902 (1903) vol VI et VII.

20) z Petersburga: Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, r. 1903 (1904) vol. XVI № 6. Lietopisi Gławnoj Fiziczeskoj Obserwatorii za r. 1903 cz. I i II (1905).

21) z Rzymu: Annali del Ufficio Centrale Meteorologico e Geodynamico Italiano, za rok: 1892 Vol. XIV, 1898 Vol. XX, 1899 Vol. XXI, 1900 Vol. XXII (1904). Boletino Meteorico, anno 1905, (N.-365) (Roma.) Rivista Meteorico-Agraria, anno XXVI, № 1 – 34 (1905).

22) z Sobieszyna: Wyniki prac i doświadczeń, wykonanych od 1.VII. 1903 do 1.VII.1904 na Stacyi doświadczalnej w Sobieszynie (1904).

23) z Tyflisu: Jeżemiesiacznyj Meteorołogiczeskij Biulleteń Tifliskoj Fiziczeskoj Obserwatorii № 1—12, r. 1905.

24) z Upsali: Bulletin Mensuel de l'Observatoire Météorologique de l'Université d'Upsal za r. 1904 (1905), V, XXXVI.

Digitized by Google

25) z Waszyngtonu: U. S. A. Monthly Weather Review za lata: 1899 (I—XII), 1900 (I—XII), 1901 (I—XII), 1901 (I—XII), 1902 (I—XII), 1903 (I—XII), 1904 (I—XII), 1905 (I—XI). Od Departamentu Rolnictwa: Expériment Station Record, 1905 (April—December).

26) z Wiednia: Jahrbücher der K. K. Central Anstalt für Meteorologie u. Erdmagnetismus, J. 1902 (I, II Theil) Anhang (1904), J. 1903, vol. XL (1904). Jahrbuch des K. K. Hydrographischen Central-Bureaus za lata 1895, 1899, 1900 i 1901.

27) z Warszawy. Wiadomości matematyczne, tom IX zeszyt 1—2 (1905), zeszyt 3—4—5—6 (1905).

28) z Xalapy (Meksyk): Resumen de las Observaciones verificadas en el Observatorio Meteorológico Central del Estado de Veracruz Ilave 1905 (I—XII).

29) z Zagrebu: Jahrbuch des Meteorologischen Observatoriums in Zagreb 1902 (1904).

30) z Zi-Ka-Wei (Chiny): Bulletin des observations met. et magn. de Zi-ka-wei 1902 r. (Chang-Hai 1903).

Z czasopism specyalnych, prócz wydawnictw polskich, prenumerowano: *a*) Meteorologische Zeitschrift, *b*) Physikalische Zeitschrift, *c*) Symon's Meteorological Magazine, *d*) Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity, *e*) Archiv für Erdmagnetismus, *f*) Fortschritte der Physik, *g*) Das Wetter, *h*) Ciel et terre, *i*) Meteorologiczeskij Wiestnik.

Biblioteka Stacyi Centralnej wzrosła przeszło o 100 numerów: rozpoczęty już poprzednio katalog kartkowy był prowadzony w dalszym ciągu.

Zarząd stacyi Centralnej w Warszawie uważa za swój obowiązek wyrazić podziękowanie inżynierowi J. Witkowskiemu w Łodzi za mapy hypsometryczne; Karolowi Mildemu za dawne spostrzeżenia z Silniczki (1884 - 5—6); Waszyngtońskiemu „Weather

Digitized by Google

Bureau" za ubiegłe roczniki Monthly Review; Wiedeńskiemu „Hydrographisches Bureau" za roczniki 1895—1901, oraz wszystkim osobom i instytucyom, które moralnie i materyalnie popierały rozwój Stacyi Centralnej, a także obserwatorom i kierownikom stacyj prowincyonalnych.

Warszawa w lutym 1906 roku.

R. Merecki. St. Bouffall.

Digitized by Google

PRZEGLĄD LITERATURY. BIBLIOGRAFIA.

Inż. Dr. M. T. Huber. O natężeniach, wywołanych nierównem ogrzewaniem wewnętrznej i zewnętrznej ściany rury. Odbitka z „Czasopisma technicznego“, Lwów 1906, 4-o, str. 5.

T. Miłobędzki. Studya nad mianowaniem: 1) O jodometrycznem oznaczaniu miana $KMnO_4$; 2) Podstawy mianowania a ścisłość. Odbitka z „Chemika Polskiego“. Warszawa, 1906, 8-o, str. 16.

F Kucharzewski. Technicy i ich zespolenie wśród rozwoju przemysłu Królestwa. Odbitka z „Przeglądu technicznego“. Warszawa 1906, 8-o str. 35.

Jan Zydler. Geometrya w zakresie szkoły średniej. Część I, Planimetrya. Część II, Stereomatrya. Warszawa 1906, 8-o, str. 184. 187.

B. R. Szturcel i H. A. Łąpiński. Zbiór zadań i przykładów arytmetycznych, poprzedzony krótkim rysem teoryi Arytmetyki zasadniczej oraz tablicą miar i wag. Kurs pierwszy dwuletni dla szkół początkowych, Warszawa 1906, 8-o, str. 25, 8.

A. Faifofer. Pierwsze początki Geometryi. Przetłómaczył z włoskiego W. Kwietniewski. Wydanie drugie przejrzane i poprawione. Warszawa 1906, 8-o, str. 241.

Digitized by Google

Helena Stattlerówna i Janusz Jędrzejewicz. Zbiór zadań arytmetycznych w zakresie klasy III-ej. Warszawa 1906, 8-o, str. 131.

S. Dickstein. Arytmetyka w zadaniach. W trzech częściach. Część I. Liczby całkowite. Wydanie trzecie poprawione i uzupełnione, 8-o, str. VIII, 252. Część II. Ułamki. Wydanie trzecie, poprawione i rozszerzone, 8-o, str. 270. Część III. Stosunki. Proporcyonalność. Kwadraty. Sześciany. Zadania różne. Wydanie drugie. 8-o, str. 263. Warszawa 1906.

J. St. Bohuszewicz. Zbiór zadań arytmetycznych dla szkół średnich męzkich i żeńskich podług M. A. Baranieckiego, S. Dicksteina, J. Wereszczagina i innych. Część I. Warszawa 1906, 8-o, str. 14.

R. Janowski. Zbiór zadań arytmetycznych dla szkół początkowych ludowych i prywatnych. Rok pierwszy. Nakład księgarni H. Janowskiej w Jędrzejowie. Skład główny w księgarni Gebethnera i Wolfa, Warszawa 1906, 8-ka, str. 31.

T. Banachiewicz. Sur un cas particulier du problème des trois corps. Odbitka z „Comptes rendus" Akademii paryskiej (posiedzenie dnia 26 lutego 1906 r.) 3 str.

Z publikacyj Towarzystw naukowych i z czasopism.

Acte mathematica, t. **30**, 1906, str. 305 324.

T. Levi-Civita. Sur la résolution qualilative du problème restreint des trois corps.

W zagadnieniu trzech ciał (punktów materyalnych, przyciągających się wzajemnie według prawa Newtona) równania różniczkowe ruchu zachowują się analitycznie i regularnie tak długo, póki położenia punktów pozostają różnemi. Gdy wychodzimy z danych warunków początkowych, to, jak wykazał Painlevé, osobliwości mogą występować tylko wtedy, jeżeli przynajmniej jedna z odległości wzajemnych dąży do zera, gdy t (czas) zdąża do pewnej wartości skończonej t_1. Na podstawie nowszych badań Mittag-Lefflera o przedstawieniu

Digitized by Google

gałęzi monogenicznych funkcyj analitycznych [1]) można twierdzić, że w zagadnieniu trzech ciał spółrzędne dają się we wszystkich przypadkach i podczas całkowitego trwania ruchu wyrazić przez szeregi, mające własności zasadnicze szeregów Taylora.

Takiego rozwiązania pytania nie można wszakże uważać za zupełne; jest ono—rzec można— ilościowem i nie pozwala nam poznać natury ruchu.

Powstaje tedy pytanie, dotyczące przewidywania uderzeń ciał niebieskich. Przypadkiem szczególnym zagadnienia trzech ciał ściślejszego zajmował się Autor tej pracy [1]), a po nim świeżo G. Bisconcini [2]), ale pozostaje jeszcze do rozpatrzenia część druga pytania. Ciała niebieskie nie są punktami materyalnemi; można je za takie uważać o tyle tylko, o ile wymiary ich dają się zaniedbać w stosunku do odległości, i o ile te odległości nie spadają niżej pewnej granicy ε. Otóż, aby módz twierdzić, że począwszy od pewnego stanu początkowego ruch odbywać się będzie regularnie, trzeba być pewnym, że te odległości pozostają większemi od ε. Zbadanie przy pomocy warunków początkowych. czy tak jest istotnie, stanowi cel istotny analizy jakościowej tego problematu.

W zadaniu niniejszem, odnoszącem się do ruchu ciała P (o masie znikomej) na płaszczyznie pod wpływem dwóch ciał S i J, obracających się jednostajnie około ich środka ciężkości. Ponieważ $\overline{SJ}$ pozostaje stałem, dość rozważać odległości $\overline{PS}$ i $\overline{PJ}$, a nawet jednę z nich, ponieważ te same rozważania dotyczą drugiej. W obszarze dostatecznie małym D, otaczającym środek S, równania różniczkowe zachowują się regularnie i mają osobliwości tylko w punkcie S. Lecz można je uregulować — że użyjemy tego wyrazu — za pomocą odpowiedniego przekształcenia. Przy pomocy równania Hamiltona-Jacobi'ego można scharakteryzować bardzo dokładnie trajektorye obszaru D. Wyprowadzamy stąd bez trudności przedstawienie w postaci holomorficznej wszystkich łuków trajektoryj A, możliwych wewnątrz D. Żaden z tych łuków nie może zbliżyć się nieograniczenie do S, by tamtędy nie przechodził na zawsze; to znaczy, wszelki łuk A, nie przechodzący ściśle przez punkt S, pozostaje od tego punktu w odległości skończonej. Najmniejsza odległość δ punktu S od łuku A może być wyrażona jak funkcya (jednoznaczna wewnątrz D) któregokolwiek ze stanów ruchu ciała P na łuku A. Jest albo $\delta=0$, jest to warunek uderzenia; albo $\delta>0$, wtedy ruch odbywa się regularnie. Gdy nadto $\delta>\varepsilon$, wtedy rezultat matematyczny nabiera znaczenia fizykalnego. Nic z góry nie pozwala nam przewidzieć naprzód na długi okres czasu, że $\delta>\varepsilon$, a nawet że $\delta>\theta$ dla jakiegokolwiek t. O granicy niższej na δ dotąd nic powiedzieć nie można. Można tylko powiedzieć,

---

[1]) Patrz „Prace matematyczno-fizyczne" t. XVI.

[1]) Porówn. Sprawozdanie w „Wiadomościach matematycznych" t. 7, str. 90-94. Później wyszła jeszcze rozprawa Autora p. t. „Traiettorie singolari et noti nel problema ristretto dei tre corpi (Annali di Mat. (3) 9, 1903).

[2]) G. Bisconcini,

Digitized by Google

że gdy $\delta > \varepsilon$, wtedy nie ma potrzeby obawiać się sąsiedztwa punktu S; tylko zbliżenia nowe (t. j. poprzedzone przez wyjście z obszaru D) mogłyby stać się niebezpiecznemi.

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure (3), 21, 1905.

A. Guldberg Sur les équations linéaires aux différences finies.

Przedmiotem dwóch rozpraw pod tym tytułem jest badanie równań liniowych różnicowych pod względem ich własności analogicznych do własności równań różniczkowych liniowych.

Niechaj będzie równanie liniowe o różnicach skończonych:

$$y_{x+n} + a_x^{(1)} y_{x+n-1} + a_x^{(2)} y_{x+n-2} + \ldots + a_x^{(n)} y_x = 0,$$

w którem $a_x^{(1)} \ldots, a_x^{(n)}$ są funkcyami zmiennej x i niechaj $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ będzie układem zasadniczym całek. Autor dowodzi następującego twierdzenia:

Każda funkcya algebraiczna całkowita F wielkości $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ i kolejnych ich wartości, która, po zastąpieniu elementów układu $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ przez elementy innego układu zasadniczego całek, odtwarza się pomnożona przez czynnik stały od zera różny, równa się funkcyi algebraicznej całkowitej spółczynników równania liniowego i ich kolejnych wartości, pomnożonej przez potęgę wyrażenia $\Pi\left[(-1)^n a_x^{(n)}\right]$.

Twierdzenie to daje się uogólnić dla równań różnicowych liniowych jednoczesnych:

$$y_{x+1}^{(i)} + a_x^{i1} y_x^1 + a_x^{i2} y_x^2 + \ldots + a_x^{in} y_x^n \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

i wyraża się w ten sposób:

Każda funkcya algebraiczna całkowita funkcyj

$$y_x^{i1}, y_x^{i2}, \ldots, y^n, \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

stanowiących układ zasadniczy całek, oraz ich kolejnych wartości, która, po zastąpieniu ich przez elementy innego układu zasadniczego całek, odtwarza się pomnożona przez czynnik stały od zera różny, równa się funkcyi algebraicznej całkowej spółczynników a_x^{ik} i ich kolejnych wartości, pomnożonej

Digitized by Google

przez potęgę wyrażenia $\Pi\left[(-1)^n P_{x-1}\right]$, gdzie P_x oznacza wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} a_x^{11} & a_x^{12}, & \ldots\ldots, & a_x^{1n} \\ a_x^{21} & a_x^{22}, & \ldots\ldots, & a_x^{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_x^{n1} & a_x^{n2}, & \ldots\ldots, & a_x^{nn} \end{vmatrix},$$

Zagadnienie ogólne przekształcenia równań różniczkowych liniowych polega na utworzeniu równaniu różnicowego liniowego, którego całką jest:

$$\eta_x = f\left(y_x^{(1)},\ y_{x+1}^{(1)}, \ldots, y_{x+m}^{(1)};\ y_x^{(2)},\ y_{x+1}^{(2)} \ldots y_{x+m}^{(2)};\ \ldots\ y_x^{(n)},\ y_{x+1}^{(n)}, \ldots y_{x+m}^{(m)}\right).$$

Rząd tego równania będzie równy liczbie wyrazów liniowo niezależnych, występujących w wyrażeniu na η_x, jeżeli w niem elementy układu zasadniczego $y_x^{(1)}, y_x^{(1)}, \ldots, y_x^{(n)}$ zastąpimy przez elementy układu:

$$y_x^{(i)} = C_{11} z_x^{(1)} + C_{12} z_x^{(n)} + \ldots + C_{1n} z_x^{(n)};$$

$$y_{x+1}^{(i)} = C_{11} z_{x+1}^{(1)} + C_{12} z_{x+1}^{(2)} + \ldots + C_{1n} z_{x+1}^{(n)}, \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

$$\ldots, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

i wyrazimy w ten sposób η_x jako funkcye wielkości $z_x^{(1)}, z_x^{(n)}, \ldots, z_x^{(n)}$ i ich kolejnych wartości. Niechaj tą liczbą będzie p, a owemi wyrazami liniowo niezależnemi niechaj będą $\varphi_x^{(1)}, \varphi_x^{(n)}, \ldots, \varphi_x^{(p)}$; żądanem równaniem będzie:

$$\begin{vmatrix} \eta_{x+p}, & \varphi_{x+p}^{(1)}, & \varphi_{x+p}^{(2)}, & \ldots, & \varphi_{x+p}^{(p)} \\ \eta_{x+p-1}, & \varphi_{x+p-1}^{(1)}, & \varphi_{x+p-1}^{(p)}, & \ldots, & \varphi_{x+p-1}^{(p)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \eta_x, & \varphi_x^{(1)}, & \varphi_x^{(2)}, & \ldots, & \varphi_x^{(p)} \end{vmatrix} = 0.$$

W drugiej rozprawie podaje autor teoryę całkowania równań różnicowych liniowych, zupełnie analogiczną do teoryi całkowania równań różniczkowych, podanej przez Picarda i Vessiota, Twierdzenie zasadnicze brzmi jak następuje:

Każdemu równaniu liniowemu różnicowemu rzędu n-tego odpowiada grupa ciągła skończona przekształceń liniowych jednorodnych o n zmiennych o następujących własnościach: 1-o, każda funkcya

Digitized by Google

wymierna całek, mająca wyrażenie wymierne, zezwala na wszystkie przekształcenia tej grupy; 2-o, każda funkcya wymierna niezmiennicza dla wszystkich przekształceń tej grupy, ma wyrażenie wymierne.

Niechaj:

$$(1) \qquad y_{x+m} + p_x^{(1)} y_{x+m-1} + \cdots\cdots p_x^{(m)} y_x = 0,$$

będzie równanie liniowe o spółczynnikach wymiernych. Oznaczmy przez $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)}$ układ zasadniczy całek i połóżmy:

$$V_x = u_x^{(1)} y_x^{(1)} + u_x^{(2)} y_x^{(2)} + \cdots\cdots + u_x^{(m)} y_x^{(m)},$$

gdzie $u_x^{(1)}, u_x^{(2)}, \ldots, u_x^{(m)}$ są funkcye wymierne zmiennej x, dowolnie obrane Funkcya ta czyni zadość równaniu różniczkowemu liniowemu rzędu m^2 o spółczynnikach wymiernych. Niechaj równaniem tem będzie:

$$(A) \qquad V_{x+m^2} + P_x^{(1)} V_{x+m^2-1} + \cdots\cdots + P_x^{(m^2)} V_x = 0.$$

Z wyrażeń na $V_x, V_{x+1}, \ldots, V_{x+m^2-1}$ przez y_x i ich kolejne wartości można będzie otrzymać odwrotnie y_x i ich kolejne wartości, wyrażone przez V_x i ich kolejne wartości, w szczególności będzie:

$$y_x^{(1)} = \alpha_1 V_x + \alpha_2 V_{x+1} + \cdots\cdots + \alpha_{m^2} V_{x+m^2-1},$$
$$y_x^{(2)} = \beta_1 V_x + \beta_2 V_{x+1} + \cdots\cdots + \beta_{m^2} V_{x+m^2-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_x^{(m)} = \lambda_1 V_x + \lambda_2 V_{x+1} + \cdots\cdots + \lambda_{m^2} V_{x+m^2-1},$$

gdzie $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ są funkcyami wymiernemi zmiennej x.

Każdej całce równania (A) odpowiada układ całek $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)}$ równania danego (1); układ ten może wszakże nie być zasadniczym, co zajdzie wtedy, gdy wyznacznik wielkości y_x i ich kolejnych wartości aż do rzędu $m-1$ jest zerem:

$$\varphi(x_1 V_x, V_{x+1}, \ldots\ldots, V_{x+k}),$$

gdzie k jest najwyżej równe m^2-1. Otrzymamy tedy układ zasadniczy, jeżeli za V_x weźmiemy taką całkę równania (A), która nie czyni zadość równaniu $\varphi = 0$.

W ogólności, t. j. gdy równanie (1) jest wzięte dowolnie, równanie (A) nie będzie miało żadnego rozwiązania wspólnego z równaniem różnicowem liniowem o spółczynnikach wymiernych rzędu niższego niż m^2, jeżeli odwrócimy uwagę od rozwiązań, czyniących zadość równaniu $\varphi = 0$.

Digitized by Google

Ale w pewnych przypadkach może być inaczej. Niechaj będzie równanie różnicowe liniowe rzędu p:

$$f) \qquad f(x, V_x\, V_{x+1}, \ldots\ldots, V_{x+p}) = 0,$$

gdzie f jest wielomianem. Z pomiędzy takich równań wybierzmy jedno z mających rząd najmniejszy. Niechaj $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(m)}$ będzie układ zasadniczy, odpowiadający pewnemu rozwiązaniu równania $f=0$ (nie należącemu do $\varphi=0$) i $Y^1_x, Y^2_x, \ldots, Y_y^{(m)}$ układ, odpowiadający rozwiązaniu ogólnemu; będzie:

$$(S) \qquad Y_x^{(1)} = a_{i1}\, y_x^{(1)} + a_{i2}\, y_x^{(2)} + \ldots\ldots + a_{im}\, y_x^{(m)}. \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

Spółczynniki a zależeć będą od p parametrów dowolnych i będą funkcyami algebraicznemi tych parametrów. Podstawienia (S) tworzą grupę ciągłą przekształceń; nazwijmy ją grupą G przekształceń równania różnicowego liniowego. Otóż każda funkcya wymierna zmiennej x oraz wielkości $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ i ich wartości kolejnych, wyrażająca się wymiernie jako funkcya zmiennej x, pozostaje niezmienna, gdy do wielkości $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ stosujemy podstawienie grupy G. I odwrotnie: każda funkcya wymierna zmiennej x, układu zasadniczego wielkości $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ i ich wartości kolejnych, pozostająca niezmienną przy podstawieniach grupy G, jest funkcyą wymierną zmiennej x.

Można rozszerzyć obszar wymierności spółczynników równania. Dajmy, że mamy pewną liczbę funkcyj $a_x^{(1)}, a_x^{(2)}, \ldots, a_x^{(n)}$, z których żadna nie daje się wyrazić jako funkcya wymierna zmiennej x, pozostałych funkcyj i ich wartości kolejnych i uważajmy, że do obszaru wymierności należą funkcye wymierne zmiennej x, funkcyj a_x i ich wartości kolejnych. Wtedy będziemy mieli do czynienia z różnemi równaniami różnicowemi algebraicznemi, których spółczynniki będą funkcyami wymiernemi wielkości x, a_x i ich wartości kolejnych: danemu obszarowi wymierności odpowiadać będzie grupa przekształceń dla równania różnicowego liniowego.

W teoryi Galois'a równań algebraicznych rozwiązująca nieprzywiedlna może być znaleziona za pomocą rachunków zawsze wykonalnych, skoro dany jest obszar wymierności. Inaczej rzecz się ma w teoryi równań różnicowych, o których mówimy, zupełnie teoryi analogicznej do teoryi Picarda i Vessiota, utworzonej dla równań różniczkowych liniowych. Pojmujemy jedynie istnienie równania różnicowego (f) w ten sposób, że grupa przekształceń dla danego równania nie może być otrzymana zapomocą działań, dających się uskutecznić regularnie. Wynika stąd w ogólności, że z punktu widzenia praktycznego należy rozpocząć od szukania wszystkich algebraicznych grup przekształceń liniowych

Digitized by Google

i jednorodnych przy liczbie zmiennych równej rzędowi równania różnicowego liniowego. W pracach Liego posiadamy zasady pewne do podjęcia tego poszukiwania. Pozostaje wtedy jeszcze zbadać, czy grupa określona jest grupą przekształceń równania danego.

Teorya ogólna całkowania równań różnicowych liniowych rzędu n-tego sprowadza się do rozważania trzech następujących zagadnień:

1. Wyznaczyć wszystkie grupy algebraiczne przekształceń liniowych jednorodnych o n zmiennych.

Klein, Jordan, Lie podali wszystkie typy grup nieciągłych i ciągłych dla $n = 2, 3, 4$; nadto Jordan i Lie podali twierdzenia ogólne, odnoszące się do grup o n zmiennych.

2. Zbadać cechy, po których poznać można, czy grupa przekształceń równania liniowego danego należy do jednej z tych grup.

3. Znając typ grupy przekształceń równania liniowego, wskazać naturę równań pomocniczych w całkowaniu i utworzyć te równania pomocnicze.

Te zagadnienia stosuje autor do równania różnicowego liniowego stopnia drugiego:

$$y_{x+2} + p_x\, y_{x+1} + q_x\, y_x = 0.$$

Revista Trimestral de Matématicas publicada por J. Rius y Casas 5, 1905, № 19, zawiera pomiędzy innemi artykuły: L. S. de la Campa, O całkowaniach zależnych od rektyfikacyi krzywych (nota pierwsza); E. Barbette, Dowód twierdzenia klasycznego Geometryi wektoryalnej; G. Pesci, O monografii elementarnej. — Bibliografia. Kronika. Zagadnienia i rozwiązania.

Annaes Scientificos da Academia Polytechica do Porto, publicados sob a direcçao de F. Gomes Teixeira. Vol. I, № 1, Coimbro 1905.

Jest to zeszyt pierwszy nowego dziennika naukowego, mającego w zakresie nauk matematycznych zastąpić pod temże kierownictwem wydawane czasopismo „Journal de Sciencias mathamaticas a astronomicas", które na tomie XV zostało zawieszone. Zeszyt pierwszy zawiera następujące artykuły. Pierwszy p. t. „Sobre uma questao entre Montairo da Rocha e Anastacio de Cunha" przez redaktora—odnosi się do sporu, jaki prowadzili pomiędzy sobą ci dwaj matematycy portugalscy XVIII stulecia w kwestyi, dotyczącej natury i równania linii łańcuchowej. W artykule p. t. „Sur les séries neumannionnes de fonctions sphériques" N. Nielsen podaje szereg nowych wzorów, odnoszących się do funkcyj kulistych. Resztę zeszytu wypełnia artykuł J. J. Ferreiry da Silva o pracach naukowych chemika portugalskiego R. D. Silvy i początek artykułu B. Carqueji o kapitalizmie i jego początkach w Portugalii.

Digitized by Google

NEKROLOGIA.

Karliński Franciszek Michał, b. długoletni profesor matematyki w Uniwersytecie krakowskim, dyrektor Obserwatoryum astronomicznego w Krakowie, członek krakowskiej Akademii Umiejętności, zmarł w Krakowie dnia 21 marca 1906 roku. Urodzony w Krakowie dnia 4 października 1830, kształcił się i odbywał studya naukowe w mieście rodzinnem. Był adjunktem Obserwatoryum astronomicznego krakowskiego, następnie w Pradze czeskiej; od r. 1862 profesorem Uniw. Jagiel. i dyrektorem dostrzegalni astron. krakow. Ogłosił szereg prac, rozpraw i spostrzeżeń, głównie z dziedziny Astronomii i Meteorologii. Wymieniamy następujące: „Rys dziejów Obserwatoryum astronomicznego krakowskiego", Kraków 1864; „Hostiae planetae minoris elementa nova", Cracoviae 1865. „Mittlere Temperatur zu Krakau nach 40 jähr. Beobachtungen", Wiedeń 1868. „Materyały do klimatologii Galicyi", Kraków 1878: „O okresowych zmianach ciepłoty powietrza w Krakowie" (Pam. Ak. Um. **2**, 157—191); „Przyczynek do teoryi wahadła sekundowego" (Rozpr. Ak. Um. **2**, s. LXIV—LXVI); „Wyznaczenie szerokości geograficznej środka kopuły zachodniej w Obserwatoryum astronomicznem krakowskiem (Rozpr. **4**, s. 52—67); „Wypadki jednorocznych pomiarów chyżości wiatru w Krakowie" (tamże **4**, s. 68—72); „Ułatwienie obliczenia spółczynników wzoru Bessela, używanego w Meteorologii", (tamże **7**, s. b9—66); „Przyczynek do kalendaryografii chrześciańskiej" (tamże **8**, s. 62—67); „Kilka uwag nad pewnym rodzajem linij krzywych algebraicznych" (tamże **10**, s. XI—XIII); „Wzniesienie stacyj kolei żelaznej lwowsko-czerniowieckiej nad poziom morza Adryatyckiego" (Spr. Kom. Fiz. **3**, s. 155); „Wypadki dwudziestoletnich spostrzeżeń ozonometrycznych w Krakowie" (tamże **8**, s. 115); „Wypadki siedmioletnich cogodzinnych pomiarów deszczu" i t. d. (tamże **28**, s 181); „Liczba godzin ze słońcem jasno świecącem w Krakowie" i t. d. (tamże **33**, s. 198); „Dzienny przebieg ciepłoty w Krakowie" (tamże **34**, s. 209). Ogłosił spostrzeżenia fenologiczne 1866—1899; Wypadki spostrzeżeń meteorologicznych 1866—1899; Wykaz miejsc nawiedzonych gradem r. 1867, 1869—1875; Wykaz stanu wody na rzekach galicyjskich 1867—1875; Wypadki spostrzeżeń magnetycznych w Krakowię 1870—1872 w kolejnych tomach Sprawozdań komisyi fizyograficznej. W „Astron. Nachrichten ogłosił: Keplers Problem, speciell bei den Planeten (**57**, 1862), Beobachtungen Elem. d. Planeten (**52**. **65**, **66**, **90**, **92**, 1860—1878), von Cometen (**59**, **62**, **66**, **77**, **90**, **92**, 1861 — 1878), v. Mercurdurchgang (**92**); w „Wiener Meteorolog. Zeitschr.": Meteor von 30.I.68; Nordlicht von 4.II.72; Lunar-diurnal Variation magnet. zu Greenwich (**15**, 1881); Ueber „van der Stok influence de la lune sur l'aiguille aimantée" (**17**, 1882).

Digitized by Google

Digitized by Google

„WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE“

wychodzą zeszytami w ilości 4 do 6 zeszytów rocznie, z których każdy składa się z 2—4 arkuszy druku, i obejmują:

---

1. Artykuły ze wszystkich działów matematyki czystej i stosowanej z mechaniki, fizyki, chemii, astronomii, geodezyi, geofizyki, meteorologii i t. p.
2. Artykuły z teoryi ubezpieczeń na życie i od nieszczęśliwych wypadków.
3. Artykuły z historyi nauk ścisłych.
4. Życiorysy uczonych i wynalazców.
5. Opisy obserwatoryów, pracowni fizycznych i chemicznych, instytutów naukowych i t. p.
6. Posiedzenia towarzystw naukowych, kongresów i t. p.
7. Kronika. Nowości z dziedziny nauk matematycznych i fizycznych.
8. Krytyka. Rozbiory dzieł i bibliografia.
9. Przegląd prasy peryodycznej naukowej.
10. Zagadnienia i ich rozwiązania.
11. Korespondencya (w granicach programu).
12. Ogłoszenia.
13. Ilustracye, portrety, rysunki i t. p.

Przedpłata roczna wynosi: w Warszawie 3 ruble; w innych miejscowościach z przesyłką rs. 3 kop. 60.

Prenumeratę przyjmuje księgarnia Gebethnera i Wolffa w Warszawie, Krakowskie-Przedmieście № 15.

Adres Redakcyi „Wiadomości matematycznych“: **Warszawa, Marszałkowska Nr. 117.**

Digitized by Google

DZIEŁA MATEMATYCZNE

WYDANE

z zapomogi Kasy pomocy dla osób pracujących na polu naukowem

im. D-ra Józefa Mianowskiego

do nabycia we wszystkich księgarniach.

A. BIBLIOTEKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNA,

wydawana pod redakcyą

M. A. Baranieckiego i A. Czajewicza.

Serya I tom II i III. Kramsztyk S. Wiadomości początkowe z fizyki Książeczka I, wydanie drugie str. XII. 105, drzeworytów 61. Cena w oprawie kop. 40. Książeczka II, wydanie drugie str. XI. 171, drzeworytów 77. Cena w oprawie kop. 65.

Serya I tom IV. Witkowski A. W. Wiadomości początkowe z geografii fizycznej i meteorologii. Warszawa 1884 w 12-ce str. X. 108, drzeworytów 22, lit 4. Cena w oprawie kop. 25.

Serya III tom V. Baraniecki M. A. Początkowy wykład syntetyczny własności przecięć stożkowych, na podstawie ich pokrewieństwa harmonicznego z kołem. Warszawa 1885 w 8-ce str. XVI. 151, drzeworytów 63 Cena kop. 40.

Serya III tom VI. Czajewicz A. Trygonometrya płaska i kulista. Warszawa 1891 w 8-ce str. XX, 389, drzeworytów 86. Cena rb. 2.

Serya III tom VIII. Witkowski August. Zasady fizyki. Tom. I. Warszawa 1892 w 8-ce str. X. 469. Cena rb. 2.

Serya IV tom II Sochocki J. Rozwiązywanie równań liczebnych. Warszawa 1894 w 8-ce lex. str. XII, 212. Cena kop. 60.

Serya IV tom IV. Zajączkowski Wł. Geometrya analityczna. Warszawa 1884 w 8-ce lex. str. XL. 411, drzeworytów 85. Cena rb. 1.

Serya IV tom X. Franke J. N. Mechanika teoretyczna. Warszawa 1889 w 8-ce str. XXXI. 645, drzeworytów 72. Cena rb. 3.

B. DZIEŁA I ROZPRAWY MATEMATYCZNO-FIZYCZNE,

wydawane przez

A. Czajewicza i S. Dicksteina.

I. Badowski I. Geometrya elementarna. Warszawa 1894. LVIII. 338, drzeworytów w tekście IX. 344. Cena rb. 1 kop. 35.

II. Baraniecki M. A. Arytmetyka, wykład szczegółowy, wydanie drugie znacznie zmienione. Warszawa 1894, str. LXIV. 408. Cena rb. 1.35.

III. Danielewicz A. B. Podstawy matematyczne ubezpieczeń życiowych. Warszawa 1896, str. 335. Tablic X. Cena rb. 2.

IV. Witkowski August. Zasady Fizyki. Tom II zeszyt pierwszy. Warszawa 1897 w 8-ce str. 301. Cena rb. 1 kop. 35.

V. Kowalczyk J. O sposobach obliczania przeszkód biegu ciał niebieskich. Warszawa 1901, str. 624. Tablic III. Cena rb. 7 kop. 50.

VI. Schur F. Podręcznik geometryi analitycznej, przekład z niemieckiego przez T. Łopuszańskiego. Warszawa 1901, str. 249 z licznemi rysunkami w tekście. Cena rb. 1.

VII. Feldblum M. Geometrya wykreślna. Warszawa. 1902. str. XVI, 325 z 172 rysunkami w tekście. Cena rb. 2.

VIII. Danielewicz A. B. Metoda najmniejszych kwadratów. Warszawa 1904, str. XII, str. XII, 186. Tablic IV. Cena rb. 1 kop. 20.

IX. Witkowski August. Zasady Fizyki. Tom II, zeszyt drugi. Warszawa 1904. Cena rb. 1 kop. 35.

X. Folkierski Wł. Zasady Rachunku różniczkowego całkowego. Wydanie II. Tom I. Warszawa 1904. Cena rb. 2 kop. 40.

XI. Witkowski August. Zasady Fizyki. Tom I, wydanie drugie. Warszawa 1904. Cena rb. 2.

XII. Merczyng K. Teorya prądu elektrycznego. Warszawa 1905, 8-o, str. 92. Cena 75 kop.

Digitized by Google

WIADOMOŚCI
MATEMATYCZNE.

Redaktor i Wydawca

S. DICKSTEIN.

TOM X.

Zeszyt 4—5—6.

WARSZAWA.
Druk Józefa Sikorskiego, Warecka Nr. 14.

1906

Digitized by Google

Treść Zeszytu.

O6, Q2. S. Kwietniewski. O powierzchniach równych nachyleń w przestrzeni czterowymiarowej w zastosowaniu do teoryi krzywych płaskich.
Sur les surfaces d'égale pente dans l'espace à quatre dimensions avec l'application à la théorie des courbes planes 129 167

R. Merecki. Okres „dzienny" temperatury powietrza podczas nocy podbiegunowej.
Le période „diurne" de ta témperature de l'air pendant la nuit arctique . . . . . 169 - 180

W. Smosarski. Prace M. Margulesa o wahaniach peryodycznych ciśnienia barometrycznego.
Les travaux de M. Margules sur les oscillations périodiques de la pression barométrique . . . . . 181—207

V10. W. Gorczyński Wiadomość o organizacyi służby meteorologicznej włoskiej
Note sur l'organisation du service météorologique italien . . . . . 209—221

Przegląd literatury. Bibliografia
(Analyses et Comptes rendus. Bibliographie).

V10. F. Kucharzewski. Nowsze poglądy na zasady Mechaniki. (S. D.) 223

V10. G. H. Niewenglowski. Les Mathématiques et la Médicine (S. D.) 216 225

M1 M2 L. H. B Guccia. 1) Un théorème sur les courbes algebriques planes d'ordre *n*. 2) Un théorème sur les surfaces algébriques d'ordre *n*. 3) Sopra una nuova espressione del ordine e della classe di una curva gobba algebrica (S. D.) . . . . . 225—226

S6, T2. T. Levi-Civita. Sulla penetrazione dei proiettili nei mezzi solidi. (S. D.) . . . . . 226 - 267

V10. G. Veronese. Il vero nella Matematica. (S. D.) . . 229—231

KRONIKA. — CHRONIQUE.

Akademia Umiejętności w Krakowie . . . . . 232—236
Towarzystwo Kursów naukowych w Warszawie 236
Komitet bibliografii i studyów astronomicznych 237

Skorowidz alfabetyczny nazwisk 238 259
Index alphabétique des noms.

DODATEK (z osobną paginacyą) — SUPPLÉMENT.

Sprawozdania z posiedzeń Koła matematyczno-fizycznego w Warszawie, redagowane przez L. Zarzeckiego. Rok 1906/7.
Comptes rendus des séances des Cercle mathématique et physique à Varsovie, rédigés par L. Zarzecki, Anné 1906/7. . . . . 1—23

Digitized by Google

STEFAN KWIETNIEWSKI.

O powierzchniach równych nachyleń w przestrzeni czterowymiarowej,

w zastosowaniu do teoryi krzywych płaskich.

WSTĘP.

Zarówno konstrukcyjne, jak i analityczne traktowanie krzywych algebraicznych skłania nas do wprowadzenia, jako rozwiązania zadań o przecięciach, obok punktów rzeczywistych, także punktów urojonych. Każdy punkt urojony płaszczyzny wyraża się analitycznie za pomocą dwóch liczb zespolonych, oznaczających spółrzędne:

$$x = x_1 + ix_3, \quad y = x_2 + ix_4;$$

geometrycznie oznacza się go za pomocą dwóch par eliptycznej inwolucyi punktów na prostej, przyczem jeden z punktów podwójnych jest punktem danym, drugi jest punktem urojonym sprzężonym z pierwszym. Liczbę punktów na płaszczyźnie musimy przyjąć równą ∞^4, jeżeli przez symbol ∞^1 oznaczymy liczbę punktów rzeczywistych prostej rzeczywistej, lub też, co na jedno wyjdzie, liczbę wielkości rzeczywistych, leżących między $-\infty$ i $+\infty$[1]. W rzeczy samej punkt urojony xy jest zależny od czte-

---

[1]) Układ nazywa się jednowymiarowym, t. j. zawiera ∞^1 elementów, jeżeli elementy jego dadzą się podporządkować w sposób jednoznaczny i ciągły punktom rzeczywistym prostej rzeczywistej.

Digitized by Google

rech zmiennych rzeczywistych x_1, x_2, x_3, x_4, z których każda może przyjąć wszystkie ∞^1 wartości rzeczywiste, co razem daje ∞^4 różnych grup po cztery wielkości w każdej. Do tegoż samego rezultatu prowadzi także określenie geometryczne punktu urojonego. Układ punktów urojonych płaszczyzny (także z włączeniem rzeczywistych) jest więc czterowymiarowym. Te ∞^4 punktów urojonych układają się po ∞^2 na każdej z ∞^2 prostych rzeczywistych płaszczyzny tak, że przez każdy punkt urojony przechodzi jedna i tylko jedna prosta rzeczywista.

Każda krzywa algebraiczna ma z każdą prostą skończoną ilość punktów wspólnych; niektóre z tych prostych — wogóle także ∞^2 — przecinają krzywą w punktach urojonych: z tego wypada, że każda krzywa algebraiczna powinna mieć ∞^2 punktów urojonych (takąż samą ilość łącznie z punktami rzeczywistemi). Zachodzi teraz pytanie, czy można dla jakiejkolwiek, a więc niealgebraicznej linii krzywej, dowolnie wyrysowanej na płaszczyźnie, określić geometrycznie jej nierzeczywiste przecięcia z linią prostą; czy można więc w tem samem znaczeniu co krzywej algebraicznej, przydać jej ∞^2 punktów urojonych?

Pominąwszy rozbiór analityczny tego pytania, możnaby na zasadzie określenia krzywych algebraicznych, podanego przez Grassmanna[1], uważać daną krzywą jako granicą krzywej algebraicznej, mającej z pierwszą nieograniczenie wiele punktów wspólnych. Otrzymalibyśmy w ten sposób żądane ∞^2 punktów urojonych, ale tylko wtedy, jeżeli granica taka rzeczywiście istnieje, co nie jest wcale konieczne. Ponieważ nadto krzywe alge-

---

[1]) „Wenn die Lage eines beweglichen Punctes x in der Ebene dadurch beschränkt ist, dass ein Punct und eine Gerade, welche durch Constructionen vermittelst des Lineals aus jenem Puncte x und einer Reihe fester Puncte und Geraden hervorgehen, zusammenliegen sollen (d. h. der Punct in der Geraden liegen soll): so beschreibt der Punct x ein algebraisches Punct-Gebilde, und zwar vom n-ten Grade, wenn bei jenen Constructionen der bewegliche Punct n mal angewandt ist". (Grassmann, Grundzüge zu einer rein geometrischen Theorie der Curven, Crelle, Journ. f. Math. Bd. 31). To określenie jest prawdziwe i dla elementów urojonych.

Digitized by Google

braiczne wyższego rzędu wogóle nie dadzą się ściśle wykreślić za pomocą cyrkla i linijki, a sposoby przybliżonego wykreślenia ich punktów urojonych nie były jeszcze, o ile wiem, podane, więc pytanie wyżej postawione nie jest jeszcze rozstrzygnięte.

Zadajmy sobie pytanie pokrewne: czy każde kontynuum, zawierające ∞^2 punktów urojonych płaszczyzny (z włączeniem nie więcej niż ∞^1 rzeczywistych), może być uważane jako linia krzywa, a jeżeli nie — to jakie warunki powinno w tym celu wypełniać?

Dopóki od rzeczywistej gałęzi linii krzywej nie wymagamy nic więcej, jak tylko to, żeby zawierała ∞^1 punktów rzeczywistych, dopóty nie mamy żadnej zasady, stawiać ją w związku z pewnym określonym układem ∞^2 punktów urojonych; można raczej równie dobrze każdy układ ∞^2 punktów urojonych nazwać linią krzywą. Będziemy jednak w ściślejszem znaczeniu nazywali gałęzią rzeczywistą linii krzywej taki układ punktów rzeczywistych, który: 1) przynajmniej oddziałami jest ciągły; 1) przynajmniej oddziałami ma w każdym punkcie jednę i tylko jednę styczną; 3) kierunek stycznej zmienia się, przynajmniej w oddziałach, statecznie.

Rozszerzymy te warunki i na części urojone krzywej, odpowiemy więc na drugie pytanie następującem określeniem: układ ∞^2 punktów urojonych (łącznie z nie więcej niż ∞^1 rzeczywistych) nazywa się wtedy i tylko wtedy linią, jeżeli wypełnia powyższe warunki.

Określenie to wyrazimy w § 5 innemi słowami. Z §§ 3, 5 i 8 wynika, że jest ono rzeczywiście wystarczające do ścisłego określenia geometrycznego urojonych punktów przecięcia linii krzywych, danych przez ich gałęzie rzeczywiste lub tylko ich części, oraz do wynajdywania konstrukcyjnego tych punktów z przybliżeniem; pozostawiamy jednak na razie nierozstrzygniętem pytanie, czy za pomocą konstrukcyi wskazanej można osiągnąć dowolny stopień przybliżenia, oraz czy ta metoda w pewnych przypadkach nie zawodzi.

Digitized by Google

Ażeby badanie ułatwić, i ażeby zarazem przez analogię nabrać wyobrażenia o budowie części urojonych krzywej, będziemy używali odwzorowania rzeczywistego elementów urojonych ścisłego i wyrazistego: punkty urojone mają być przedstawione za pomocą punktów rzeczywistych jednoznacznie i statecznie. Ponieważ ciąg punktów urojonych płaszczyzny jest czterowymiarowy, można więc osiągnąć jego przedstawienie jednoznaczne i stateczne za pomocą przestrzeni czterowymiarowej. Każdy punkt urojony $x = x_1 + ix_3$, $y = x_2 + ix_4$ płaszczyzny wyobrażamy przez punkt rzeczywisty $x_1 x_2 x_3 x_4$ przestrzeni czterowymiarowej, przyczem osi spółrzędnych X_1, X_2 kładziemy na osi X, Y. To podporządkowanie punktów urojonych i rzeczywistych może być w prosty sposób określone geometrycznie i nie jest niczem innem jak tylko odpowiedniem ustawieniem ∞^2 płaszczyzn Gaussa, z których każda przedstawia urojone i rzeczywiste punkty jednej z prostych płaszczyzny danej.

W tem odwzorowaniu punkty urojone (łącznie z rzeczywistemi) krzywych płaskich przedstawiają się przez punkty rzeczywiste pewnej powierzchni[1] przestrzeni czterowymiarowej; powierzchnie te mają tę własność wspólną, że wszystkie płaszczyzny styczne do nich są płaszczyznami równych nachyleń względem pewnej płaszczyzny stałej (§ 5). Zaczniemy więc od płaszczyzn równych nachyleń.

§ 1. Płaszczyzny równych nachyleń.

Zakresem naszych działań będzie przestrzeń euklidesowa czterowymiarowa, którą oznaczymy przez R_4; R_4 ma w nieskończoności przestrzeń zupełną (Riemannowską)[2] trójwymiarową, którą oznaczamy przez R_3^∞.

---

[1]) Powierzchniami nazywać będziemy w tej pracy ciągi ∞^2 punktów (rzeczywistych), jakkolwiek niektórzy autorowie nazywają powierzchniami w przestrzeni n-wymiarowej twory o $(n-1)$ lub w ogóle o $(n-\nu)$ wymiarach.

[2]) G. Veronese, Fondamenti di Geometria a piu dimensioni, l. III cap. 1; § 3. Tamże są dowodzenia innych twierdzeń, wymienionych w tym §.

Digitized by Google

Kątami dwóch płaszczyzn nazywamy kąt największy i najmniejszy jaki tworzą proste, leżące na jednej z tych płaszczyzn, ze swojemi rzutami prostopadłemi na drugą płaszczyznę.

Jeżeli w szczególności oba te kąty są sobie równe, wtedy wszystkie proste tworzą ze swojemi rzutami kąty równe, i płaszczyzny takie nazywają się płaszczyznami równych nachyleń.

Płaszczyzny równych nachyleń A, B mają w nieskończoności proste a_∞, b_∞ równych odległości. Stąd wypada:

Dwie płaszczyzny równych nachyleń nie mogą się nigdy przecinać wzdłuż linii prostej nie leżącej w nieskończoności. Bo gdyby one miały linię przecięcia, to obie zawierałyby także jej punkt nieskończenie daleki, więc proste a_∞ i b_∞ przecinałyby się, co jest jednak niemożliwe, ponieważ są one prostemi równych odległości.

Układ płaszczyzn równych nachyleń przestrzeni R_4 względem płaszczyzny A jest oznaczony przez układ prostych równych odległości przestrzeni R_2^∞ względem a_∞. Takich prostych jest ∞^2; przez każdą z nich można poprowadzić ∞^2 płaszczyzn w R_4, otrzymamy więc w R_4 ∞^4 płaszczyzn równych nachyleń względem A. Płaszczyzny, łączące jakikolwiek punkt przestrzeni R_4 ze wszystkiemi liniami równych odległości względem a_∞, są płaszczyznami równych nachyleń względem A; przez każdy punkt przestrzeni R_4 przechodzi więc ∞^2 płaszczyzn tego układu.

Przez punkt w nieskończoności każdej prostej przestrzeni R_4 przechodzą dwie proste równych odległości względem a_∞; a zatem przez każdą prostą lub przez dwa punkty przestrzeni R_4 przechodzą dwie płaszczyzny tegoż układu.

Jeżeli punkt P leży na płaszczyźnie E, to przez P przechodzi ∞^1 prostych płaszczyzny E, otrzymamy więc ∞^1 takich płaszczyzn układu, które przechodzą przez P i przecinają E wzdłuż linij prostych. Wogóle układ zawiera ∞^2 takich

Digitized by Google

płaszczyzn, które przecinają E wzdłuż linii prostych, pozostałe płaszczyzny układu mają z płaszczyzną E tylko po jednym punkcie wspólnym.

II. Płaszczyzny równych nachyleń względem danej płaszczyzny tworzą dwa układy tego rodzaju, że dwie płaszczyzny tegoż samego układu są także płaszczyznami równych nachyleń jedna względem drugiej; przez każdą prostą przechodzi jedna płaszczyzna jednego i jedna drugiego układu. Dwa takie układy będziemy nazywali sprzężonemi.

Ta ostatnia własność będzie dowiedziona w § 2.

§ 2. Warunek analityczny równości nachyleń dwóch płaszczyzn.

Ażeby znaleść warunek analityczny równości nachyleń dwóch płaszczyzn przestrzeni R_4, wprowadźmy układ spółrzędnych prostokątnych $0, X_1, X_2, X_3, X_4$ i oznaczmy najprzód oba kąty, jakie tworzy dowolnie obrana płaszczyzna A z płaszczyzną X_1X_2.

Równania płaszczyzny A niech będą:

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0,$$
$$b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0,$$

(przyczem wszystkie spółczynniki przyjmiemy rzeczywiste); albo po wyrugowaniu x_4, względnie x_2:

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_2 &= A_0 + A_1x_1 + A_3x_3, \\ x_4 &= B_0 + B_1x_1 + B_3x_3; \end{aligned}$$

są to także równania rzutów prostopadłych płaszczyzny A na przestrzenie $X_1X_3X_2$ i $X_1X_3X_4$.

Poprowadźmy przez 0 płaszczyznę $A'//A$; jej równania będą:

$$(2) \qquad \begin{aligned} x_2 &= A_1x_1 + A_3x_3, \\ x_4 &= B_1x_1 + B_3x_3, \end{aligned}$$

Digitized by Google

Na A' obierzmy jakąkolwiek prostą s, przechodzącą przez przez 0, i oznaczmy kąt $\theta = (ss')$ pomiędzy prostą s i jej rzutem s' na płaszczyznę x_1x_3. Wartości najmniejsza i największa, jakie przyjmie θ przy wszelkich możliwych położeniach prostej s, dadzą nam kąty szukane.

Niech będzie:

(3) $$x_3 = Cx_1,$$

równanie prostej s' na płaszczyźnie X_1X_3; jest to zarazem równanie przestrzeni trójwymiarowej, przechodzącej przez s' prostopadle do płaszczyzny X_1X_3. Przestrzeń ta zawiera prostą s, a zatem równanie (3) w połączeniu z równaniami (2) daje prostą s.

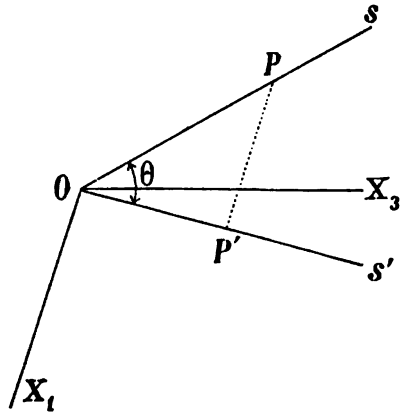


Fig. 1.

Niech będzie punkt P' na s' rzutem punktu P na s; spółrzędne jego są: x_1, 0, Cx_1, 0; ponieważ jednak położenie jego na s jest obojętne przy oznaczaniu kąta, przyjmiemy więc $x_1 = 1$ Spółrzędne punktu P_1 będą:

$$x'_1 = 1, \quad x'_2 = 0, \quad x'_3 = C, \quad x'_4 = 0;$$

zaś spółrzędne punktu P:

$$x_1 = 1, \; x_2 = A_1 + A_3C, \; x_3 = C, \; x_4 = B_1 + B_3C.$$

Z trójkąta prostokątnego OPP' znajdziemy:

Digitized by Google

$$\overline{OP}^2 = x'_1{}^2 + x'_2{}^2 + x'_3{}^2 + x'_4{}^2 = 1 + C^2,$$

$$\overline{PP'}^2 = (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3) + (x_4 - x'_4)^2,$$

$$= (A_1 + A_3 C)^2 + (B_1 + B_3 C)^2,$$

$$(4) \quad \operatorname{cotg}^2\theta = \operatorname{cotg}^2((POP') = \frac{\overline{OP}^2}{\overline{PP'}^2} = \frac{1 + C^2}{(A_1 + A_3 C)^2 + (B_1 + B_3 C)^2}.$$

Wartość największą i najmniejszą tego ostatniego wyrażenia znajdziemy, przyjmując pochodną jego względem C za zero:

$$\frac{d\operatorname{cotg}^2\theta}{dC} = \frac{2\,[(A_1 + A_3 C)^2 + (B_1 + B_3 C)^2]\,C - 2(1 + C^2)\,[(A_1 + A_3 C)A_3 + (B_1 + B_3 C)B_3]}{[(A_1 + A_3 C)^2 + (B_1 + B_3 C)^2]^2},$$

Uczyniwszy licznik tego ułamka równym 0 i po rozwiązaniu względem C, otrzymamy:

$$(5) \quad C = \frac{-A_1{}^2 + A_3{}^2 - B_1{}^2 + B_3{}^2 \pm \sqrt{(A_1{}^2 - A_3{}^2 + B_1{}^2 - B_3{}^2) + 4(A_1 A_3 + B_1 B_3)^2}}{2\,(A_1 A_3 + B_1 B_3)}.$$

Podstawiwszy to wyrażenie w równanie (4), otrzymalibyśmy kąty szukane. Zajmuje nas jednak tylko ten przypadek, w którym oba kąty są sobie równe. Będzie to miało miejsce wtedy, jeżeli wyrażenie pod pierwiastkiem będzie równe 0; a ponieważ to wyrażenie jest sumą kwadratów dwóch wielkości rzeczywistych, przeto każda z nich z osobna musi być zerem. Będzie więc:

$$A_1{}^2 - A_3{}^2 + B_1{}^2 - B_3{}^2 = 0,$$

$$A_1 A_3 + B_1 B_3 = 0.$$

Rozwiązując te równania względem B_1, B_3, otrzymamy:

$$B_1 = \pm A_3; \quad B_3 = \mp A_1.$$

Podstawiwszy te wartości w równanie (5), otrzymamy dla C wartość nieoznaczoną $^0/_0$, jak to było do przewidzenia.

Znaleźliśmy więc: II. Równanie (1) przedstawia wtedy i tylko wtedy płaszczyznę równych na-

Digitized by Google

chyleń względem płaszczyzny X_1X_3, jeżeli albo

(7) $$B_1 = A_3, \quad B_3 = -A_1,$$

albo też:

(8) $$B_1 = -A_3, \quad B_3 = A_1,$$

Kąt nachylenia takiej płaszczyzny względem X_1X_3 otrzymamy z równania (4):

(9) $$\operatorname{cotg}^2\theta = \frac{1}{A_1^2 + A_3^2}; \quad \cos^2\theta = \frac{1}{1 + A_1^2 + A_3^2}.$$

Jeżeli z równań płaszczyzny równych nachyleń względem X_1X_3:

$$x_2 = A_1x_1 + A_3x_3,$$
$$x_4 = -A_3x_1 + A_1x_3,$$

wyrugujemy x_3, względnie x_1, to równania te przybiorą postać następującą:

$$x_1 = \frac{A_1A_2 - A_3x_4}{A_1^2 + A_3^2}; \quad x_3 = \frac{A_3x_2 + A_1x_4}{A_1^2 + A_3^2};$$

skąd wypada, że każda płaszczyzna równych nachyleń względem X_1X_3 jest także płaszczyzną równych nachyleń względem X_2X_4 (w razie wypełnienia warunków (7) dowodzenie jest takież samo).

Dla kąta nachylenia θ' tej płaszczyzny względem X_2X_4 znajdziemy:

$$\cos^2\theta' = \frac{1}{1 + \frac{A_1^2 + A_3^2}{(A_1^2 + A_3^2)^2}} = \frac{A_1^2 + A_3^2}{1 + A_1^2 + A_3^2} = \sin^2\theta,$$

a zatem:

(9a) $$\theta + \theta' = \frac{1}{2}\pi.$$

Ponieważ wszystkie linie proste płaszczyzny A tworzą ze swojemi rzutami kąty równe, przeto wszystkie odcinki w rzucie skracają się w tym samym stosunku, i III. każda figura zamienia się na figurę podobną.

Digitized by Google

IV. Rzut prostopadły na płaszczyznę równych nachyleń względem pierwszej płaszczyzny jest odwzorowaniem podobnem.

W § 1 zrobiliśmy wzmiankę, że wszystkie płaszczyzny równych nachyleń względem pewnej płaszczyzny (np. X_1X_3) tworzą dwa takie układy (1), że wszystkie płaszczyzny każdego z nich są wzajemnie płaszczyznami równych nachyleń. Dowiedziemy, że wszystkie płaszczyzny, których równania wypełniają warunek (8), są względem siebie płaszczyznami równych nachyleń; w takiż sam sposób dowiedlibyśmy, że płaszczyzny, odpowiadające warunkowi (7), stanowią drugi układ.

Znajdźmy kąty pomiędzy dwiema jakiemikolwiek płaszczyznami, związanemi warunkiem (8). W tym celu poprowadźmy równoległe do nich płaszczyzny A i B przez punkt 0; ich równania niech będą:

$$\text{(A)} \qquad x_2 = A_1x_1 + A_3x_3, \quad x_4 = -A_3x_1 + A_1x_3,$$

$$\text{(B)} \qquad x'_2 = B_1x'_1 + B_3x'_3, \quad x'_4 = -B_3x'_1 + B_1x'_3.$$

W płaszczyznie A opisujemy koło, którego środkiem jest 0, a promieniem 1. Jego równania są (A) i:

$$(10) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1.$$

Z jakiegokolwiek punktu P tego koła poprowadźmy prostopadłą do płaszczyzny B. Długość jej δ będzie równa wstawie kąta, zawartego pomiędzy prostą OP i jej rzutem na B; otrzymamy więc kąty szukane, czyniąc δ największem i najmniejszem. Ponieważ:

$$(11) \quad F = \delta^2 = (x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + (x'_3 - x_3)^2 + (x'_4 - x_4)^2,$$

więc przyjmując za zmienne niezależne x_1, x'_1, x'_3, otrzymamy wartości krańcowe na δ, czyniąc pochodne cząstkowe funkcyi F względem tych trzech zmiennych równemi 0:

$$(12) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_4} \cdot \frac{\partial x_4}{\partial x_1} = 0.$$

Digitized by Google

$$(13)\qquad \frac{\partial F}{\partial x'_1}+\frac{\partial F}{\partial x'_2}\cdot\frac{\partial x'_2}{\partial x'_1}+\frac{\partial F}{\partial x'_4}\cdot\frac{\partial x'_4}{\partial x'_1}=0.$$

$$(14)\qquad \frac{\partial F}{\partial x'_3}+\frac{\partial F}{\partial x'_2}\cdot\frac{\partial x'_2}{\partial x'_3}+\frac{\partial F}{\partial x'_4}\cdot\frac{\partial x'_4}{\partial x'_3}=0.$$

Z równań (A), (B) i (10) znajdziemy:

$$\frac{\partial x'_2}{\partial x'_1}=B_1;\ \frac{\partial x'_4}{\partial x'_1}=-B_3;\ \frac{\partial x'_2}{\partial x'_3}=B_3;\ \frac{\partial x'_4}{\partial x'_3}=B_1,$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_1}=-\frac{x_1+A_1x_2-A_3x_4}{x_3+A_3x_2+A_1x_4};\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1}=A_1-A_3\frac{x_1+A_1x_2-A_3x_4}{x_3+A_3x_2+A_1x_4};$$

$$\frac{\partial x_4}{\partial x_1}=-A_3-A_1\frac{x_1+A_1x_2-A_3x_4}{x_3+A_3x_2+A_1x_4}.$$

Jeżeli podstawimy te wartości w równania (12), (13) i (14) i obliczymy z (11) pochodne cząstkowe funkcyi F, to dostaniemy następujące równania:

$$(15)\qquad x'_1-x_1+B_1(x'_2-x_2)-B_3(x'_4-x_4)=0.$$

$$(16)\qquad x'_3-x_3+B_3(x'_2-x_2)+B_1(x'_4-x_4)=0.$$

$$x'_1-x_1+(x'_2-x_2)\left(A_1-A_3\frac{x_1+A_1x_2+A_3x_4}{x_3+A_3x_2+A_1x_4}\right)$$
$$+(x'_4-x_4)\left(-A_3-A_1\frac{x_1+A_1x_2-A_3x_4}{x_3+A_3x_2+A_1x_4}\right)$$
$$(17)\qquad -(x'_3-x_3)\frac{x_1+A_1x_2-A_3x_4}{x_3+A_3x_2+A_1x_4}=0.$$

Z (A), (B), (15) i (16) można wyrazić x_2, x_4, x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 przez x_1 i x_3 i podstawić w równanie (17). Ale wtedy otrzymamy równanie tożsamościowe względem x_1 i x_3, skąd wypada prawdziwość twierdzenia.

Digitized by Google

§ 3. Powierzchnie równych nachyleń. Ich krzywizna.

B. Powierzchnie, których wszystkie płaszczyzny styczne są między sobą płaszczyznami równych nachyleń, nazywamy powierzchniami równych nachyleń.

Istnienie takich powierzchni nie jest widoczne samo przez się, ale konstrukcya, podana w § 8, może służyć za dowód ich istnienia. Udowodniwszy, czy przypuściwszy, istnienie powierzchni równych nachyleń, możemy znaleść ich wyrażenia analityczne.

Niech będzie daną jakakolwiek powierzchnia za pomocą dwóch równań:

$$(1)\qquad \begin{aligned} F_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 0, \\ F_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 0; \end{aligned}$$

chcemy znaleść równania płaszczyzny stycznej w punkcie $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ tej powierzchni. W tym celu poprowadźmy na powierzchni jakąkolwiek krzywą przez P i znajdźmy jej styczną w tym punkcie. Przypuśćmy, że cztery spółrzędne x_i są wyrażone za pomocą zmiennej niezależnej t; tak otrzymane cztery równania przedstawiają linię krzywą; jeżeli ta krzywa ma leżeć na powierzchni, to równania (1) powinny stać się tożsamościami, jeżeli w nich x_i wyrazimy za pomocą t. Stąd wypada, że równania te można różniczkować względem t:

$$\sum_{i=1}^{i=4} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = 0; \qquad \sum_{i=1}^{i=4} \frac{\partial F_2}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = 0.$$

W równaniach tych można dt uważać zą ilość stałą, a dx_i są proporcyonalne różnicom $\xi_i - x_i$, jeżeli ξ_i oznaczają spółrzędne bieżące stycznej. Równania powyższe można więc napisać w następującej formie:

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{i=4} (\xi_i - x_i) \frac{\partial F_1}{\partial x_i} = 0; \qquad \sum_{i=1}^{i=4} (\xi_i - x_i) \frac{\partial F_2}{\partial x_i} = 0.$$

Digitized by Google

Styczna każdej krzywej, leżącej na powierzchni i przechodzącej przez P, musi w każdym razie czynić zadość równaniom (2); są to jednak równania pewnej płaszczyzny, którą uważać przeto musimy za płaszczyznę styczną do powierzchni w punkcie P.

Równania (2) staną się wyraźniejszemi, jeżeli wyrugujemy z nich ξ_4, względnie ξ_2:

$$(3)\quad \begin{aligned} \xi_2 &= -\xi_1 \frac{\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x_4} - \frac{\partial F_1}{\partial x_4}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x_1}}{\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x_4} - \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x_4}} - \xi_4 \frac{\frac{\partial F_1}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x_4} - \frac{\partial F_1}{\partial x_4}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x_3}}{\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x_4} - \frac{\partial F_1}{\partial x_4}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x_2}} + M, \\ \xi_4 &= -\xi_1 \frac{\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x_3} - \frac{\partial F_1}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x_1}}{\frac{\partial F_1}{\partial x_4}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x_3} - \frac{\partial F_1}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x_4}} - \xi_2 \frac{\frac{\partial F_1}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x_3}}{\frac{\partial F_1}{\partial x_4}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x_4}} + N. \end{aligned}$$

M i N są tutaj niezależne od ξ_i. Jeżeli wszystkie płaszczyzny, przedstawione przez równania (3), mają być płaszczyznami równych nachyleń względem X_1X_3 i pomiędzy sobą, wtedy musi być dla wszelkich wartości a_i, odpowiadających równaniom (1), na zasadzie twierdzenia II § 2:

$$(4)\quad \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x_3} - \frac{\partial F_1}{\partial x_4}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \mp\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right),$$

i

$$(5)\quad \frac{\partial F_1}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x_4} - \frac{\partial F_1}{\partial x_4}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x_3} = \pm\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right);$$

przyczem dla całej powierzchni służą albo tylko górne, albo tylko dolne znaki.

Równania różniczkowe (4) i (5) otrzymują postać szczególnie prostą, jeżeli równania powierzchni są dane w następującej formie:

$$(6)\qquad x_2 = f_1(x_1, x_3); \quad x_4 = f_2(x_1, x_3).$$

Tu jest $F_1 = x_2 - f_1$, $F_2 = x_4 - f_2$, i zamiast (4) i (5) dostaniemy następujące warunki konieczne i wystarczające, V. ażeby

Digitized by Google

powierzchnia (6) była powierzchnią równych nachyleń: albo

$$(7) \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1};$$

albo też:

$$(8) \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}.$$

Oczywiście istnieją takie funkcye f_1 i f_2, które zadosyć czynią jednemu z warunków powyższych; w ten sposób dowiedliśmy istnienia powierzchni równych nachyleń sposobem analitycznym.

Z twierdzenia IV (§ 2) wynika:

VI. Odwzorowanie powierzchni równych nachyleń na płaszczyznę styczną, lub na płaszczyznę równych nachyleń względem niej, za pomocą rzutu prostopadłego, jest podobne.

Zajmijmy się krzywizną tego rodzaju powierzchni. W tym celu rozpatrzymy krzywą, nazwaną przez Kommerella[1] charakterystyką powierzchni w danym punkcie. Jest to przecięcie stożkowe, jakie powstaje na płaszczyźnie normalnej w danym punkcie przez przecięcie z płaszczyznami normalnem i sąsiedniemi.

Na znalezienie charakterystyki Kommerell podaje metodę następującą:

Układ spółrzędnych niech będzie tak wybrany, ażeby płaszczyzna X_1X_2 była styczna do powierzchni w początku spółrzędnych; wtedy równania powierzchni w najbliższem sąsiedztwie początku spółrzędnych można doprowadzić do postaci:

$$(9) \qquad \begin{aligned} 2x_2 &= ax_1^2 + 2bx_1x_3 + cx_3^2, \\ 2x_4 &= \alpha x_1^2 + 2\beta x_1x_3 + \gamma x_3^2, \end{aligned}$$

gdzie potęgi wyższe zmiennych zostały odrzucone.

---

[1]) K. Kommerell, Die Krümmung der zweidimensionalen Gebilde im ebenen Raum von vier Dimensionen. Diss. Tübingen 1897.

Digitized by Google

Niech będzie:

$$(10)\qquad \begin{gathered} D_{11} = ac-b^2;\ D_{22} = a\gamma-\beta^2;\ D_{12} = a\gamma+ac-2b\beta; \\ R = D^2_{12}-4D_{11}D_{22}; \end{gathered}$$

wtedy charakterystyka w początku spółrzędnych będzie hyperbolą, parabolą lub elipsą, stosownie do tego, czy R będzie dodatnie, zero- lub ujemne. Kierunki jej osi daje równanie następujące:

$$(12)\qquad D_{12}x_2^2+2(D_{22}-D_{11})x_2x_4-D_{12}x_4^2=0;$$

zaś równania samej charakterystyki będą:

$$(13)\qquad \begin{gathered} \xi_1=0;\ \xi_2=\frac{\beta\lambda^2+(a-\gamma)\lambda-\beta}{(a+\beta\lambda)(b+c\lambda)-(\beta+\gamma\lambda)(a+b\lambda)}, \\ \xi_3=0;\ \xi_4=-\frac{b\lambda^2+(a-c)\lambda-b}{(a+\beta\lambda)(b+c\lambda)-(\beta+\gamma\lambda)(a+b\lambda)}. \end{gathered}$$

Przyjęliśmy tu $x_3/x_1=\lambda$. Każdej wartości λ, czyli każdemu elementowi liniowemu, jaki przestrzeń normalna $x_3-\lambda x_1=0$ wycina na powierzchni, odpowiada jeden punkt charakterystyki.

Zastosujmy te wzory do naszej powierzchni. Jeżeli będzie ona daną pod postacią (6), to, rozwijając x_2 i x_4 na szeregi Taylora, będziemy mieli:

$$\begin{aligned} x_2 &= f_1(x_1,x_3) = f_1(0,0)+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0 x_1+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right)_0 x_3+ \\ &\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}\right)_0 x_1^2+\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1\partial x_3}\right)_{00} x_1x_3+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3^2}\right)_0 x_3^2+\dots \\ x_4 &= f_2(x_1,x_2) = f_2(0,0)+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_0 x_1+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)_0 x_3+ \\ &\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2}\right)_0 x_1^2+\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1\partial x_3}\right)_{0,0} x_1x_3+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2}\right)_0 x_3^2+\dots \end{aligned}$$

czyli, ponieważ powierzchnia jest styczna do płaszczyzny X_1X_3 w punkcie 0:

$$(14)\qquad \begin{gathered} 2x_2=\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}\right)x_1^2+2\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1\partial x_3}\right)_{0,0}x_1x_3+\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3^2}\right)_0 x_3^2, \\ 2x_4=\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2}\right)_0 x_1^2+2\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1\partial x_3}\right)_{0,0}x_1x_3+\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3^2}\right)_0 x_3^2. \end{gathered}$$

Digitized by Google

W pochodnych cząstkowych należy po zróżniczkowaniu przyjąć $x_1 = x_3 = 0$. Pochodne cząstkowe, występujące w równaniach (14), nie są niezależne od siebie, gdyż różniczkując równania (7) albo (8), otrzymamy:

$$(15)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3^2} &= \mp \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}, \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} &= \mp \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_3} = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3^2}; \end{aligned}$$

będzie więc w równaniach (9):

$$(16)\qquad a = -c = \pm\beta = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}\right)_0; \quad \alpha = \mp b = -\gamma = \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2}\right)_0;$$

a w (10) i (11):

$$(17)\qquad D_{11} = -(a^2 + \alpha^2),\ D_{22} = -(a^2 + \alpha^2),\ D_{12} = 0;$$
$$R = -4(a^2 + \alpha^2)^2.$$

Widzimy już stąd, że 0 jest punktem eliptycznym powierzchni, gdyż $R < 0$; a ponieważ punkt O był obrany dowolnie na powierzchni, więc wszystkie jej punkty są eliptyczne.

Dla otrzymania kierunków osi charakterystyki, podstawiamy wartości znalezione w równanie (12):

$$2\left[-(a^2 + \alpha^2) + (a^2 + \alpha^2)\right] x_2 x_4 = 0.$$

Równanie to jest tożsamościowem dla wszystkich x_2, x_4, kierunki osi są więc nieoznaczone. Wypada stąd, że VII. charakterystyka powierzchni równych nachyleń w każdym jej punkcie jest kołem, którego środkiem jest tenże punkt, jak to zaraz zobaczymy.

Równanie tego koła otrzymamy, podstawiając wartości (16) w równanie (13) i rugując λ:

$$(18)\qquad \xi_1 = 0,\ \xi_3 = 0,\ \xi_2^2 + \xi_4^2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2}\right)_0^2}.$$

Digitized by Google

Na promień ϱ przecięcia normalnego $x_3 - \lambda x_1 = 0$ powierzchni (9) Kommerell podaje wzór następujący:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{a + 2b\lambda + c\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^2,$$

a więc w przypadku rozpatrywanym:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{a \mp 2a\lambda - a\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^2 + \left(\frac{a \pm 2a\lambda - a\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^2.$$

Wyrazy zawierające λ muszą się znosić wzajemnie, gdyż charakterystyka jest kołem ze środkiem w punkcie O. Rzeczywiście przez prosty rachunek otrzymamy:

$$\frac{1}{\varrho^2} = a^2 + b^2,$$

to znaczy: VIII. promienie krzywizny wszystkich przecięć normalnych, przechodzących przez jeden punkt powierzchni równych nachyleń, są równe między sobą i równe promieniowi charakterystyki w tym punkcie.

§ 4. Odwzorowanie punktów urojonych płaszczyzny przez punkty rzeczywiste przestrzeni czterowymiarowej; linia prosta.

Podporządkujmy mnogości czterowymiarowej punktów urojonych płaszczyzny euklidesowej $E(X_1X_2)$ mnogość czterowymiarową punktów rzeczywistych przestrzeni euklidesowej czterowymiarowej R_4 sposobem jednoznacznym i ciągłym. Obieramy przestrzeń R_4 tak, ażeby ona zawierała płaszczyznę E, i wprowadzamy dwa układy spółrzędnych prostokątnych O, XY w E zaś $O, X_1X_2X_3X_4$ w R_4 tak, ażeby osi OX_1, OX_2 upadły na osi OX, OY. Niech będą:

$$x = x_1 + ix_3, \quad y = x_2 + ix_4.$$

spółrzędne punktu urojonego P_i płaszczyzny

Digitized by Google

E, wtedy obrazem jego rzeczywistym w R_4 nazwiemy punkt P_r o spółrzędnych x_1, x_2, x_3, x_4. Obrazy punktów rzeczywistych płaszczyzny E padają na swoje pierwowzory, a punkty osi X, Y przedstawiają się za pomocą punktów płaszczyzn spółrzędnych X_1X_3, względnie X_2X_4.

Spółrzędne punktów jakiejkolwiek prostej płaszczyzny E czynią zadość równaniu następującej postaci:

$$y = ax + b, \tag{1}$$

a po podstawieniu $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$, gdzie a_1, a_2, b_1, b_2 są rzeczywiste:

$$x_2 + ix_4 = (a_1 + ia_2)(x_1 + ix_3) + b_1 + ib_2,$$

co jest możliwe tylko wtedy, jeżeli jednocześnie:

$$\begin{aligned} x_1 - a_1x_1 + a_2x_3 - b_1 &= 0, \\ x_4 - a_2x_1 - a_1x_3 - b_2 &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Równania te przedstawiają w R_4 płaszczyznę równych nachyleń względem X_1X_3 (II, § 2). IX. Wszystkie linie proste płaszczyzny E odwzorowują się więc przez układ płaszczyzn równych nachyleń w przestrzeni R_4, i odwrotnie każda płaszczyzna, której równania mają postać:

$$\begin{aligned} x_2 &= A_1x_1 + A_3x_3 + A_0, \\ x_4 &= -A_3x_1 + A_1x_3 + B_0, \end{aligned} \tag{3}$$

jest obrazem pewnej prostej płaszczyzny E.

Płaszczyzny drugiego układu równych nachyleń względem X_1X_3:

$$\begin{aligned} x_2 &= A_1x_1 + A_3x_3 + A_0 \\ x &= A_3x_1 - A_1x_3 + B_0 \end{aligned} \tag{4}$$

nie mają tej własności. W samej rzeczy, jeżeli równanie drugie pomnożymy przez i i dodamy do pierwszego, to otrzymamy:

$$x_2 + ix_4 = (A_1 + iA_3)(x_1 - ix_3) + A_0 + iB_0. \tag{5}$$

Digitized by Google

Nie jest to równanie linii prostej; $y = x_2 + ix_4$ nie jest tu wogóle funkcyą zespoloną zmiennej $x = x_1 + ix_3$; punkty P_r, których obrazy P_r leżą na płaszczyznie (4), tworzą raczej pewien szczególny łańcuch dwuwymiarowy, który moglibyśmy nazwać przeciwlinią prostą. Można jeden z tych układów równych nachyleń przekształcić na drugi, zamieniając wzajemnie zwroty dodatni i ujemny osi OX_3 lub OX_4.

Jeżeli prosta dana na E jest rzeczywista, to płaszczyzna, odwzorowująca ją w R_4, przecina płaszczyznę E wzdłuż tej linii, gdyż punkty rzeczywiste płaszczyzny E odpowiadają sobie samym.

Niech będzie:

$$y = \varkappa x + c,$$

(6)

czyli $$x_2 + ix_4 = \varkappa (x_1 + ix_3) + c,$$

równanie linii prostej a przy rzeczywistych $\varkappa$ i c, wtedy obrazem jej będzie płaszczyzna A:

(7) $$x_2 = \varkappa x_1 + c.$$

(8) $$x_4 = \varkappa x_3.$$

Równanie(7)przedstawia rzut płaszczyzny na przestrzeń $0, X_1X_2X_3$; a ponieważ ono nie zawiera x_3, więc i płaszczyzna A i jej rzut są prostopadłemi (drugiego rodzaju) do płaszczyzny X_1X_2.

Przestrzeń, dana przez równanie (8), zawiera płaszczyzny A i E i tworzy z przestrzenią $0, X_1X_2X_3$ kąt równy temu, jaki tworzy prosta a z osią X_1, i którego styczną jest $\varkappa$. W rzeczy samej, płaszczyzna X_3X_4 jest prostopadła do tych obu przestrzeni i przecina je wzdłuż osi x_3 i prostej $x_4 = \varkappa x_3$; kąt, zawarty między temi dwiema prostemi, ma styczną równą $\varkappa$.

Jeżeli, przy stałem $\varkappa$, c przyjmuje wszelkie możliwe wartości rzeczywiste, wtedy otrzymamy pęk prostych równoległych, a płaszczyzny odpowiednie są także równoległe (pierwszego rodzaju) i leżą wszystkie w jednej przestrzeni trójwymiarowej $x_4 = \varkappa x_3$. Jeżeli dalej $\varkappa$ będzie kolejno przyjmowało wszystkie wartości rzeczywiste, wtedy dostaniemy wszystkie możliwe kie-

Digitized by Google

runki prostej rzeczywistej na płaszczyznie i odpowiednie przestrzenie, należące do pęku przestrzeni, zawierających płaszczyznę X_1X_2. Przez każdy punkt urojony przechodzi jedna i tylko jedna prosta rzeczywista, i w ten sposób każdy punkt urojony płaszczyzny i każdy punkt rzeczywisty w R_4 spotkamy raz i tylko raz jeden.

Niech będą $x = a_1 + ia_3$, $y = a_2 + ia_4$ spółrzędne punktu P_i, a więc a_1, a_2, a_3, a_4 spółrzędne odpowiedniego punktu rzeczywistego P_r; wtedy obliczymy odpowiednie $\varkappa$ i c, podstawiając w równaniach (7) i (8) a_i zamiast x_i. Będzie:

$$\varkappa = \frac{a_4}{a_3}, \quad c = a_2 - \frac{a_1 a_4}{a_3}; \tag{9}$$

równania zaś płaszczyzny G, przechodzącej przez P_r i przecinającej E wzdłuż linii prostej, będą:

$$x_2 = \frac{a_4}{a_3} x_1 + a_2 - \frac{a_1 a_4}{a_3}; \tag{10}$$

$$x_4 = \frac{a_4}{a_3} x_3, \tag{11}$$

a równania prostej rzeczywistej x przechodzącej przez P_i:

$$y = \frac{a_4}{a_3} x + a_2 - \frac{a_1 a_4}{a_3}. \tag{12}$$

Omówione tutaj podporządkowanie każdego punktu urojonego P_i płaszczyzny $E(X_1X_2)$ pewnemu punktowi P_r w H_4 można opisać sposobem rzutowo-geometrycznym. A mianowicie: jeżeli, przyjmując P_r za środek, poprowadzimy przestrzeń trójwymiarową, mającą promień krzywizny równy 0, albo —co na jedno wyjdzie—jeżeli połączymy P_r z urojoną kulą zasadniczą w nieskończoności R_4 przez przestrzeń trójwymiarową (analogiczną do stożka), której równaniem będzie:

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 + (x_4 - a_4)^2 = 0, \tag{13}$$

wtedy możemy znaleść jej punkty przecięcia z prostą g, utożsa-

Digitized by Google

miając w równaniach (12) i (13) x i y z x_1 i x_3, i przyjmując $x_3 = x_4 = 0$. Otrzymamy:

$$x = a_1 \pm ia_3 \; ; \quad y = a_2 \pm ia_4 .$$

Oczywiście przestrzeń (13) wycina z płaszczyzny (10), (11) parę linij minimalnych z punktem rzeczywistym P_r; X. G jest więc płaszczyzną Gaussa dla prostej g.

Każdy punkt P_r i symetryczny do niego względem płaszczyzny E, punkt P_r' dają w ten sposób parę punktów urojonych sprzężonych P_i, P_i'. Ażeby módz rozróżniać oba te punkty, ażeby więc punktowi P_r podporządkować naprzykład P_i, a punktowi P_r' punkt P_i', zauważmy, że I_1 i I_2 są punktami kół płaszczyzny G, leżącemi w nieskończoności; przyjmując więc $P_i = \overline{I_1 P_r g}$, będziemy mieli także $P_i = \overline{I_2 P_r' g}$ i $P_i' = \overline{I_1 P_r' g} = \overline{I_2 P_r g}$. Jeżeli każdy z punktów P_i i P_i' chcemy dostać tylko raz jeden, musimy wtedy, używać tylko jednego punktu I i to w obu wypadkach tego samego, np. I_1. Dla różnych płaszczyzn G należy punkty I_1 tak wybrać, ażeby one opisywały krzywą ciągłą, podczas kiedy prosta g przyjmuje kolejno wszystkie możliwe kierunki, a zatem $\varkappa$ zmienia się np. od $-\infty$ przez 0 do $+\infty$.

Te uwagi pozwalają nam opisać geometrycznie podporządkowanie P_i i P_r w sposób następujący:

C. Niech będzie P_i punkt urojony prostej rzeczywistej g, leżącej na płaszczyźnie E; nazwiemy wtedy punkt P_r jakiejkolwiek przestrzeni czterowymiarowej R_4, przechodzącej przez E, odwzorowaniem punktu P_i, jeżeli:

1) płaszczyzna $P_r g$ jest płaszczyzną równych nachyleń względem dowolnie obranej, ale stałej, płaszczyzny w R_4, przecinającej E pod kątem prostym wzdłuż linii prostej, przyczem należy wybrać jeden z dwóch układów równych nachyleń;

2) prosta $P_i P_r$ przechodzi przez jeden z punktów kołowych I_1 w nieskończoności płaszczyzny $P_r g$.

Digitized by Google

Punkt I_1 może przy statecznych zmianach prostej g także podlegać tylko zmianom statecznym; należy jednak obrać jeden kierunek prostej g, przy którym I_1 staje się niestatecznym.

Należy jeszcze zaznaczyć, że w nieskończoności jednoznaczność odwzorowania ustaje: każdemu (rzeczywistemu lub urojonemu) punktowi P_∞ płaszczyzny E odpowiada pewna linia w nieskończoności przestrzeni R_4, a mianowicie wspólna linia w nieskończoności tych płaszczyzn, które odwzorowują proste płaszczyzny E, przechodzące przez Γ_∞.

§ 5. Podporządkowanie krzywych płaskich powierzchniom równych nachyleń.

Rozpatrzmy teraz, w jaki sposób odwzoruje się ogólna krzywa płaszczyzny E w przestrzeni R_4. Własnością charakterystyczną krzywych jest (A), że mają one w każdym punkcie, z wyjątkiem punktów osobliwych, jednę i tylko jednę styczną, której kierunek zmienia się statecznie od punktu do punktu. Styczną nazywamy, jak wiadomo, linię prostą, łączącą dwa sąsiednie punkty krzywej; ale każdy punkt ma nie jeden, ale ∞^1 punktów sąsiednich. Widzimy to np. stąd, że krzywa ma ∞^2 (rzeczywistych i urojonych) punktów, że zatem punkty jej można podporządkować jednoznacznie i statecznie punktom rzeczywistym płaszczyzny rzeczywistej; ale na płaszczyźnie każdy punkt ma ∞^1 punktów sąsiednich, odpowiadających wszystkim kierunkom, wychodzącym z tego punktu; toż samo można więc powiedzieć o linii krzywej. Jeżeli więc krzywa ma mieć w każdym punkcie P jednę i tylko jednę styczną, wtedy linie, łączące punkt P ze wszystkiemi punktami sąsiedniemi, muszą się zlewać w jednę linię prostą.

Jeżeli teraz odwzorujemy wszystkie ∞^2 punktów krzywej płaskiej w R_4, wtedy odwzorowanie będzie: po pierwsze, stanowiło kontynuum ∞^2 punktów rzeczywistych, a więc powierzchnię; powtóre, jeżeli połączymy którykolwiek punkt tej powierzchni z ∞^1 punktami sąsiedniemi za pomocą płaszczyzn, będących odwzorowa-

Digitized by Google

niami linij prostych, a więc płaszczyzn pewnego układu równych nachyleń: to wszystkie te płaszczyzny muszą się zlewać w jednę, ponieważ proste odpowiednie zlewają się. Przez każdy punkt tej powierzchni przechodzi więc płaszczyzna układu równych nachyleń, zawierająca ∞^1 sąsiednich punktów powierzchni, a zatem styczna do niej. Wypada stąd, że powierzchnia, odwzorowująca krzywą, jest powierzchnią równych nachyleń (B, § 3).

Dowodzenie można odwrócić, t. j. można się przekonać, że każda powierzchnia równych nachyleń przedstawia krzywą płaską, o ile tylko należy do tego samego układu równych nachyleń, który był używany przy podporządkowaniu punktów urojonych płaszczyzny E i punktów rzeczywistych przestrzeni R_4. Układ sprzężony z pierwszym prowadzi do tworów płaskich, mających w każdym punkcie przeciwlinie (§ 4) proste za styczne, można więc nazwać je krzywemi antyliniami.

Możemy teraz dać następujące określenie, równoznaczne z określeniem A:

D. Układ ∞^2 punktów P_i płaszczyzny E nazywa się linią krzywą, jeżeli punkty odwzorowujące I_r tworzą powierzchnię równych nachyleń, należącą do tegoż samego układu, który posłużył do oznaczenia zależności pomiędzy P_i i P_r podług określenia C (§ 4). Jeżeli powierzchnia należy do układu sprzężonego z pierwszym, wtedy twór na płaszczyźnie E nazywa się krzywą antylinią.

To określenie ma charakter czysto geometryczny, ponieważ opiera się ono wyłącznie na określeniach B (§ 3) i C (§ 4), które znów opierają się na twierdzeniach rzutowo geometrycznych, wymienionych w § 1.

Upewnimy się jeszcze, że określenie to zgadza się ze znanemi rezultatami. W rzeczy samej, w ogólności mówi się o punktach urojonych takich linij krzywych, których spółrzędne bieżące są związane z sobą równaniem analitycznem. Jeżeli jednak $y = x_2 + ix_4$ jest funkcyą analityczną zmiennej $x = x_1 + ix_3$:

Digitized by Google

(1) $$y = f(x_1 + ix_3) = f_1(x_1, x_3) + if_2(x_1, x_3),$$

a więc:

(2) $$x_2 = f_1(x_1, x_3), \quad x_4 = f_2(x_1, x_3),$$

wtedy muszą być wypełnione następujące równania różniczkowe:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3}; \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}.$$

Ale w tym przypadku równania (2) na zasadzie § 3, V są równaniami powierzchni równych nachyleń. XI. Jeżeli więc spółrzędne punktu zmiennego na płaszczyznie są związane równaniem analitycznem, wtedy ich punkty odwzorowujące tworzą powierzchnię równych nachyleń, skąd wypada, że określenie D jest dopuszczalne.

Powierzchnie

$$z = f_1(x_1, x_3) \text{ i } z = f_2(x_1, x_3),$$

za pomocą których przedstawia się zwykle oddzielnie przebieg części rzeczywistej i urojonej funkcyi y, są oczywiście rzutami prostopadłemi odpowiedniej powierzchni równych nachyleń na przestrzenie $X_1X_3X_2$ i $X_1X_3X_4$, przyczem za oś Z przyjmujemy X_2 albo X_4.

§ 6. Pierwszy przykład: koło.

Niech będzie na płaszczyznie E dane koło o promieniu rzeczywistym r. Przyjmujemy jego środek za początek spółrzędnych i piszemy jego równanie:

(1) $$x^2 + y^2 = r^2,$$

czyli:

$$(x_1 + ix_3)^2 + (x_2 + ix_4)^2 = r^2,$$

albo, oddzielając część urojoną od rzeczywistej:

(2) $$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = r^2$$

Digitized by Google

(3) $$x_1x_3 + x_2x_4 = 0.$$

Zbadajmy powierzchnię równych nachyleń, przedstawioną przez te równania. W tym celu znajdujemy jej linie przecięcia z każdą przestrzenią $x_4 = \varkappa x_3$ pęku, przechodzącego przez płaszczyznę X_1X_2. Weźmy najprzód przestrzeń $X_1X_2X_3$, t. j. $\varkappa=0$. Przecięcie powierzchni z tą przestrzenią otrzymamy, czyniąc $x_4 = 0$ w równaniach (2) i (3),

(4) $$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = r^2.$$

(5) $$x_1x_3 = 0.$$

Równanie (5) da się rozłożyć na dwa równania liniowe; przedstawia ono parę płaszczyzn:

(6) $$x_1 = 0, \quad x_4 = 0;$$

(7) $$x_2 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Szukane przecięcie składa się więc z dwóch linij płaskich:

(8) $$x_1^2 + x_2^2 = r^2, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0,$$

(9) $$x_2^2 - x_3^2 = r^2, \quad x_2 = 0, \quad x_4 = 0,$$

z których pierwsza zlewa się z kołem danem, druga zaś—nazwiemy ją n i c i ą — jest hyperbolą równoramienną, leżącą na płaszczyznie X_2X_3, mającą wierzchołki na obwodzie koła, a środek w środku koła,

Ażeby znaleść nić powierzchni, leżącą w jakiejś innej przestrzeni $x_4 = \varkappa' x_3$, obracamy osi spółrzędnych X_1, X_2 w płaszczyznie E o kąt $\theta = \operatorname{arc\,tg} \varkappa'$, i nazywamy je w tem nowem położeniu X'_1, X'_2; za nowe płaszczyzny spółrzędnych $X'_1X'_3$ i $X'_2X'_4$ należy przyjąć płaszczyzny układu równych nachyleń. Wtedy równanie przestrzeni $x_4 = \varkappa' x_3$ względem tych nowych spółrzędnych będzie:

$$x'_4 = 0.$$

Przy tem przekształceniu spółrzędnych równanie koła, a zatem i równanie powierzchni, pozostaje bez zmiany. Otrzymamy więc w tej, jak i w każdej innej powierzchni tegoż samego pęku, nić

Digitized by Google

takąż samą jak pierwsza i mającą względem nowego układu spółrzędnych takież samo położenie, jakie tamta miała względem danego.

Rozpatrzmy teraz rzut powierzchni na przestrzeń $X_1X_2X_3$; będzie ona przez to oznaczona w zupełności, jeżeli jeszcze wyznaczymy rzuty poszczególnych nici. Ażeby nabrać wyobrażenia o kształcie rzutu, zauważmy, że rzuty nici są hyperbolami, których gałęzie biegną tem bliżej swoich osi rzeczywistych, im większy jest kąt θ.

W rzeczy samej, niech będzie P punktem nici, P_1 jego rzutem na przestrzeń $x_4=0$, P_2 rzutem punktu P, a więc i punktu P_1, na płaszczyznę X_1X_2; wtedy będzie w trójkącie PP_1P_2:

$$\sphericalangle PP_1P_2 = \tfrac{1}{2}\pi_1\,; \quad \sphericalangle PP_2P_1 = \theta; \quad \overline{P_1P_2} = \overline{PP_2}\cos\theta.$$

A więc rzut odległości każdego punktu od płaszczyzny E jest równy tejże odległości, pomnożonej przez $\cos\theta$.

Uczyńmy $\cos\theta=0$, rozpatrując przestrzeń $x_3=0$ prostopadłą do $X_1X_2X_3$; otrzymamy wtedy jako rzut nici niezupełną podwójną linię prostą, a mianowicie część osi X_1, leżącą nazewnątrz koła

Można więc w przybliżeniu otrzymać rzut powierzchni z hyperboloidy równobocznej jednopowłokowej, pozostawiając bez zmiany koło wodzące i jednę z hyperboli tworzących, i zwężając hyperbolę prostopadłą do poprzedniej dopóty, dopóki ona nie upadnie na linię prostą, leżącą w płaszczyźnie koła. Przypuszczamy tu, że powierzchnia ma charakter giętkiej, rozciągliwej, nierozerwalnej powłoki

Kształt tej powierzchni czyni widocznem, że koło o promieniu równym zero rozpada się na dwie linie proste. Rzeczywiście, jeżeli r się zmniejsza, wtedy hyperbole zbliżają się do swoich asymptot; te ostatnie tworzą jednak w rzucie, zarówno jak i w pierwowzorze, parę płaszczyzn—będących odwzorowaniem urojonych asymptot koła—do których powierzchnia ciągle się zbliża, jeżeli koło ściąga się do jednego punktu.

Równanie rzutu powierzchni w przestrzeni $x_4=0$ otrzymamy, rugując x_4 z równań (2) i (3). Będzie:

Digitized by Google

(10) $$x_1^2 x_2^2 + x_2^4 - x_2^2 x_3^2 - x_1^2 x_3^2 = r^2 x_2^2.$$

Równanie to zawiera cokolwiek więcej, aniżeli znaleźliśmy poprzednio, a mianowicie (przy $x_3=0$) całą linię podwójną $x_2^2=0$, chociaż poprzednio znaleźliśmy, że tylko części tej prostej, leżące nazewnątrz koła, należą do powierzchni rzutowej. Tłomaczy się to w ten sposób, że powierzchnia równych nachyleń, jako powierzchnia algebraiczna, oprócz punktów rzeczywistych, ma także punkty urojone; niektóre z nich, a mianowicie te, dla których tylko x_4 jest urojone, zaś x_1 x_2, x_3 rzeczywiste, mają rzeczywiste rzuty w przestrzeni $x_4=0$. Punkty te są z konieczności zawarte w równaniu (10); równanie to przedstawia więc część rzeczywistą rzutu powierzchni, podczas kiedy konstrukcya bezpośrednia dała nam to, cośmy otrzymać chcieli, t. j. rzut części rzeczywistej powierzchni.

Należy jeszcze wyrazić za pomocą równań rzuty nici na płaszczyzny X_1X_2, X_1X_3 i X_2X_3. W tym celu z równania przestrzeni, w której dana nić leży: $x_4=\varkappa x_3$, oraz z równań (2) i (3) rugujemy kolejno x_3, x_4; x_2, x_4, x_1, x_4. Otrzymamy:

(11) $$x_1 + \varkappa x_2 = 0,$$

(przyczem część prostej, leżącą wewnątrz koła, należy odrzucić).

(12) $$x_2^2\left(1+\frac{1}{\varkappa^2}\right) - x_3^2(1+\varkappa^2) = r^2,$$

(13) $$(1+\varkappa^2)(x_2^2 - x_3^2) = r^2 \quad \text{(hyperbola równoramienna).}$$

W celu dogodnego przedstawienia powierzchni na płaszczyźnie X_1X_2 znajdziemy jeszcze rzuty linij przecięcia powierzchni z przestrzeniami $x_3=\text{const.}$ i $x_4=\text{const}$, czyli dwa układy izohyet.

Rzuty oddzielnych punktów linii $x_3=\text{const.}$ łatwo wykreślić jeżeli już znamy rzuty nici na płaszczyzny x_1x_2 i x_2x_3. Są to krzywe czwartego rzędu, których równania dostaniemy, rugując z (2) i (3) x_4 i podstawiając $x_3=c$:

(14) $$x_1^2x_2^2 + x_2^4 - (r^2+c^2)x_2^2 - c^2x_1^2 = 0.$$

Dla znalezienia drugiego układu izohyet podstawiamy $x_4=c$ i rugujemy x_3:

Digitized by Google

(15) $$x_2^2 x_1^2 + x_1^4 - (r^2 + c^2) x_1^2 - c^2 x_2^2 = 0.$$

Równanie to zamieni się na (14), jeżeli x_1 i x_2 przestawimy, układ $x_4 = c$ powstaje więc z układu $x_3 = c$, jeżeli ten ostatni obrócimy o kąt $^1/_4\pi$ dokoła punktu O.

Jeżeli w szczególności promień koła jest równy zeru, wtedy równanie (10) zamienia się na:

(16) $$(x_2^2 - x_3^2)(x_1^2 + x_3^2) = 0,$$

albo, odrzucając czynniki urojone:

(17) $$x_2 + x_3 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0.$$

Wypada stąd, że rzuty płaszczyzn odwzorowujących proste minimalne tworzą z płaszczyzną $X_1 X_2$ kąty $^1/_4\pi$ i przecinają ją równolegle do osi X_1.

§ 7. Dalsze przykłady: przecięcie stożkowe w ogólności, hyperbola równoramienna, sinusoida. Ogniska.

Jeżeli przecięcie stożkowe jest dane przez pięć (rzeczywistych lub urojonych) punktów płaszczyzny E, wtedy można odpowiednią powierzchnię równych nachyleń wykreślić za pomocą twierdzenia Pascala, gdyż twierdzenie to pozostaje prawdziwem, jeżeli w niem zastąpimy punkty płaszczyzny przez punkty przestrzeni R_4, linie proste przez płaszczyzny równych nachyleń, a przecięcia stożkowe przez odpowiednie powierzchnie równych nachyleń. A ponieważ dwa sprzężone układy równych nachyleń można wzajemnie przemienić, przeto i krzywe „antylinie" drugiego rzędu dają się wykreślić.

Niech będzie dane równanie przecięcia stożkowego ze spółczynnikami rzeczywistemi:

(1) $$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

czyli:

$$a(x_1 + ix_3)^2 + b(x_1 + ix_3)(x_2 + ix_4) + c(x_2 + ix_4)^2 + d(x_1 + ix_3) + e(x_2 + ix_4) + f = 0;$$

Digitized by Google

wtedy równania odpowiednie powierzchni równych nachyleń będą:

(2) $$ax_1^2 - ax_3^2 + bx_1x_2 - bx_3x_4 + cx_2^2 - cx_4^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0.$$

(3) $$2ax_1x_3 + bx_1x_4 + bx_2x_3 + 2cx_2x_4 + dx_3 + ex_4 = 0.$$

Rzut linii przecięcia tej powierzchni z przestrzenią:

4) $$x_4 = \varkappa x_3$$

na przestrzeń $x_4 = 0$ otrzymamy, rugując x_4 z (2), (3) i (4).

(5) $$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 - (a + b\varkappa + c\varkappa^2)\, x_3^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0.$$

(6) $$(2x + b\varkappa)\, x_1x_3 + (b + 2c\varkappa)\, x_2x_3 + (d + e\varkappa)\, x_3 = 0.$$

Wartość $x_3 = 0$ czyni zadość równaniu (6) i prowadzi do pierwotnego przecięcia stożkowego (1). Każda nić jest również krzywą drugiego rzędu; jej rzut leży na płaszczyznie prostopadłej do $X_1 X_2$.

(7) $$(2a + b\varkappa)\, x_1 + (b + 2c\varkappa)\, x_2 + d + e\varkappa = 0\ ^{1)}.$$

Równanie (7) przedstawia jednocześnie rzut nici na płaszczyznę X_1X_2; jej rzuty na X_1X_3 i X_2X_3 otrzymamy z (5) i (7), rugując x_2 i x_1:

$$x_1^2 \left[a - \frac{b(2a + b\varkappa)}{b + 2c\varkappa} + \frac{c(2a + b\varkappa)^2}{(b + 2c\varkappa)^2} \right]$$
$$+ x_1 \left[-\frac{b(d + e\varkappa)}{b + 2c\varkappa} + \frac{2c(d + e\varkappa)}{(b + 2c\varkappa)^2} + d - \frac{e(2a + b\varkappa)}{b + 2c\varkappa} \right]$$

(8) $$- x_3^2 (a + b\varkappa + c\varkappa^2) + \frac{c(d + e\varkappa)^2}{(b + 2c\varkappa)^2} - \frac{c(d + e\varkappa)}{b + 2c\varkappa} + f = 0.$$

$$x_2^2 \left[\frac{a(b + 2c\varkappa)^2}{(2a + b\varkappa)^2} - \frac{b(b + 2c\varkappa)}{2a + b\varkappa} + c \right]$$
$$+ x_2 \left[\frac{2a(d + e\varkappa)}{(2a + b\varkappa)^2} - \frac{2bd + be\varkappa + 2cd\varkappa}{2a + b\varkappa} + e \right]$$

(9) $$- x_3^2 (a + b\varkappa + c\varkappa^2) + \frac{a(d + e\varkappa)^2}{(2a + b\varkappa)^2} - \frac{d(d + e\varkappa)}{2a + b\varkappa} + f = 0.$$

---

[1]) Jest to równanie średnicy sprzężonej z kierunkiem $x_2 = \varkappa x_1$.

Digitized by Google

Niech dane przecięcie stożkowe będzie w szczególności hyperbolą równoramienną:

(10) $$x^2 - y^2 = r^2,$$

a więc: $a = 1$, $b = 0$; $c = -1$, $d = 0$, $e = 0$, $f = -r^2$; wtedy rzuty nici będą:

(11) $x_1 - \varkappa x_2 = 0$, średnica sprzężona z $x_2 = \varkappa x_1$.

(12) $x_1^2 \left(1 - \frac{1}{\varkappa^2}\right) + x_3^2 (\varkappa^2 - 1) = r^2$, elipsa.

(13) $(\varkappa^2 - 1)(x_2^2 + x_3^2) = r^2$, koło.

Zauważyć należy, że tylko $\varkappa > 1$ dają nici rzeczywiste.

Wogólności powierzchnie równych nachyleń dla przecięć stożkowych, a więc także ich rzuty, są powierzchniami czwartego stopnia. Pojęcia geometryi czterowymiarowej były już nieraz stosowane przy badaniach nad powierzchniami czwartego stopnia.

Powierzchnia równych nachyleń krzywej algebraicznej rzędu n jest w ogólności powierzchnią rzędu n^2.

W rzeczy samej, z równania n-tego stopnia z dwiema zmiennemi, otrzymamy, oddzielając części rzeczywiste od urojonych, dwa równania także n-tego stopnia, przedstawiające dwie krzywe przestrzenie trójwymiarowe n-tego rzędu; ich przecięcie—szukana powierzchnia równych nachyleń—jest więc rzędu n^2. Linia przecięcia takiej powierzchni z jakąkolwiek przestrzenią liniową — a więc w szczególności każda izohyeta — jest krzywą rzędu n^2;[1] dla nici jednak liczba ta redukuje się do $n(n-1)$; gdyż nici powstają z przecięcia z przestrzeniami, zawierającemi płaszczyznę krzywej danej. Każda taka linia przecięcia rozpada się na krzywą daną n-tego rzędu i na nić, która przeto może już być tylko rzędu $n^2 - n = n(n-1)$.

[1]) Segre, Surfaces du 4 ordre à conique double (Math. Ann. 24).

Digitized by Google

Jako przykład przestępnej powierzchni równych nachyleń, rozpatrzymy taką powierzchnię dla sinusoidy.

Równanie sinusoidy niech będzie:

(14) $$y = \sin x,$$

czyli: $$x_2 + ix_4 = \sin(x_1 + ix_3).$$

Oddzielając części rzeczywiste od urojonych, otrzymamy równania powierzchni:

(15) $$x_2 = \sin x_1 \cdot \frac{e^{x_3} + e^{-x_3}}{2}.$$

(16) $$x_4 = \cos x_1 \cdot \frac{e^{x_3} - e^{-x_3}}{2}.$$

Dostaniemy dalej następujące równania, przydatne do obliczania poszczególnych punktów:

Dla nici:

(17) $$x_4 = \varkappa x_3,$$

(18) $$x_1 = \arccos \frac{2\varkappa x_3}{e^{x_3} - e^{-x_3}},$$

(19) $$x_2 = \sin x_1 \cdot \frac{e^{x_3} + e^{-x_3}}{2}.$$

Dla izohyet $x_3 = c$:

(20) $$x_2 = \sin x_1 \cdot \frac{e^{c} + e^{-c}}{2}.$$

Dla izohyet $x_4 = k$ otrzymamy pojedyńcze punkty na nici $x_4 = \varkappa x_3$, oznaczając na niej punkty $x_3 = \frac{k}{\varkappa}$. Ich równanie znajdziemy, rugując x_3 z (15) i (16):

(21) $$\frac{x_2^2}{\sin^2 x_1} - \frac{k^2}{\cos^2 x_1} = 1.$$

Digitized by Google

Konstrukcye na płaszczyznie X_1X_2 najdogodniej jest wykonać przy pomocy płaszczyzny x_2x_3.

Ogniskami krzywej nazywamy punkty, mające tę własność, że linie minimalne, przechodzące przez nie, są styczne do danej krzywej. Znajdziemy je, prowadząc te wszystkie płaszczyzny styczne do powierzchni równych nachyleń, które są odwzorowaniem linij minimalnych (ich cechy charakterystyczne już poznaliśmy), i określając wzajemne punkty przecięcia tych płaszczyzn.

Niech będą spółrzędne szukanego ogniska $a = a_1 + ia_3$ i $a' = a_2 + ia_4$. Linie minimalne, przechodzące przez ten punkt, są dane przez równanie;

$$(22) \qquad (\xi_1 + i\xi_3 - a_1 - ia_3)^2 + (\xi_2 + i\xi_4 - a_2 - ia_4)^2 = 0.$$

Rozkładając na czynniki stopnia pierwszego i odłączając części rzeczywiste od urojonych, dostaniemy równania dwóch płaszczyzn:

$$(23) \qquad \begin{array}{l|l} \text{(a)} & \text{(b)} \\ \xi_2 = -\xi_3 + a_3 + a_2 & \xi_2 = \xi_3 - a_3 + a_2 \\ \xi_4 = \xi_1 - a_1 + a_4 & \xi_4 = -\xi_1 + a_1 + a_4. \end{array}$$

Z drugiej strony możemy znaleść dla powierzchni:

$$x_2 = f_1(x_1, x_3), \quad x_4 = f_2(x_1, x_3).$$

płaszczyznę styczną w punkcie x_i, podstawiając w równania (3) § 3 $F_3 = x_2 - f_1$, $F_2 = x_4 - f_2$ i rozwijając M i N:

$$(25) \qquad \begin{aligned} \xi_2 &= \xi_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \xi_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_3} + x_2 - x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_3}, \\ \xi_4 &= \xi_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \xi_3 \frac{\partial f_2}{\partial x_3} + x_4 - x_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial f_2}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Jeżeli ta płaszczyzna ma przedstawiać linię minimalną, wtedy równania (25) muszą być jednoznaczne z (23 a albo b); przez porównanie spółczynników otrzymamy:

Digitized by Google

(a)

$$(26)\quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0. \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -1.$$

$$(27)\quad a_3 + a_2 = x_2 + x_4, \qquad -a_1 + a_4 = x_4 - x_1.$$

(b)

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 1$$

$$-a_3 + a_2 = x_2 - x_3 \qquad a_1 + a_4 = x_4 + x_1.$$

Z równań (24) i (26 a albo b) można obliczyć x_i i podstawić w (27 a wzgl. b); z tak otrzymanych czterech równań można wyznaczyć a_i.

Dla sinusoidy równania (24) zamieniają się na (15) i (16); równania (26 a i b) będą:

(a)

$$(28)\quad \cos x_1 . \frac{e^{x_3} + e^{-x_3}}{2} = 0 \qquad \sin x_1 . \frac{e^{x_3} - e^{-x_3}}{2} = -1$$

(b)

$$\cos x_1 . \frac{e^{x_3} + e^{-x_3}}{2} = 0 \qquad \sin x_1 . \frac{e^{x_3} - e^{-x_3}}{2} = 1.$$

W górnych równaniach drugi czynnik nie może być zerem, będzie więc:

$$(29)\quad \begin{aligned} &\text{(a)}\quad \cos x_1 = 0,\ x_1 = (2n+1)\frac{\pi}{2},\quad \sin x_1 = (-1)^n, \\ &\text{(b)}\quad \cos x_1 = 0,\ x_1 = (2m+1)\frac{\pi}{2},\quad \sin x_1 = (-1)^m. \end{aligned}$$

Z (16) wypada:

$$\text{(a)}\ x_4 = 0, \quad \text{(b)}\ x_4 = 0,$$

zaś z (15) i (29):

(a)

$$e^{x_3} + e^{-x_3} = (-1)^n 2x_2 \qquad e^{x_3} - e^{-x_3} = (-1)^{n+1} . 2$$

(b)

$$e^{x_3} + e^{-x_3} = (-1)^m 2x_2 \qquad e^{x_3} - e^{-x_3} = (-1)^m 2.$$

Stąd:

$$e^{x_3} = (-1)^n (x_2 - 1) \qquad e^{-x_3} = (-1)^n (x_2 + 1)$$

$$e^{x_3} = (-1)^m (x_2 + 1) \qquad e^{-x_3} = (-1)^m (x_2 - 1).$$

Digitized by Google

Wyrugujemy x_3, mnożąc pierwsze równania przez drugie.

(a) $1 = x_2^2 - 1;\ x_2 = \pm\sqrt{2}.$ (b) $1 = x_2^2 - 1;\ x_2 = \pm\sqrt{2}$

Znak przed pierwiastkiem należy tak wybrać, ażeby x_3 było rzeczywiste, a więc $e^{x_3} > 0$; wypada stąd:

	(a)	(b)
(31)	$x_2 = (-1)^n\sqrt{2}$	$x_1 = (-1)^m\sqrt{2}$
(32)	$x_3 = \log[\sqrt{2}-(-1)^n]$	$x_3 = -\log[\sqrt{2}-(-1)^m]$.

Równania (27 a i b) przybierają postać taką:

$$(33)\qquad a_3 + a_2 = (-1)^n\sqrt{2} + \log[\sqrt{2} - (-1)^n];$$

$$-a_3 + a_2 = (-1)^m\sqrt{2} + \log[\sqrt{2} - (-1)^m],$$

$$(34)\qquad -a_1 + a_4 = -(2n+1)\frac{\pi}{2};\ a_1 + a_4 = (2m+1)\frac{\pi}{2}.$$

Z równań (33) wypada:

$$a_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\Big[(-1)^n + (-1)^m\Big] + \frac{1}{2}\log\Big\{\Big[\sqrt{2}-(-1)^n\Big]\Big[\sqrt{2}-(-1)^m\Big]\Big\};$$

a ponieważ:

$$\log\Big\{\Big[\sqrt{2}-(-1)^n\Big]\Big[\sqrt{2}-(-1)^m\Big]\Big\} = \begin{cases} 0, \text{ przy } n-m \text{ nieparzystem} \\ 2\log[\sqrt{2}-1], \text{ przy } n \text{ parzystem, } m \text{ parzystem,} \\ -2\log[\sqrt{2}-1], \text{ przy } n \text{ nieparzystem, przy } m \text{ nieparzystem,} \end{cases}$$

przeto:

$$(35)\qquad a_2 = \frac{1}{2}\Big[(-1)^n + (-1)^m\Big]\Big[\sqrt{2} + \log(\sqrt{2}-1)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(-1)^n + (-1)^m\Big].\,0{\cdot}532842$$

i podobnie:

$$(36)\qquad a_3 = \frac{1}{2}\Big[(-1)^n - (-1)^m\Big]\Big[\sqrt{2} + \log(\sqrt{2}-1)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(-1)^n = (-1)^m\Big].\,0{\cdot}532842.$$

Digitized by Google

zaś z równań (34) wynika:

$$a_1 = (m+n+1)\frac{\pi}{2}, \tag{37}$$

$$a_4 = (m-n)\frac{\pi}{2}. \tag{38}$$

Każda para liczb całkowitych m, n daje ognisko sinusoidy; jeżeli chcemy wyróżnić ogniska rzeczywiste, wtedy musimy uczynić $a_3 = a_4 = 0$, a więc $n = m = \nu$. Niech będą b_1, b_2 spółrzędne ognisk rzeczywistych, wtedy:

$$\begin{aligned} b_1 &= (2\nu+1)\frac{\pi}{2}, \\ b_2 &= (-1)^\nu \{\sqrt{2}+\log[\sqrt{2}-1]\} = (-1)^\nu . 0{\cdot}532842. \end{aligned} \tag{39}$$

Każda liczba całkowita ν daje ognisko rzeczywiste.

§ 8. Przybliżone wykreślenie powierzchni równych nachyleń, mającej przechodzić przez daną krzywą płaską.—Przecięcia.

Niech będzie dana na płaszczyźnie E jakakolwiek krzywa C; chcemy przez nią poprowadzić powierzchnię równych nachyleń.

Ażeby wskazać konstrukcyę najdogodniejszą, należałoby rozpatrzeć szczegółowo różne układy linij na powierzchniach równych nachyleń. Tymczasem wskażemy tylko jeden sposób, posiłkując się liniami geodezyjnemi. Sposób ten jest wprawdzie skomplikowany, ale w każdym razie dowodzi możliwości rozwiązania zadania.

Cechą charakterystyczną linij geodezyjnych jest, że płaszczyzna ściśle styczna w pewnym punkcie linii geodezyjnej jest prostopadła do płaszczyzny stycznej do powierzchni w tym punkcie [1]. Linia geodetyczna jest w każdym punkcie przecięciem normalnem powierzchni, i wszystkie linie geodezyjne, wychodzące z pewnego

[1]) Kommerell, l. c. § 10.

Digitized by Google

punktu powierzchni równych nachyleń mają w tym punkcie ten sam promień krzywizny (VIII, § 3). Małe odcinki Δs linii geodezyjnych uważać będziemy za prostolinijne, dopóki kąt pomiędzy styczną początkową i końcową takiego kawałka będzie mniejszy od dowolnie obranej, dla całej powierzchni jednakowej wielkości $\Delta\tau$. A ponieważ $\lim \frac{\Delta s}{\Delta\tau} = \frac{ds}{d\tau} = \varrho =$ promieniowi krzywizny, przeto można przyjąć, że Δs jest proporcyonalne do promienia krzywizny powierzchni równych nachyleń. Jeżeli jednak znamy jakąkolwiek linię, przechodzącą przez punkt na powierzchni, wtedy możemy, według twierdzenia Meusniera[1], z promienia krzywizny linii obliczyć promień krzywizny powierzchni. Znamy także płaszczyznę styczną w tym punkcie: jest to ta płaszczyzna układu równych nachyleń, która zawiera styczną krzywej. Kierunki początkowe linij geodezyjnych możemy, w odpowiednich płaszczyznach stycznych, obierać dowolnie; wybieramy te, które przecinają krzywą C pod kątem prostym. C jest również linią geodezyjną, gdyż jej płaszczyzna E jest prostopadła do wszystkich płaszczyzn stycznych do powierzchni w punktach tej krzywej (§ 4 i 7); a zatem promienie krzywizny powierzchni równych nachyleń są wzdłuż krzywej C identyczne z promieniami krzywizny tejże krzywej.

Stąd wypada konstrukcya następująca: z każdego punktu P krzywej C wyprowadzamy w płaszczyznie stycznej T odcinek PP' prostopadły do stycznej i równy $\varrho . \Delta\tau$; końce P' tworzą pewną krzywą C', która w przybliżeniu leży na powierzchni równych nachyleń, która jednak w ogólności nie będzie krzywą geodetyczną. W każdym punkcie P' znajdujemy styczną, płaszczyznę ściśle styczną i promień krzywizny krzywej C', a stąd płaszczyznę styczną T' i promień krzywizny ϱ' powierzchni równych nachyleń. W T' odcinamy $P'P'' = \varrho'\Delta\tau$ w ten sposób, że płaszczyzna $PP'P'' \perp T$; linia $PP'P''$ jest oczywiście częścią linii geodezyjnej. Z krzywą punktów P'' możemy postąpić tak samo jak z C',

---

[1]) $\varrho_\varphi = \varrho \cos\varphi$, jeżeli $\varrho_\varphi =$ promieniowi krzywej, $\varphi =$ kątowi między płaszczyznami tej krzywej i linii geodetycznej, mającej z nią wspólną styczną (Kommerell, l. c. § 4).

Digitized by Google

i w ten sposób powierzchnię równych nachyleń rozszerzać dowolnie daleko.

Tak otrzymane linie niezawsze będą wypełniały całą powierzchnię; w tym wypadku jednak można na znalezionej już części powierzchni wykreślić jakąkolwiek nową linię i postępując z nią jak z linią C, otrzymać nowe punkty powierzchni.

Jeżeli już poznaliśmy jeden układ linij, pokrywających pokrywających powierzchnię całkowicie, możemy przejść do innych układów.

Na płaszczyźnie. najdogodniej jest przedstawić powierzchnię przestrzeni czterowymiarowej za pomocą rzutów dwóch układów linii $x_3 = \text{const.}$ i $x_4 = \text{const.}$ Takie odwzorowanie może służyć do wyznaczenia urojonych punktów przecięcia dwóch jakichkolwiek krzywych.

Niech będzie powierzchnia równych nachyleń pierwszej krzywej dana za pomocą rzutów linii $x_3 = c$, $x_3 = c'$, ... oraz $x_4 = k$, $x_4 = k'$, ..., zaś dla drugiej krzywej $x'_3 = c$, $x'_3 = c'$, ... i $x'_4 = k$, $x'^4 = k'$, ...,

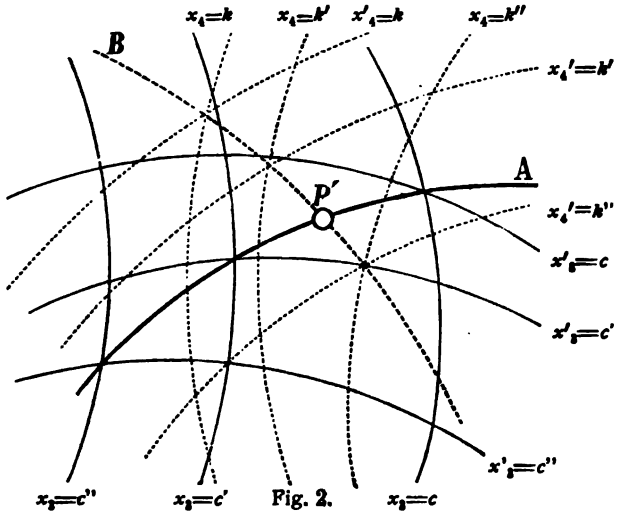


Fig. 2.

należy znaleść te punkty, w których $x_3 = x'_3$ i jednocześnie $x_4 = x'$. W tym celu łączymy punkty przecięcia krzywych $x_3 = c$, $x'_3 = c$; $x_3 = c'$, $x'_3 = c'$; ..... linią ciągłą A, i podobnie punkty przecięcia

krzywych $x_4 = k$, $x'_4 = k$; $x_4 = k'$, $x'_4 = k'$; ..... linią B. Każdy punkt przecięcia P' krzywych A i B jest rzutem punktu przecięcia obu powierzchni równych nachyleń. Spółrzędne x_1 i x_2 punktu P są dane przez położenie punktu P' na płaszczyźnie X_1X_2, zaś spółrzędne x_3, x_4 są równe c_0, wzgl. k_0, jeżeli przez P' przechodzą linie $x_3 = c_0$, $x'_3 = c_0$; $x_4 = k_0$, $x'_4 = k_0$; c_0 i k_0 można więc znaleść przez interpolacyę.

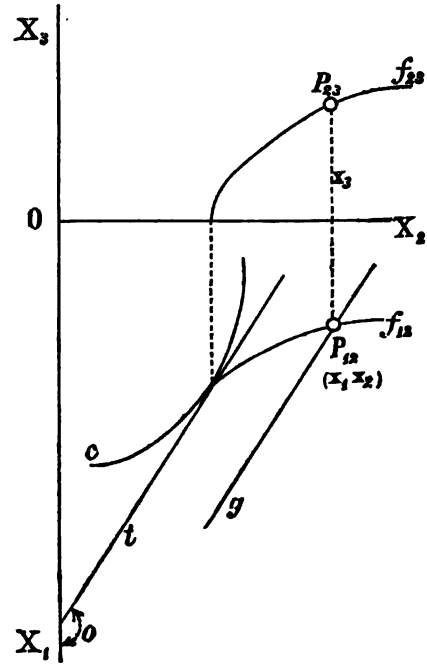


Fig. 8.

Można też w podobny sposób używać rzutów nici $x_4 = \varkappa x_3$, $x'_4 = \varkappa x'_3$.

Dla wyznaczenia punktów przecięcia krzywej z prostą rzeczywistą g najdogodniej jest używać rzutów nici. W tym celu prowadzimy styczne t krzywej, równologłe do prostej g; znajdujemy nici, przechodzące przez punkty styczności; dalej znajdujemy płaszczyznę układu równych nachyleń G, zawierającą g, i wreszcie przecięcia jej P z wykreślonemi nitkami, co w rzucie łatwo jest

Digitized by Google

wykonać. Punkty P są odwzorowaniami urojonych punktów przecięcia krzywej z prostą.

Wykonanie na płaszczyznach rzutów X_1X_2 i X_2X_3 przedstawia się jak następuje: kąt nachylenia g i t względem X_1 niech będzie θ; wtedy będzie $\varkappa = tg\,\theta$ (§ 4). Znajdujemy nić f leżącą w przestrzeni $x_4 = \varkappa x_3$; jej rzuty niech będą f_{12} i f_{23}; $P_{12} = g \cdot f_{12}$ jest jednym rzutem punktu przecięcia P powierzchni równych nachyleń z płaszczyzną G; linia $P_{12}P_{23} \perp OX_2$ przecina f_{23} w drugim rzucie P_{23} punktu P; spółrzędne x_1x_2 są dane przez położenie punktu P_{12} na płaszczyźnie X_1X_2, x_2 można zmierzyć na płaszczyźnie X_2X_3, zaś x_4 znajdziemy, mnożąc x_2 przez $\varkappa$, które można również zmierzyć na rysunku.

Digitized by Google

Digitized by Google

R. MERECKI.

Okres „dzienny" temperatury powietrza podczas nocy podbiegunowej.

W ostatniem wydaniu „Meteorologii" z r. 1905 J. Hanna, na str. 70, krótką tylko wzmiankę znajdujemy o przebiegu dziennym temperatury w stronach podbiegunowych: „In den Circumpolargegenden können die täglichen Wärmeänderungen keinen erheblichen Betrag erreichen, weil die Sonne sehr niedrig steht und die Nächte zer kurz sind oder ganz fehlen; während der Polarnacht hört eine regelmässige Wärmeänderung ganz auf". Oczywiście, podczas nocy podbiegunowej, skoro brak obydwóch czynników, warunkujących t. zw. okres dzienny temperatury, usłonecznienia w dzień i wypromienienia w nocy, trudno z góry przypuścić możliwość wystąpienia systematycznych odchyleń w ciągu doby; wobec krótkotrwałych zazwyczaj spostrzeżeń, ślady jakoby okresu dziennego przypisywano przypadkowości, chociaż już Dove zwrócił był uwagę na zjawisko, któremu dał nazwę „zmroku ciepła". Wzmiankę o tem znajdujemy w przypisku na str. 64 pierwszego wydania Meteorologii Hanna z r. 1901. „Ob eine Art Dämmerung der Wärme während der Polarnacht wirklich existiert, wie sie Dove in den stündlichen Temperaturaufzeichnungen im Rensselaerhafen, NW—Grönland, 78°N Br. bemerkt hat, müsste doch erst näher untersucht werden. (Dove, über die Dämmerung der Wärme in der Winternacht der Polarländer).

Digitized by Google

Sprawa przypuszczalnego okresu dziennego ponownie poruszona została w ostatnich czasach, dzięki wydaniu cennych materyałów, zebranych podczas trzechletniej podróży „Frama". Opracował naukowo spostrzeżenia meteorologiczne Mohn p. t. „The Norwegian Northpolar Expedition 1893—96. Scientific Results editet by Fridtjof Nansen vol. VI. Meteorology by Mohn" i z dzieła tego zdaje sprawozdanie J. Hann w marcowym zeszycie „Meteorologische Zeitschrift" z r. b. Nie mając pod ręką wydawnictwa, ograniczyć się muszę na streszczeniu według Hanna. W rozdziale III dotyczącym temperatury, czytamy: „Anders in der dunkeln Jahreszeit, dann ist der Tag kälter als die Nacht, wie folgende Tabelle zeigt, welche die Mittel jener 12 Monate enthält, während welcher die Sonne völlig unter dem Horizont geblieben ist. Es genügt wohl hier, die Abweichungen vom Tagesmittel bloss für jede zweite Stunde anzugeben.

0h	2	4	6	8	10	12h	14	16	18	20	22h
.20	.19	.18	.15	.04	—.11	—.17	—.22	—.20	—.11	—.03	.11

Um $8^1/_2{}^h$ morgens sinkt die Temperatur unter das Tagesmittel, erreicht um 3^h ihren tiefsten Stand (—.22), steigt um $8^1/_2{}^h$ abends über das Mittel, um am 1^h Nachts den höchsten Stand zu erreichen (.20). Die Ursache dieses täglichen Ganges kann weder in der reinen Wirkung der Sonne gesucht werden. Wahrscheinlich ist derselbe ein Effekt der täglichen Periode der Windrichtung. Von 7^h morgens bis 8^h abends herrschen in der dunkeln Zeit die Nordwinde vor und diese sind kälter als die südlichen. Auch andere arktische Stationen haben schon eine ähnliche tägliche Periode im Dezember gezeigt." Dalej czytamy, że istnieje wydatna różnica pomiędzy okresem dziennym przy jasnem (*a*) niebie (średnia temperatura —34°.9) i przy pochmurnem (*b*) wobec średniej —24°.6.

	0h	2	4	6	8	10	12h	14	16	18	20	22h
a	.60	.61	.35	.12	—.19	—.31	—.30	—.34*	—.29	—.20	—.08	.20
b	—.63*	—.62*	—.29	—.03	.11	.20	.43	.43	.35	.26	-.04	—.36

Digitized by Google

„Die grosse tägliche Periode mit Amplituden über 1° und die Umkehrung derselben au bedeckten Tagen gegen die klaren ist höchst bemerkenswert. Dieselbe scheint von der täglichen Periode der Windrichtung abhängig zu sein." W przypisku powołuje się jeszcze J. Hann na sprawozdawcę z tegoż dzieła w „Monthly Weather Review" (z września 1905 r.), który w myśl Dovego przypuszcza, że „zmrok ciepła" około czasu, gdy słońce znajduje się w południku miejsca, może oddziaływać na temperaturę dolnej warstwy powietrza podczas pogodnego nieba, rozpędzając opary, przez co wypromieniowanie wzmaga się i temperatura spada. „This minimum of temperatur during the winter twilight is entirely analogous to the minimum that occurs in temperate zonnes in the early morning twilight, and even sometimes after sunrise on the clearest days at high altitudes."

Z liczb przytoczonych powyżej wynika w sposób niewątpliwy, że okres dzienny temperatury powietrza podczas nocy podbiegunowej istnieje, i przytem zarówno dla dni normalnych jak wyjątkowych, różniących się stopniem zachmurzenia nieba, a nawet prędkością wiatru, co widać z liczb przytoczonych przez Hanna, lecz tu niepodanych. Obie atoli próby wyjaśnienia są zbyt sumaryczne, i niewiadomo której hypotezie przysądzić pierwszeństwo. Różnice w przebiegu temperatury dla poszczególnych grup dni, co Hann podkreśla, są nader znaczne, wskazując na zawiłość warunków meteorologicznych w stronach tamtejszych. Ląd półkuli północnej, rozszerzając się od strony równika ku biegunowi, zwartą masą o klimacie wybitnie lądowym otacza przypuszczalnie morze biegunowe. Od dawna wiadomo, że biegun chłodu nie leży w biegunie geograficznym, lecz dopiero na mocy danych z podróży Nansena i dodatkowych z wielu stacyj meteorologicznych otaczających biegun, mógł Mohn wykreślić pierwsze mapki synoptyczne, wyjaśniające rozkład temperatury i ciśnienia. Stosunki te ilustruje najlepiej mapka izoterm styczniowych, na której te linie, wijąc się zygzakowato, dają miejscami olbrzymie gradyenty termiczne. Pomiędzy trzema biegunami zimna, głównym syberyjskim z izotermą —45°, przypuszczalnym około bieguna z izotermą —40° i trzecim z taką samą temperaturą w Grenlandyi, zarysowuje się izoterma 0, sięgająca po za 70°

Digitized by Google

szerokości, pomiędzy Islandyą i Norwegią. Łatwo przewidzieć, jak dalece wielkie zmiany temperatury powodować muszą zmiany kierunków wiatrów, pod wpływem przebiegających cyklonów i antycyklonów.

Niewątpliwie i tu, rozważając dobrane odpowiednio kierunki panujących wiatrów w związku z miejscem pobytu wyprawy, zdołalibyśmy wyjaśnić nieco nasze zadanie o przyczynie okresu dziennego temperatury podczas nocy podbiegunowej, właściwego atoli rozwiązania szukać należy na przeciwległej półkuli, trafnie przez kogoś nazwanej „teoretyczną".

Pionierska wyprawa załogi okrętu „Belgica" pierwsza zdołała przezimować w tajemniczych do niedawna dla meteorologów okolicach antarktycznych, torując drogę dla innych wypraw i dostarczając pierwszych niezwykle cennych danych meteorologicznych za okres całoroczny. Znany uczestnik tej wyprawy Henryk Arctowski zebrał i wydał kosztem rządu belgijskiego szczegółowy zbiór spostrzeżeń [1], poprzedzony naukowem opracowaniem najważniejszych elementów. W rozdziale o temperaturze autor przypuszcza istnienie okresu dziennego podczas dwumiesięcznej nocy podbiegunowej. „Si l'on prend les moyennes des décades de la nuit polaire, c'est-à-dire à partir du 21 mai jusqu'au 20 juillet, on obtient les chiffres suivants:

0h	2	4	6	8	10	12h	14	16	18	20	22	24h
— 16.9	— 17.0*	— 16.7	— 16 7	— 16.7	— 16.9	— 16 9	— 16.6	— 16.4	— 16.4	— 16.6	— 16.6	— 16.8

„Il est parfaitement possible que le léger rechauffement de l'air que ces chiffres indiquent pour les heures de l'après — midi et de la soirée ne soit pas purement accidentel et que, dans le cas de stations pas trop éloignés du cercle polaire, comme la nôtre, la marche diurne de la température subsiste encore pendant les semaines où le soleil ne s'élève plus au-dessus de l'horizon. S'il est effective-

[1]) Tytuł dzieła: Résultats du voyage du S. Y. Belgica en 1897—1898—1899. Rapports scientifiques, Météorologie par Henryk Aretowski.

Digitized by Google

ment ainsi, le retard considérable du maximum est tout à fait caractéristique.“

Wydawnictwo Arctowskiego obejmuje cogodzinne spostrzeżenia temperatury, w zwykły sposób podane, licząc od północy 0^h do północy następnej 24^h. Z okresu nocy podbiegunowej, od dnia 21 maja do 20 lipca rozpatrzyłem z godziny na godzinę zmiany temperatury, przebiegające w postaci fal, biorąc za punkt wyjścia najwyższą temperaturę z dnia 21 maja o godzinie 8 rano. Od tej chwili, odrzucając niewielkie zmiany parostopniowe, o charakterze wyraźnie przypadkowym, rozróżniłem 21 fal całkowitych z przebiegiem typowym, składających się z fali spadku temperatury więcej fala wzrastającej temperatury. Przeciętny czas trwania spadku wyniosły około 30 godzin, czas trwania wzrostu 36 godzin. Z liczby 21 fal całkowitych niektóre w liczbie 7 były dość krótkotrwałe, od 16 do 48 godzin, pozostałe w liczbie 14 dają fale całkowite o przeciętnem trwaniu $3^1/_2$ dnia. Dodamy, że według obliczeń Arctowskiego na podstawie zapisów barografu, przeciętny czas trwania fali ciśnienia w ciągu 3-ch miesięcy, od 1 maja do 31 lipca, wyniósł 3 dni i 11 godzin.

Ten fakt tu znaleziony, że najczęstsza fala temperatury jest nader długotrwała, łącznie z łagodnym wogóle przebiegiem temperatury z godziny na godzinę, bez nagłych skoków, spostrzeganych w znacznych szerokościach podczas przebiegu zimowych cyklonów, sprawia, że w ogólnych zarysach możemy przewidzieć z góry najprawdopodobniejszy przebieg z danego dnia lub grupy dni. Otóż wybierając dowolny dzień, znajdziemy, że temperatura wciągu całej doby albo statecznie zniżać się będzie, lub też wzrastać, oczywiście jeżeli w ciągu tej doby nie wypadnie zmiana jednej fali na drugą. Najprawdopodobniejszy zatem przebieg temperatury z okresu doby da się przedstawić przy pomocy linii prostej, w pewien sposób nachylonej do poziomu. Skoro weźmiemy szereg kilkunastu dni przyległych, to fale spadającej temperatury zkompensują się częściowo z falami wzrastającej temperatury, dalej wyrównają się drobne przejścia z jednej fali na drugą, przejawiające się w rozmaitych godzinach doby, i przebieg przeciętny, zależny od przypadkowej przewagi wyższej lub niższej temperatury, da nam linię prostą jeszcze nieco nachyloną do poziomu,

Digitized by Google

która to linia stać się powinna równoległą do poziomu, gdy przyjmiemy do rachunku dostatecznie długi szereg dni, np. z miesiąca lub dwóch. Odchylenia od linii prostej o charakterze systematycznym poczytywać będziemy za wyraz okresu dziennego. Skoro do zestawienia dobierać będziemy dni oddzielne, na tle przebiegu innego elementu meteorologicznego, np. wysokiego lub nizkiego stanu ciśnienia, stopnia zachmurzenia nieba lub statecznego kierunku wiatru, to może nie zajść wyrównanie pomiędzy falą wzrostu i spadku temperatury, i możemy otrzymać wyraźnie zarysowany spadek lub wzrastanie temperatury podczas doby, na wzór przebiegu z dnia pojedyńczego, zawsze w założeniu, że okres dzienny nie istnieje.

Półkula południowa, jak wiadomo, przedstawia zupełne przeciwieństwo w porównaniu z północną. Ląd stały, w niewielkiej ilości w stosunku do powierzchni wodnej, rozszerza się w kierunku ku równikowi, a jest silnie zwężony w stronę bieguna, wokoło otoczonego morzem. Oczywiście, na tak ukształtowanej półkuli zjawiska meteorologiczne występować muszą w całej swej pierwotnej prostocie i, pomimo dotkliwego i rażącego braku spostrzeżeń, na mocy bardzo nielicznych danych z pomiarów temperatury powietrza i powierzchni wody, musimy przyjąć, że izotermy koncentrycznie otaczają biegun geograficzny, który równocześnie jest jedynym biegunem zimna. Tylko w jednem miejscu, od strony północno-wschodniej względnie do zimowiska okrętu „Belgica“ izotermy nieco zbaczają od kierunku równoleżników, mianowicie od lądu Ziemi Ognistej, wyginają się w stronę bieguna.

Na tak zarysowanem tle ogólnem, zająłem się wydzieleniem dni, na zasadzie cogodzinnych spostrzeżeń kierunku wiatru, mających podczas całej doby jeden ściśle wyznaczony kierunek, lub poblizki w pojedyńczych godzinach, przy przewadze pierwszego. Jakkolwiek taka kwalifikacya dni nieraz nastręczała wątpliwości, niemniej sądzę, że przeważające kierunki z oddzielnych grup, podanych w tabl. I, są dobrze uwydatnione, i że ten sposób, którym się już kilkakrotnie posługiwałem w innych pracach, lepiej odzwierciadla właściwy przebieg, niż róże wiatrów temperatury w zwykły sposób wykreślane.

Digitized by Google

Wybrane zostały następujące dni pomiędzy 21 maja i 20 lipca 1898 r. (Tablica, patrz str. nast.).

Grupa *a*). Kierunek przeważający *S* i poblizkie: Dzień 24, 25 maja; 3, 5, 8, 14, 21, 22, 23, 30 czerwca; 13, 14 i 15 lipca.

Grupa *b*) Kierunek przeważający *S* i *SE*, podobnie jak grupa *a*). Przebieg zasługuje na wyróżnienie, ponieważ przez 10 dni z rzędu panował zbliżony kierunek wiatru. Liczby są podane według Arctowskiego, jako I dekada z lipca.

Grupa *c*) Cisza, dużo *W* i kierunki zmienne, niezdecydowane. Dień 26, 29 maja; 1, 2, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 20, 25, 27, 28 czerwca; 11, 16, 17, 18, 20 lipca.

Grupa *d*) Przeważający kierunek *N* i poblizkie. Dzień 21, 22, 23, 27, 28, 30, 31 maja; 4, 15, 24, 26, 29 czerwca; 12, 19 lipca.

Grupa *e*) Przeważnie kierunek *W*, nieco *N*. Z grupy *c*) wydzieliłem 10 dni, w których kierunek zachodni przeważał. Dzień 1, 9, 10, 11, 12, 13, 18, 19 czerwca; 17, 18 lipca.

Przeglądając odnośne grupy widzimy:

Skoro stateczny wiatr wieje od strony bieguna (grupa *a*) temperatura spada, i spadek jest stromy, wynosząc od 1 rano do 12 w nocy 5°; jest przytem równomierny tak dalece, że braki kilku nawet godzin z rzędu moglibyśmy zastąpić liczbami na zasadzie interpołacyi, a nawet moglibyśmy z jednej połowy doby przez extrapolacyę obliczyć przebieg w drugiej. Przy wietrze również od strony bieguna (grupa *b*), lecz gdy dni są kolejno wzięte, stanowiąc dziesięciodniówkę miesiąca, temperatura również spada, lecz nieznacznie, i w drugiej połowie doby jest prawie stała, średnio znacznie wyższa niż w grupie *a*); widzimy tu wpływ wzajemnej kompensacyi fali spadku i wzrostu temperatury, niedość jednak wyrównany. Kierunki zmienne, (grupa *c*), z przewagą ciszy i wiatru zachodniego dają w ciągu doby stateczny wzrost temperatury w ilości 3°; istnieje znaczne podobieństwo do przebiegu z grupy *a*) tylko o charakterze wprost przeciwnym. Obie grupy *a*) i *c*) pouczają wyraźnie, jaki powinien być przebieg charakterystyczny, gdy nie istnieje okres dzienny temperatury. Co innego zgoła widzimy rozważając grupę *d*): przy wietrze od strony otwartego morza temperatura na ogół wzrasta, przytem wzrost jest znaczny, wynosi przeszło

Digitized by Google

T A B L

a) przeważający

0h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
— 19.7	— 19.9	— 20.0	— 20.2	— 20.2	— 20.3	— 20.3	— 20.7	— 20.9	— 21.0	— 21.6	— 22.1	— 22

b) wiatr *S* i *SI*

— 15.4	— 15.5	— 15.7	— 15.9	— 15.9	— 16.1	— 16.3	— 16.6	— 16.8	— 17.0	— 17.1	— 17.0	— 16

c) cisza, dużo

— 17.2	— 17.3	— 17.2	— 17.2	— 16.9	— 16 8	— 16.7	— 16.6	— 16.6	— 16.7	— 16.7	— 16 8	— 16

d) przeważający

— 16.1	— 15.4	— 15.5	— 14.9	— 14.2	— 13.8	— 13.5	— 13.1	— 12.8	— 12.6	— 12 2	— 11.9	— 11

e) przeważaja

— 17.0	— 17.4	— 17.5	— 17.0	— 16.9	— 16.9	— 16.8	— 16 9	— 16.6	— 16.6	— 16.4	— 16.1	— 16

f) d

—9.0	—8.6	—8.4	—8.1	—7.7	—7.7	—7.7	—7.6	—7.7	—7.9	—7.8	—7.7	—7

g) d

— 25 1	— 25.6	— 25.8	— 25.8	— 26.0	— 26.2	— 26.4	— 26.6	— 26.7	— 26.7	— 26.8	— 27.0	— 2

Digitized by Google

I C A.

i kierunki poblizkie.

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
— 22.9	— 23.2	— 23.7	— 23.9	— 23.9	— 24.4	— 24.8	— 24,8	— 25.2	— 25.1	— 25.3	— 25.4

Od 1 do 10 lipca 1898 r.

— 17.0	— 17.0	— 17.0	— 16.9	— 16.9	— 17.0	— 17.0	— 17.0	— 17.0	— 16.9	— 17.1	— 17.8

i kierunki zmienne.

— 16.0	— 16.2	— 15.6	— 15 2	— 15.0	— 15.1	— 14.7	— 14 6	— 14.3	— 14 0	— 13.9	— 14.0

i kierunki poblizkie.

— 10.8	— 9.8	— 9.9	— 9.7	— 9.5	— 9.5	— 9.7	— 10.3	— 10.6	— 10.8	— 10.7	— 10.9

cy *W*, nieco *N*.

— 15.6	— 15.3	— 15.0	— 14.9	— 14.9	— 14.9	— 15 2	— 15.4	— 15.1	— 15.0	— 14.9	— 15.0

pochmurne

— 7.4	— 7.1	— 6 5	— 6.2	— 6.0	— 5 7	— 5.6	— 5.3	— 5.2	— 5.3	— 5.3	— 5.7

jasne

— 27.5	— 27.5	— 27.8	— 27.5	— 27.2	— 27.2	— 27.4	— 27.2	— 27.0	— 26.9	— 27.0	— 27.2

Digitized by Google

4°; lecz istnieje przyczyna, która pogłębia właściwy danemu kierunkowi wiatru wzrost temperatury; pogłębienie to wynosi przeszło $^1/_2$°, jak łatwo sprawdzić, wykreślając przebieg dzienny na zasadzie pierwszej połowy doby, łącznie z końcowemi godzinami. Co do istotnej przyczyny zjawiska — dwóch zdań być nie może: mamy tu odbicie okresu dziennego temperatury z poza koła biegunowego, na wolnem morzu, gdzie maximum temperatury przypada na czas kulminacyi słońca, a wiatr z naturalnem opóźnieniem przynosząc prąd ciepły, ogrzewa czasowo daną miejscowość podbiegunową, dokąd nie nastąpi wyrównanie temperatur ogrzanego prądem i miejscowego powietrza. Dziesięć dni wziętych z grupy *c*), z trwałym wiatrem zachodnim z przymieszką północnego (grupa *e*), dają przebieg dość niezdecydowany, wydaje się jednak, że istnieje i tu ślad nagrzania podczas popołudniowych i wieczornych godzin. Temperatura jest znacznie niższa niż w grupie poprzedzającej, i całkowicie charakterem swoim odpowiada grupie *c*).

Naogół dotychczasowe zestawienie wskazuje, że, zgodnie z przebiegiem teoretycznym, podczas nocy podbiegunowej okres dzienny nie istnieje; w szczególnych atoli okolicznościach, gdy trwale wiatr wieje od najcieplejszej strony świata, znajdujemy w godzinach popołudniowych zwyżkę temperatury, wywołaną napływem ciepłej fali powietrza.

Dwie ostatnie grupy dni z tabl. I, pochodzą z zestawienia temperatury podczas dni z całkowicie zachmurzonem niebem i prawie całkowicie pogodnych.

Należą tu: do grupy *f*) następujące dni z zachmurzeniem $\geqslant 9.5$: 23, 28 maja; 6, 12, 18, 19, 27, 30 czerwca; 1, 2, 3, 4, 6, 19, 20 lipca; do grupy zaś *g*) dni 22, 26 maja, 1, 14, 21, 22, 23 czerwca, 8, 9, 10, 11, 13, 17, 18 lipca, z zachmurzeniem średniem <3 stopni.

Pierwszy z tych dwóch przebiegów dziennych uderza niezwykle wysoką temperaturą, wyższą niż z grupy *d*), przy wietrze północnym; temperatura w ciągu doby wzrasta, przytem dość równomiernie, za wyłączeniem paru godzin przedpołudniowych. Ostatnia grupa *g*), dni jasnych, wyróżnia się przedewszystkiem

Digitized by Google

niezwykle nizką temperaturą, niższą niż z dni podczas panującego wiatru od bieguna (grupa *a*). Przebieg z dni pojedyńczo wziętych nie przedstawia, jak znaczna większość innych, ostro zarysowanego spadku lub wzrostu temperatury, lecz jej wyjątkowo nizki stan trwa prawie niezmiennie podczas całej doby. Widać to z całego przebiegu w okresie dziennym, gdyż ogólny spadek nie przenosi 2°. Wreszcie, co najważniejsza, natychmiastowo po przejściu słońca pod horyzontem przez południk miejsca temperatura nagle spada, i spadek blizko $^1/_2$ stopniowy trwa około 4 godzin, poczem przebieg wraca do normy.

Dotychczasowe nasze zestawienia grup kilkunastodniowych dały wyniki zgodne z tem, co przewidzieć można było z góry; niema zatem dostatecznej podstawy do mniemania, że nieoczekiwane zjawisko, z obserwacyi podczas 14 dni jasnych wyprowadzone, jest grą przypadku; prędzej możnaby przypuścić, iż istnieje przyczyna fizyczna, czasowo w godzinach popołudniowych obniżająca temperaturę w dni, kiedy wypromieniowanie ciepła w przestrzeń nie znajduje przeszkody. Jak widzieliśmy, przyczyna zjawiska jest niezależna od statecznych podczas doby kierunków wiatrów z różnych stron horyzontu, gdyż nie znaleźliśmy śladu zniżki, pomimo, że wybrane dni jasne wchodzą również do poprzednio rozważanych grup; zjawisko zatem dość silnie występuje tylko podczas dni jasnych. Skoro wiemy dzisiaj, że i pod biegunem północnym, ściśle w tych samych warunkach, zarówno podczas podróży „Frama“ jak i innych wypraw, według wzmianki Hanna, znaleziono w tym samym okresie doby zniżkę temperatury, hypoteza istnienia przyczyny fizycznej nabiera wszelkich cech pewności, i wyjaśnienie Dovego jest prawdopodobne. Twierdzimy zatem, że Dovego „zmrok ciepła“ jest jedyną przyczyną t. zw. okresu dziennego podczas nocy podbiegunowej. Inne zauważone odchylenia od równomiernego, zgodnie z teoryą, przebiegu temperatury powietrza podczas doby zależą od położenia, jakie zajmuje stacya meteorologiczna podbiegunowa względem najbliższych miejscowości, wyróżniających się niezwykle nizką lub wysoką tamperaturą i od panujących wiatrów.

Digitized by Google

Pod biegunem północnym zestawienia, na wzór tutaj podanych, nastręczyć mogą znaczne trudności, zwłaszcza, gdy opierać się będziemy na wynikach spostrzeżeń jednej wyprawy; natomiast porównawcze studya z kilku miejscowości okołobiegunowych, wyjaśniając zależność od szerokości i rugując wpływ warunków lokalnych, moje podania niewątpliwie stwierdzą.

Czerwiec 1906 r.

Digitized by Google

W. SMOSARSKI.

PRACE M. MARGULESA
o wahaniach peryodycznych ciśnienia barometrycznego.

REFERAT.

WSTĘP.

Streszczenie niniejsze obejmuje następujące rozprawy M. Margulesa:

„Ueber die Schwingungen periodisch erwärmter Luft", str. 24, Wiedeń 1890.

„Luftbewegungen in einer rotirenden Sphäroidschale bei zonaler Druckverteilung", str. 30. Wiedeń, 1892.

„Luftbewegungen in einer rotirenden Sphäroidschale", część II, str. 46, część III, str. 53, Wiedeń, 1893.

(Odbitki z „Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien").

Klasyczne te prace z Meteorologii teoretycznej, z powodu nadzwyczajnej zwięzłości przedstawienia oraz zawiłości rachunku, dopiero w jakiś dziesiątek lat po ukazaniu się zwróciły należytą uwagę uczonych. Nie podobna osiągnąć zupełnego ich zrozumienia, nie przerobiwszy całej pracy z ołówkiem w ręku, powiada prof. W. Trabert[1].

---

[1]) W. Trabert. „Theorie der täglichen Luftdruckschwankung von Margules und die tägliche Oscillation der Luftmassen." Meteorologische Zeitschrift, 1903.

Digitized by Google

Teorya Marguleśa ma na celu wyjaśnienie zależności zmian dziennych ciśnienia od temperatury.

Jeżeli nakreślimy przebieg dzienny ciśnienia barometrycznego dla jakiegokolwiek miejsca po wyrugowaniu wpływów nieperyodycznych, biorąc czas za odciętą, a odchylenie ciśnienia od średniej wartości za rzędną, to otrzymamy nieregularną linię falową; daje się ona rozłożyć na szereg drgań prostych:

$$c_1 \sin(\nu t+\delta_1)+c_2 \sin(2\nu t+\delta_2)+c_3 \sin(3\nu t+\delta_3)+\ldots\ldots, \left[\frac{2\pi}{\nu}=1 \text{ dniowi}\right]$$

o okresach 24, 12, 8, 6 i t. d. godzin; z nich tylko pierwsze i drugie mają amplitudy znaczne, około $\frac{1}{760}$ ciśnienia średniego, podczas gdy pozostałe są niewielkie i mogą być pominięte. W ten sposób przebieg dzienny ciśnienia można przedstawić dosyć dokładnie, jako sumę dwu fal — całodziennej i półdziennej, przyczem ta druga zazwyczaj przeważa. Podobnież można rozłożyć przebieg dzienny temperatury na fale proste: całodzienną, półdzienną i t. d.

Całodzienna fala ciśnienia jest niewątpliwie wywołana przez całodzienną falę temperatury. Występuje ona daleko silniej w dni jasne niż pochmurne, jest bardzo nieznaczna na morzu i okazuje na lądzie wielkie różnice zależnie od miejscowości. Hann wykazał empirycznie, że wszystkie te właściwości dają się objaśnić wpływem całodziennej fali temperatury.

Półdzienna fala ciśnienia odznacza się stosunkowo dużą amplitudą względnie do odpowiadającej jej półdziennej fali temperatury i niezwykłą w Meteorologii regularnością: jest ona prawie jednakowych rozmiarów we wszystkich miejscowościach, leżących na jednakowej szerokości geograficznej i jest jednakowej fazy względem czasu miejscowego. Jej związek z półdzienną falą temperatury nie jest dotychczas wyjaśniony.

Wszelka ograniczona masa powietrza (np. w rurze organowej) ma właściwe sobie drgania swobodne. I atmosfera jest taką skończoną, ograniczoną masą powietrza, „nastrojoną“ na zupełnie określone drgania swobodne, których okresy znajdują się w pewnym stosunku do siebie i zależą tylko od własności atmosfery,

Digitized by Google

jej temperatury, a przedewszystkiem od jej rozmiarów. Na tych to drganiach swobodnych opiera się teorya Margulesa półdziennego wahania barometru.

Każda fala sinusoidalna temperatury o jakimkolwiek okresie, jak się przekonamy dalej, wywołuje w atmosferze falę wymuszoną ciśnienia, mającą taki sam okres. Ale amplituda fali wymuszone zależy nietylko od amplitudy wywołującego ją czynnika, lecz i od własności układu drgającego i jest tem większa, im bardziej okres czynnika działającego zbliża się do okresu swobodnego drgania układu. Otóż Margules wykazał, iż w atmosferze istnieje drganie swobodne z dwiema największościami i dwiema najmniejszościami wzdłuż każdego z równoleżników, którego okres jest bardzo blizki 12 godzin, ale niema żadnego drgania swobodnego o okresie blizkim 24 godzin; to jest przyczyną wielkiej amplitudy półdziennej fali wymuszonej ciśnienia, wywołanej przez słabą stosunkowo półdzienną falę temperatury. Co do wielkości amplitudy, teorya Margulesa w granicach, przyjętych przez niego założeń, wyjaśnia dobrze wahanie półdzienne barometru; pozostaje niewytłómaczoną jego regularność.

Prace Margulesa można podzielić na dwie części: o drganiach swobodnych atmosfery i o wpływie wahań peryodycznych temperatury.

Jakie mogą być drgania swobodne atmosfery?

Wyobraźmy sobie naprzód kulę nieruchomą, otoczoną atmosferą wolną od tarcia, wytwórzmy w jakikolwiek sposób różnice ciśnienia od jednego pasa równoleżnikowego do drugiego i pozostawmy powietrze samemu sobie; wówczas nastąpi ruch wzdłuż południków w kierunku spadku ciśnienia; ten ruch będzie trwał w dalszym ciągu, pomimo że różnice ciśnienia się wyrównają, a to skutkiem bezwładności, i wytworzy spadek ciśnienia w kierunku przeciwnym. W ten sposób ruch przechodzi na drgania stojące. Odchylenie ciśnienia od wartości średniej zmienia się podług prawa następującego:

$$\varepsilon = E(\varphi) \sin nt,$$

Digitized by Google

gdzie $E(\varphi)$ oznacza pewną funkcyę szerokości geograficznej danego punktu, t czas, a $\frac{2\pi}{n}$ jest okresem drgania.

Jeżeli nasza kula wiruje, to przy tych samych warunkach powstaną również fale stojące ciśnienia:

$$\varepsilon = E(\varphi) \sin nt,$$

z tą tylko różnicą, że prócz ruchów południkowych powietrza towarzyszyć im będą ruchy względne wzdłuż równoleżników. Oprócz fal stojących możliwe są jeszcze ruchy stateczne powietrza wzdłuż równoleżników dla ciśnienia stałego w czasie, choć różnego, zależnie od szerokości.

W przypadku ogólnym, gdy warunki początkowe są funkcyami nietylko szerokości (φ), lecz i długości geograficznej (λ), równania aerodynamiczne dają jako rozwiązanie następującą funkcyę peryodyczną dwu zmiennych:

$$\varepsilon = E(\varphi) \sin (h\lambda + nt); \qquad h = 1, 2, 3, \ldots$$

Jeżeli n jest dodatnie, to wzór ten oznacza falę ciśnienia, postępującą na zachód, jeżeli n jest ujemne, to otrzymamy falę ciśnienia, postępującą na wschód.

Gdyby ziemia była nieruchoma, to te fale byłyby zupełnie identyczne i tylko wprost przeciwne co do kierunku rozchodzenia się. W rezultacie więc dałyby znów falę stojącą. Prócz fal stojących możliwe jest, że ciśnienie pozostaje bez zmiany ($\varepsilon = 0$) i powietrze obraca się statecznie wzdłuż równoleżników. Zobaczmy teraz, jak się przedstawiają te ruchy na ziemi wirującej. Przedewszystkiem, obrót ziemi będzie przyśpieszał falę postępującą na zachód i opóźniał falę postępującą na wschód. Okresy ich nie są już jednakowe, i one nie łączą się w jedno drganie stojące. Podobnież ruchy stateczne na ziemi wirującej nie są możliwe i przechodzą na fale, rozchodzące się na zachód, 2-go rodzaju. Tak więc na kuli nieruchomej mielibyśmy fale stojące i ruchy stateczne, na kuli zaś wzrastającej tylko fale postępowe trzech rodzajów. Liczba tych fal jest nieskończenie wielka, Margules dzieli je na klasy stosownie do $h = 1, 2, 3$ i t. d. Gdy $h = 0$, będzie to klasa strefowa, o której mówiliśmy na po-

Digitized by Google

czątku. Fale klasy pierwszej ($h=1$) mają wzdłuż równoleżnika jeden grzbiet i jednę dolinę, fale klasy drugiej ($h=2$) mają w keżdej chwili dwa grzbiety i dwie doliny wzdłuż równoleżnika i t. d.

W każdej klasie istnieje nieskończenie wiele typów fal, stosownie do wartości n. Oczywista, iż drgania atmosfery nie są tak proste, jak przedstawiliśmy, lecz jakkolwiek byłyby złożone, zawsze dają się rozłożyć na sumę (w ogólności nieskończoną) takich drgań prostych.

Przypuszczaliśmy wyżej, że powietrze jest wolne od tarcia, co się nie zgadza z rzeczywistością. Nie znamy jednak należycie praw tarcia w atmosferze, tak że może być mowa tylko o tem, jak ono w ogóle wpływa na wyniki poprzedzające. Otóż, po pierwsze, tarcie zmniejsza stopniowo amplitudę drgania swobodnego lub nawet przekształca je na prosty ruch zanikający, po drugie, zwiększa okres drgania. Prócz tego posiada jeszcze trzecią charakterystyczną właściwość. W Meteorologii rozpatruje się tylko ruchy w kierunku spadku ciśnienia, stosujące się do znanej reguły Buys-Ballota: jeżeli zwrócimy się plecami do wiatru, to na półkuli północnej będziemy mieli dziedzinę ciśnienia nizkiego po lewej ręce (na półkuli południowej po prawej). Tymczasem z góry można spodziewać się w atmosferze ruchów w kierunku przeciwnym gradientowi, gdyż nie można przypuszczać, żeby ruch powstały w pewnym kierunku ustawał natychmiast po wyrównaniu różnicy ciśnień: trwa on dalej wskutek bezwładności i wytwarza wyższe ciśnienie tam, gdzie przedtem było niższe. Wymienione przez nas wyżej rodzaje fal swobodnych bardzo różnią się w stosunku do reguły Buys-Ballota. Fale postępowe wschodnie i zachodnie 2-go rodzaju stosują się prawie zupełnie do reguły, a w falach zachodnich 1-go rodzaju ruch jest przeważnie jej przeciwny. Otóż rachunek wykazuje, iż te drgania, w których zachodzą ruchy, niezgodne z regułą Buys-Ballota, zanikają pod wpływem tarcia daleko szybciej niż te, które są z nią zgodne. Stąd, że w naszej atmosferze prawie się nie spotyka ruchów przeciwnych wspomnianej regule, wynika, że tarcie w atmosferze musi być znaczne.

Digitized by Google

Poniższa tabelka zawiera okresy niektórych typów drgań swobodnych atmosfery wirującej bez tarcia w temperaturze 0°C— w godzinach:

	Klasa pierwsza.	Klasa druga.
Fala postępująca na zachód	13·9	11·9
Fala postępująca na wschód	36·6	18·4
Fala postępująca na zachód 2-go rodzaju	130·7	93·7

Całodziennej fali temperatury odpowiadają fale swobodne, postępujące na zachód klasy 1-ej (z jedną górą i jedną doliną na każdym równoleżniku). Najbardziej zbliżonym okresem ich do 24 godzin jest 13·9 (przez tarcie okres ten powiększa się nieco). Ale jeżelibyśmy jeszcze porównali rozkład izobar w rzeczywistej całodziennej fali ciśnienia i w zaznaczonej fali swobodnej, to przekonalibyśmy się, że ta ostatnia jest odmiennego charakteru i że za najbardziej zbliżoną do całodziennej należy uważać falę swobodną zachodnią 2-go rodzaju o okresie 130·7 godzin. Natomiast pośród fal klasy 2-ej znajdujemy falę w okresie 11·9 godzin, bardzo blizkim do półdziennej fali temperatury i co do charakteru podobną do półdziennej fali ciśnienia.

Przejdźmy teraz do wahań ciśnienia, wywołanych przez zmiany peryodyczne temperatury. Wyobraźmy sobie naprzód rurę nieskończoną, wypełnioną powietrzem, wzdłuż której postępuje fala sinusoidalna temperatury (τ) w kierunku x:

$$\tau = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{\theta} + \frac{x}{L}\right),$$

gdzie θ oznacza okres drgania fali temperatury, L długość tej fali, a $\frac{L}{\theta} = V$ jest prędkością jej rozchodzenia się. Fala ta wywołuje, bez tarcia, falę ciśnienia:

$$\varepsilon = A \frac{V^2}{V^2 - c^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\theta} + \frac{x}{L}\right),$$

gdzie c oznacza prędkość rozchodzenia się w powietrzu drgania izotermicznego (Newtona). Widzimy z tego wzoru, iż okres,

Digitized by Google

długość i prędkość rozchodzenia się wymuszonej fali ciśnienia są takie same, jak temperatury. Amplituda zaś $A V^2 / V^2 - c^2$, zależy od amplitudy wahań temperatury, oraz od prędkości rozchodzenia się $V = L/\theta$ i jest tem większa, im bardziej ta ostatnia zbliża się do prędkości drgań izotermicznych, a więc swobodnych. Przykład ten wyjaśnia to, co powiedzieliśmy wyżej o zależności amplitudy drgań wymuszonych od częstości drgań swobodnych. Widzimy dalej z naszego wzoru, iż faza wymuszonej fali ciśnienia w zupełności zgadza się z fazą temperatury, t. j. maximum ciśnienia przypada wraz z maximum temperatury, jeżeli prędkość rozchodzenia się jest większa niż prędkość c, i jest wprost przeciwna w przypadku odwrotnym. I ta własność fali wymuszonej nie jest przypadkowa, lecz, jak zobaczymy dalej, jest prawem ogólnem. Gdy $V = c$, amplituda fali wymuszonej ciśnienia staje się nieskończenie wielką. Jeżeli wprowadzimy w rachunek tarcie o spółczynniku l, to fala ciśnienia będzie miała postać:

$$\varepsilon = KA \sin\left(\frac{t}{\theta} + \frac{x}{L} + \eta\right); \quad K = \frac{V\sqrt{V^2 + l^2 L^2}}{\sqrt{(V^2 - c^2)^2 + V^2 l^2 L^2}}.$$

Widzimy stąd, iż tarcie przesuwa fazę ciśnienia względem temperatury o wielkość η, będącą pewną funkcyą tarcia. Następnie amplituda też zależy od tarcia i jest tem większa, im bardziej prędkość rozchodzenia się V zbliża się do c, lecz nigdy nie może wzrosnąć do nieskończoności.

Po tym przykładzie, mającym ułatwić zrozumienie dalszych wyników, przejdziemy do przypadku, bardziej odpowiadającego rzeczywistości. W atmosferze o nieznacznej grubości, bez tarcia, otaczającej kulę wirującą o rozmiarach ziemi, fala temperatury, postępująca na zachód:

$$\tau = C \sin\omega \sin(\nu t + \lambda)$$

gdzie ω oznacza odległość kątową od bieguna, a λ szerokość geograficzną, $\frac{2\pi}{\nu} = 24$ godzin, wytwarza falę ciśnienia przy przy ęciu temperatury średniej 0°C:

Digitized by Google

$$\varepsilon = C \sin(\nu t + \lambda)$$
$$[1{,}146 \sin\omega - 0{,}423 \sin^3\omega - 0{,}370 \sin^5\omega - 0{,}106 \sin^7\omega - \ldots\ldots]$$

Jeżeli zaś fala temperatury powtarza się dwa razy dziennie, to przyjmując:

$$\tau = C \sin^2\omega \sin(2\nu t + 2\lambda),$$

gdzie tylko dla uproszczenia rachunku podano inne prawo zależności temperatury od szerokości geograficznej, będzie:

$$\varepsilon = -C \sin(2\nu t + 2\lambda)$$
$$[37{,}99 \sin^4\omega + 23{,}06 \sin^6\omega + 5{,}75 \sin^8\omega + 0{,}81 \sin^{10}\omega + \ldots\ldots].$$

Wobec poczynionych założeń powyższe wyrażenia na ε nie mogą mieć bezwzględnego znaczenia dla ziemi. Są one jednak bardzo charakterystyczne pod tym względem, iż dla równych wahań temperatury, wahania ciśnienia w fali półdziennej wypadają daleko większe, niż w fali pojedyńczej. Obliczając takie fale dla różnych temperatur średnich, Margules przekonał się, że spółczynniki pierwszego szeregu wstaw zmieniają się bardzo wolno z temperaturą. Inaczej dla fali półdziennej: tu mnożnik przy $\sin^4\omega$, w pobliżu temperatury -5^0C, przeskakuje od $-\infty$ do $+\infty$, zupełnie jak w przykładzie poprzedzającym fali w rurze nieskończonej, gdy prędkość jej rozchodzenia staje się równą prędkości drgań swobodnych (izotermicznych). Jeżeli przeto przyjąć temperaturę średnią atmosfery kulistej blizką -5^0C, to wystarczają małe półdzienne fale temperatury o amplitudzie zaledwie dostrzegalnej, aby wytworzyć w powietrzu bez tarcia wielkie fale ciśnienia. Ciekawy ten wynik zgadza się z tem, co powiedzieliśmy wyżej o istnieniu w atmosferze fali swobodnej podwójnej o okresie bardzo blizkim 12 godzin i o wpływie, jaki ona powinna wywierać na półdzienną falę wymuszoną ciśnienia.

Jak w przykładzie rury nieskończonej, tak i tu tarcie zmienia amplitudę fali wymuszonej, ale w różnym stopniu, zależnie od szerokości geograficznej, oraz przesuwa fazę. Niżej przytaczamy 2 tabelki, uwidoczniające wpływ tarcia na falę ciśnienia. Amplituda temperatury przyjęta jest równą 1^0C na równiku; spółczynnik

Digitized by Google

tarcia l, dla dogodności rachunku, przyjęto równym 0·262 godziny t. j. prędkości kątowej obrotu ziemi.

Fala całodzienna.

$$\tau = {}^1/_{273} \sin\omega \sin(\nu t + \lambda); \quad 2\pi/_\nu = 24 \text{ godzin.}$$

Szerokość geograf.	273 τ	10^3 ε Fala wymuszona bez tarcia	10^3 ε Fala wymuszona z tarciem
90°	0	0	0
75°	0,26 sin($\nu t+\lambda$)	1,06 sin($\nu t+\lambda$)	1,04 sin($\nu t+\lambda+$ 9°,0)
60°	0,50 „ „	1,86 „ „	1,92 sin($\nu t+\lambda+$ 12°,2)
45°	0,71 „ „	2,15 „ „	2,48 sin($\nu t+\lambda+$ 17°,6)
30°	0,87 „ „	1,84 „ „	2,72 sin($\nu t+\lambda+$ 24°,3)
15°	0,97 „ „	1,22 „ „	2,72 sin($\nu t+\lambda+$ 30°,5)
0°	1,00 „ „	0,91 „ „	2,69 sin($\nu t+\lambda+$ 33°,3)

Skutkiem tarcia, amplitudy przeważnie powiększyły się; maximum ciśnienia wyprzedza maximum temperatury, zależnie od szerokości geograficznej; wyprzedzenie to jest największe na równiku, gdzie wynosi 2,2 godziny.

Fala półdzienna.

$$\tau = {}^1/_{273} \sin^2\omega \sin(2\nu t + 2\lambda); \quad \frac{2\pi}{2\nu} = 12 \text{ godzin.}$$

Szerokość geograf.	273 τ	10^3 ε Fala wymuszona bez tarcia	10^3 ε Fala wymuszona z tarciem
90°	0	0	0
75°	0,07 sin($2\nu t+2\lambda$)	− 0,6 sin($2\nu t+2\lambda$)	0,25 sin($2\nu t+2\lambda+$ 11°,9)
60°	0,25 „ „	− 10,1 „ „	0,98 sin($2\nu t+2\lambda+$ 18°,2)
45°	0,50 „ „	− 46,6 „ „	2,15 sin($2\nu t+2\lambda+$ 28°,3)
30°	0,75 „ „	−120,9 „ „	3,66 sin($2\nu t+2\lambda+$ 38°,3)
15°	0,93 „ „	−207,2 „ „	5,06 sin($2\nu t+2\lambda+$ 45°,7)
0°	1,00 „ „	−247,1 „ „	5,66 sin($2\nu t+2\lambda+$ 48°,7)

Digitized by Google

Widzimy, iż w fali półdziennej wskutek tarcia, amplitudy ciśnień są już znacznie mniejsze, niż w układzie, wolnym od tarcia; tak na równiku amplituda jest tylko dwa razy większa niż amplituda analogicznej fali całodziennej. W atmosferze wolnej od tarcia faza ciśnienia jest przeciwna względem fazy temperatury. Tarcie przesuwa znacznie fazę ciśnienia, tak że w danym przykładzie na równiku maximum ciśnienia opóźnia się względem minimum temperatury o 4,4 godziny. Przesunięcie to jest bardzo rozmaite w różnych szerokościach. Należy zaznaczyć, że ten ostatni wynik rachunku nie zgadza się z rzeczywistością: półdzienna bowiem fala ciśnienia posiada w naturze prawie jednakową fazę we wszystkich szerokościach.

Widzieliśmy, iż według teoryi, w fali całodziennej maximum ciśnienia przypada jednocześnie z maximum temperatury; tymczasem w przyrodzie maximum ciśnienia przypada w tym czasie, co i minimum temperatury. Sprzeczność ta wynika stąd, że założenie fali temperatury, biegnącej dokoła ziemi z amplitudą stałą, zanadto odbiega od rzeczywistości. Wistocie, wskutek wielkich różnic lokalnych, ogrzewanie dzienne rozchodzi się z amplitudą prawie stałą codziennie tylko na oddzielnych, względnie małych obszarach; w każdym takim obszarze ma ona niemal charakter fali stojącej. Takie drgania stojące temperatury, zachodzące tylko w małym obszarze atmosfery, powodują w nim wahania ciśnienia, których maximum następuje jednocześnie z minimum temperatury. Podobnież rzecz się będzie miała przy falach postępowych temperatury, jeżeli one rozchodzą się tylko na niewielkie odległości. Jeszcze dwa szczególne wypadki uzupełniają rozprawy Margulesa; mianowicie, gdy wahania ciśnienia zachodzą w dolinie zamkniętej (w słupie pionowym powietrza), oraz gdy w pewnej warstwie atmosfery przechodzi fala temperatury, pod tą zaś warstwą i nad nią temperatura pozostaje bez zmiany. Ten ostatni rachunek (tylko dla atmosfery płaskiej) wykonał Margules ze względu na hypotezę Hanna, że przyczyna półdziennej fali ciśnienia tkwi w pochłanianiu promieni słonecznych przez górne warstwy atmosfery.

„Gdyby można było—powiada autor w końcu swej pracy—podać przyczynę prawidłowej fali półdziennej, to wykonane ra-

Digitized by Google

chunki, wystarczyłyby do dość zupełnego rozwiązania zagadnienia o dziennem wahaniu barometru."

Z wymienionych w nagłówku rozpraw Margulesa pierwsza „O drganiach powietrza peryodycznie ogrzewanego" traktuje o wahaniach ciśnienia, wywołanych w przypadku atmosfery bez tarcia; I i II części drugiej rozprawy „Ruchy powietrza w warstwie sferoidalnej" poświęcone są zbadaniu ruchów swobodnych atmosfery; doświadczenie, nabyte przy rozwiązaniu tych ostatnich zagadnień, dało możność autorowi przezwyciężyć wielkie trudności rachunkowe, związane z badaniem fal ciśnienia, wymuszonych w atmosferze przez zmiany temperatury, z uwzględnieniem tarcia, co stanowi przedmiot trzeciej części drugiej rozprawy. Teoryę ogólną uzupełnił Margules obliczeniem wielu typów fal ciśnienia, zarówno swobodnych. jak i wymuszonych, oraz zbadaniem ich stosunków wzajemnych.

Znaczenie drgań swobodnych atmosfery dla wyjaśnienia fali półdziennej ciśnienia pierwszy wskazał W. Thomson w r. 1882, jednak bez przeprowadzenia idei tej w rachunku. Odnośne równania aerodynamiczne przedstawiają analogię do równań różniczkowych z teoryi przypływów i odpływów morskich Laplace'a i zostały rozwiązane przez Margulesa, dzięki zastosowaniu obmyślonej przez Laplace'a metody ułamków łańcuchowych. Wyjaśnienie tej metody i wskazanie jej znaczenia dla równań aerodynamicznych jest również zasługą W. Thomsona.

Streszczenie niniejsze podzieliliśmy na cztery części. Część pierwsza obejmuje równania ogólne ruchu powietrza na płaszczyźnie i na kuli. Część druga—drgania swobodne (w temperaturze stałej) atmosfery przy rozkładzie strefowym ciśnień. Część trzecia — drgania swobodne atmosfery w przypadku ogólnym dla jakiegokolwiek rozkładu ciśnień początkowych. Wreszcie, część czwarta—ruchy powietrza w atmosferze pod wpływem zmian peryodycznych temperatury. W każdej z trzech ostatnich części rozpatruje się naprzód warstwę kulistą powietrza, bez tarcia, nieruchomą; potem takąż warstwę wirującą, a następnie obadwa te przypadki z uwzględnieniem tarcia.

Digitized by Google

ROZDZIAŁ I.

Równania ogólne.

§ 1. Ruch powietrza na płaszczyźnie.

Wyobraźmy sobie ziemię, jako płaszczyznę nieskończoną na której powietrze porusza się bez tarcia, jednakowo we wszystkich płaszczyznach pionowych równoległych, w kierunku ze wschodu na zachód. Wprowadzimy następujące oznaczenia, u—składowa pozioma prędkości (wzdłuż osi x), w – składowa pionowa prędkości (wzdłuż osi z, do góry), μ—gęstość powietrza-p—ciśnienie, T—temperatura bezwzględna, t—czas, g—przyśpieszenie ciężkości, R– stała.

Dla małych prędkości, dla których można pominąć wyrazy 2-go stopnia wielkości u i w, będziemy mieli następujące równania ruchu:

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}; \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} - g;$$

dalej równanie ciągłości, dające zależność pomiędzy zmianą gęstości i prędkości:

$$(1a) \qquad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial(\mu u)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu w)}{\partial z} = 0.$$

wreszcie prawo Mariotte'a-Gay-Lussac'a:

$$(1b) \qquad p = R\mu T.$$

Jeżeli powietrze jest w spoczynku, to p, μ i T mają wartości p_0, μ_0, T_0, będące funkcyami samej tylko wysokości z, przyczem z poprzedzających równań otrzymamy:

$$(2) \qquad \frac{1}{p_0}\cdot\frac{\partial p_0}{dz} = -\frac{g}{RT_0}; \quad \frac{1}{\mu_0}\frac{d\mu_0}{dz} = -\frac{g}{RT_0} - \frac{1}{T_0}\cdot\frac{dT_0}{dz};$$

$$p_0 = R\mu_0 T.$$

Digitized by Google

Niech ruch powstaje przez małe zmiany temperatury, wówczas wahania gęstości i ciśnienia będą wogóle nieznaczne; jeżeli napiszemy:

$$p = p_0(1+\varepsilon), \quad \mu = \mu_0(1+\sigma), \quad T = T_0(1+\tau),$$

wówczas ε, σ i τ będą liczbami małemi, których kwadraty i iloczyny pomijamy:

$$(3)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = -RT_0\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}; \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = -RT_0\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + g\tau; \\ &\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} - w\left(\frac{g}{RT_0} + \frac{1}{T_0}\frac{dT_0}{dz}\right) = 0; \quad \varepsilon = \sigma + \tau. \end{aligned}$$

Rugując z powyższych równań u, w i σ, otrzymamy następującą zależność pomiędzy ciśnieniem i temperaturą:

$$(4)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} - \frac{g}{RT_0}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{1}{RT_0}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} \\ &= \frac{g}{RT_0}\frac{\partial \tau}{\partial z} - \frac{g}{RT_0}\left(\frac{g}{RT_0} + \frac{1}{T_0}\frac{dT_0}{\partial z}\right)\tau - \frac{1}{RT_0}\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

§ 2. Ruch powietrza na kuli.

Oznaczamy przez: r—promień, ω—odległość kątową od bieguna, λ—długość wschodnią.

$$x = r\sin\omega\cos\lambda, \quad y = r\sin\omega\sin\lambda, \quad z = r\cos\omega.$$

Posiłkując się znanemi nam wzorami, składowe siły w spółrzędnych biegunowych, znajdziemy:

$$(5)\quad \begin{cases} P = \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\omega}{dt}\right)^2 - r\sin^2\omega\left(\dfrac{d\lambda}{dt}\right)^2, \\ Q = r\dfrac{d^2\omega}{dt^2} + 2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\omega}{dt} - r\cos\omega\,.\sin\omega\left(\dfrac{d\lambda}{dt}\right)^2, \\ \Lambda = r\sin\omega\dfrac{d^2\lambda}{dt^2} + 2\sin\omega\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\lambda}{dt} + 2r\cos\omega\dfrac{d\omega}{dt}\cdot\dfrac{d\lambda}{dt}. \end{cases}$$

Digitized by Google

gdzie P, Ω, Λ są składowemi siły w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach — promienia, południka i równoleżnika. Oznaczając składowe prędkości w tych kierunkach:

$$\frac{dr}{dt} = a \qquad r\frac{d\omega}{dt} = b, \qquad r\sin\omega . \frac{d\lambda}{dt} = c$$

i odrzucając kwadraty i iloczyny tych składowych, znajdziemy:

$$P = \frac{da}{dt}, \qquad \Omega = \frac{db}{dt}, \qquad \Lambda = \frac{dc}{dt}.$$

Szukane równania ruchu powietrza na kuli będą:

$$(6) \quad -g - \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial a}{\partial t}, \quad -\frac{1}{\mu r}.\frac{\partial p}{\partial \omega} = \frac{\partial b}{\partial t}, \quad -\frac{1}{\mu r\sin\omega}\frac{\partial p}{\partial \lambda} = \frac{\partial c}{\partial t}.$$

Równania (6) służą dla kuli nieruchomej. Aby otrzymać równania ruchu względnego na kuli wirującej, należy podstawić w równaniach (5) $\nu t + \lambda$ zamiast λ oraz $\nu + \frac{d\lambda}{dt}$ zamiast $\frac{d\lambda}{dt}$; ν jest prędkością kątową obrotu ziemi.

Równanie ciągłości zarówno dla kuli nieruchomej, jak i wirującej będzie:

$$(7) \qquad \frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{\partial(\mu r^2 a)}{r^2\partial r} + \frac{\partial(\mu b\sin\omega)}{r\sin\omega\,\partial\omega} + \frac{\partial(\mu c)}{r\sin\omega . \partial\lambda} = 0.$$

Kładąc $p = p_0(1+\varepsilon)$, $\mu = \mu_0(1+\sigma)$, $T = T_0(1+\tau)$ otrzymamy z równań (6) i (7) dla małych τ i ε, po wyrugowaniu $\sigma = \varepsilon - \tau$, dla kuli wirującej:

$$(8) \quad \begin{cases} g\tau - RT_0\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial r} = \dfrac{\partial a}{\partial t} - 2\nu\sin\omega . c \\[2ex] -RT_0\dfrac{\partial\varepsilon}{r\partial\omega} = \dfrac{\partial b}{\partial t} - 2\nu\cos\omega . c \\[2ex] -RT_0\dfrac{\partial\varepsilon}{r\sin\omega . \partial\lambda} = \dfrac{\partial c}{\partial t} + 2\nu\sin\omega . a + 2\nu\cos\omega . b \\[2ex] \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \dfrac{\partial\tau}{\partial t} + \left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{g}{RT_0}\right)a + \dfrac{\partial a}{\partial r} + \dfrac{\partial(b\sin\omega)}{r\sin\omega . \partial\omega} + \dfrac{\partial c}{r\sin\omega . \partial\lambda} = 0. \end{cases}$$

Digitized by Google

Kładąc w ostatnich równaniach $v=0$, otrzymamy układ równań dla kuli nieruchomej.

W dalszym ciągu będziemy rozpatrywali jedynie bardzo cienką warstwę powietrza w porównaniu z promieniem ziemi i uwzględnimy tylko ruchy poziome powietrza, tak że r=stałej=S i $a=0$, skutkiem czego pierwsze z równań (8) staje się zbytecznem.

ROZDZIAŁ II.

Drgania swobodne atmosfery przy rozkładzie strefowym ciśnień.

---

§ 3. Fale stojące w warstwie kulistej nieruchomej bez tarcia.

Przyjmujemy powierzchnię ziemi za zupełnie jednostajną i pokrytą cienką warstwą powietrza o jednostajnej i stałej temperaturze. Niechaj w pewnym momencie ciśnienie i prędkość powietrza wykazują różnice tylko zależnie od szerokości, pozostające jednakowemi wzdłuż każdego z równoleżników. Szukamy więc ciśnienia i prędkości dla jakiegokolwiek momentu czasu, zakładając, że dla oznaczonego momentu czasu są one dane, jako funkcye samej tylko szerokości geograficznej.

Dla kuli nieruchomej podlegają rozpatrzeniu tylko prędkości południkowe, ponieważ prędkości wzdłuż równoleżników nie mogłyby zmienić rozkładu ciśnień. Przy założeniach powyższych: $\tau=0$, $c=0$, $a=0$, $r=S=$stała, równania ogólne, § 2 wzory (8), redukują się do następujących dwóch:

$$(1)\quad \begin{cases} -\dfrac{RT}{S}\cdot\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}=\dfrac{\partial b}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\dfrac{1}{S\sin\omega}\cdot\dfrac{\partial(b\sin\omega)}{\partial\omega}=0. \end{cases}$$

Digitized by Google

Można im uczynić zadość, kładąc:

$$b = \varphi(\omega) . \cos nt, \quad \varepsilon = E(\omega) \sin nt .$$

Z pierwszego z równań (1) wynika: $\varphi = \frac{RT}{nS} . \frac{dE}{d\omega}$.
Rugując φ, znajdziemy następujące równanie na E:

$$(2) \qquad \frac{1}{\sin\omega} . \frac{d}{d\omega}\left(\frac{dE}{d\omega} . \sin\omega\right) + \frac{n^2S^2}{RT} E = 0,$$

t. j. równanie różniczkowe funkcyj kulistych, którego rozwiązania szczególne są:

$E_0 = 1$ oraz $n_0 = 0$,

$E_1 = \cos\omega$ oraz $n_1 S = \sqrt{1.2RT}$,

$E_2 = \frac{3}{2}(\cos^2\omega - {}^1/_3)$, oraz $n_2 S = \sqrt{2.3RT}$,

$E_3 = \frac{5}{2}(\cos^3\omega - {}^3/_5 \cos\omega)$ oraz $n_3 S = \sqrt{3.4RT}$.

i t. d.

$E_j = P_j(\omega)$ oraz $n_j S = \sqrt{j(j+1)RT}$.

gdzie $P_j(\omega)$ oznacza funkcyę kulistą rzędu j. Rozwiązania te przedstawiają fale stojące o okresie $= \frac{2\pi}{n_j}$. Dla E ze skaźnikiem parzystym jest równik linią węzłową (oprócz niego istnieją jeszcze inne linie węzłowe). Ciśnienie i prędkości na obu półkulach są symetryczne względem równika. E ze skaźnikami nieparzystemi należą do ruchów, odbywających się poprzez równik, przyczem prędkość b na jakiejkolwiek szerokości południowej jest równa co do wielkości i kierunku prędkości na tejże szerokości północnej, odchylenia zaś ciśnienia od wartości średniej są w obu tych szerokościach jednakowe, lecz o znaku przeciwnym.

Rozwiązanie ogólne będzie miało postać:

$$\varepsilon = \Sigma C_j E_j(\omega) \sin(n_j t + \delta_j), \quad b = \Sigma C_j \varphi_j(\omega) \cos(n_j t + \delta_j)$$

Digitized by Google

z dwoma szeregami stałych dowolnych C_j i δ_j, które dają się wyznaczyć z warunków początkowych dla b i ε. W przypadku niniejszym mamy więc do czynienia tylko z falami stojącemi.

Powyższe rozwiązanie zagadnienia o drganiach swobodnych atmosfery bez tarcia na kuli nieruchomej zostało podane przez lorda Rayleigha w zastosowaniu do Akustyki. Nie trudno rozszerzyć je na przypadek tarcia. Jeżeli jednak przejdziemy do kuli wirującej, to zadanie staje się bardzo trudnem i nie możnaby go rozwiązać bez zastosowania metody Laplace'a z teoryi przypływów i odpływów.

§ 4. Fale stojące i ruchy stateczne powietrza w warstwie sferoidalnej wirującej.

Zadanie polega na znalezieniu ruchu względnego powietrza w warstwie wirującej dla rozkładu strefowego ciśnień, przyczem wskutek odchyleń ruchu przez obrót, występuje już składowa równoleżnikowa c ruchu względnego. Prędkość kątową obrotu ziemi nazwijmy przez ν. Równania różniczkowe będą:

$$(3)\quad \begin{cases} -\dfrac{RT}{S}\cdot\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}=\dfrac{\partial b}{\partial t}-2\nu\cos\omega\,.\,c\,, \\ 0=\dfrac{\partial c}{\partial t}+2\nu\cos\omega\,.\,b\,, \\ 0=\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\dfrac{1}{S\sin\omega}\cdot\dfrac{\partial(b\sin\omega)}{\partial\omega}\,. \end{cases}$$

Po wyrugowaniu ε i c pozostanie:

$$(4)\quad \frac{\partial^2 b}{\partial t^2}+4\nu^2\cos^3\omega\,.\,b-\frac{RT}{S^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\omega}\,\frac{\partial(b\sin\omega)}{\sin\omega\,.\,\partial\omega}=0.$$

Rozwiązaniom szczególnym można nadać postaci następujące:

$$(5)\quad \begin{cases} b=\varphi(\omega)\,.\cos nt\,,\quad c=\psi(\omega)\,.\sin nt\,,\quad \varepsilon=E(\omega)\sin nt\,, \\ \psi=-\dfrac{2\nu}{n}\cos\omega\,.\,\varphi\,,\quad E=-\dfrac{1}{nS\,.\sin\omega}\cdot\dfrac{\partial(\varphi\sin\omega)}{\partial\omega}\,. \end{cases}$$

Digitized by Google

Zamiast równania (4) otrzymamy:

$$(6)\qquad \frac{d}{d\omega}\,\frac{d(\varphi\sin\omega)}{\sin\omega\,.\,d\omega}+(\varkappa p-\varkappa\cos^2\omega)\,\varphi=0,$$

$$\left[\varkappa=\frac{4\nu^2S^2}{RT},\quad p=\frac{n^2}{4\nu^2}\right].$$

Dla rozwiązania tego równania przedstawimy φ, jako szereg nieskończony:

$$(7)\qquad \varphi=\sin\omega\,.\,\Sigma\,a_j\cos^j\omega\,.$$

Podstawiwszy wyrażenie to w równanie (6) i przyrównywając do zera sumy spółczynników przy jednakowych potęgach wielkości $\cos\omega$, przekonamy się, że otrzymane w ten sposób zależności pomiędzy a_j rozpadają się na dwie całkiem niezależne od siebie grupy: ze skaźnikami j nieparzystemi i parzystemi. Będziemy więc mieli dwa niezależne od siebie rozwiązania. Dla jednego jest równik płaszczyzną symetryi (fale parzyste), w drugim ruch odbywa się poprzez równik (fale nieparzyste).

a) Fale stojące parzyste. Weźmy więc naprzód:

$$(8)\qquad \varphi=\sin\omega\,.\,(a_1\cos\omega+a_3\cos^3\omega+a_5\cos^5\omega+\ldots).$$

Pomiędzy spółczynnikami a_j znajdziemy następujące zależności

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} 2\,.\,3\,(a_3-a_1)+\varkappa p a_1=0,\\ 4\,.\,5\,(a_5-a_3)+\varkappa p a_3-\varkappa a_1=0,\\ 6\,.\,7\,(a_7-a_5)+\varkappa p a_5-\varkappa a_3=0 \text{ i t. d.. w ogóle:}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (j+1)(j+2)(a_{j+2}-a_j)+\varkappa p a_j-\varkappa a_{j-2}=0. \end{array}\right.$$

Dla rozwiązania powyższych równań z niewiadomemi: a_j oraz $\varkappa p=\frac{S^2n^2}{RT}$ idziemy za przykładem Laplace'a. Równanie w postaci ogólnej daje nam:

$$\frac{a_j}{a_{j-2}}=\frac{-\varkappa}{(j+1)(j+2)-\varkappa p-(j+1)(j+2)\,.\,\frac{a_{j+2}}{a_j}}\,.$$

Digitized by Google

Wyraziwszy analogicznie a_{j+2}/a_j, podstawimy je w powyższe wyrażenie, postąpimy w ten sam sposób z a_{j+4}/a_{j+2} i t. d. W ten sposób otrzymamy ułamek łańcuchowy:

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{-\varkappa}{4.5-\varkappa p+}\,\frac{4.5\varkappa}{6.7-\varkappa p+}\,\frac{6.7\varkappa}{8.9-\varkappa p+}\ldots$$

Wyrażenie to na a_3/a_1 otrzymaliśmy z drugiego i następnych równań układu (9), z pierwszego zaś równania (9) mamy:

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{2.3-\varkappa p}{2.3},$$

a z porównania obu wyrażeń wynika równanie:

$$(10)\quad 0 = 2.3-\varkappa p+\frac{2.3\varkappa}{4.5-\varkappa p+}\,\frac{4.5\varkappa}{6.7-\varkappa p+}\,\frac{6.7\varkappa}{8.9-\varkappa p+}\ldots$$

W równaniu tem $\varkappa$ jest wiadome, wielkość zaś niewiadomą $\varkappa p$, zależną od okresu szukanego drgania, można znaleźć drogą przybliżeń. Znalazłszy $\varkappa p$ z równania (10), łatwo już obliczyć z równań (9) spółczynniki a_j^0, przyczem a_1 pozostaje nieoznaczone. Liczba pierwiastków $\varkappa p$ równania (10) jest nieskończenie wielka; odpowiadają im pojedyńcze typy fal stojących. Autor podaje tabelkę kilku rozwiązań dla temperatury bezwzględnej: $T = 273^0$, $\varkappa = \frac{4\nu^2 S^2}{RT} = 10{,}94$. Podajemy jeden z przykładów, odpowiadający pierwszemu (najmniejszemu) pierwiastkowi $\varkappa p = 10{,}25$.

$$p = \frac{n^2}{4\nu^2} = 0{,}9369;\quad n = 2\nu\sqrt{p} = 1{,}936\nu;\quad \nu = 2\pi/24.60.60,$$

$$b = a_1 \cos nt \sin\omega \cos\omega\,[1-0{,}71\cos^2\omega + 0{,}20\cos^4\omega - 0{,}03\cos^6\omega + \ldots]$$

$$c = -a_1\frac{2\nu}{n}\sin nt.\sin\omega.\cos\omega\,[1-0{,}71\cos^2\omega + 0{,}20\cos^4\omega - \ldots]$$

$$\varepsilon = \frac{a_1}{nS}\sin nt\,[1 - 5{,}12\cos^2\omega + 4{,}55\cos^4\omega - 1{,}64\cos^6\omega + 0{,}32\cos^8\omega - 0{,}05\cos^{10}\omega + \ldots].$$

Digitized by Google

Widzimy z wzorów powyższych, iż na równiku i na biegunach prędkość zawsze jest $=0$. Dalej wystarczy rozpatrzeć to tylko, co się odbywa na półkuli północnej, ponieważ na półkuli południowej ciśnienia i prędkości są odbiciem w zwierciadle ciśnien i prędkości na półkuli północnej. W chwili początkowej, $t=0$, odchylenie ciśnienia ε równa się zeru, prędkość południkowa b – dodatnia (skierowana na południe), prędkość równoleżnikowa $=0$. W ciągu pierwszej ćwierci okresu ciśnienie spada na biegunie i wzrasta na równiku do chwili $t=\frac{\pi}{2n}$, jednocześnie maleje prędkość południkowa do zera, a równoleżnikowa wzrasta do maximum (w kierunku na zachód); następnie b zmienia kierunek na północ, podczas gdy c, malejąc, pozostaje skierowane na zachód. W chwili $t=\frac{\pi}{n}$ ciśnienie powraca do stanu początkowogo — $\varepsilon=0$, b dochodzi do maximum w kierunku na północ, $c=0$. Następnie zaczyna się tworzyć maximum ciśnienia na biegunie i minimum na równiku, c przybiera kierunek na wschód, b pozostaje w kierunku północnym, malejąc ciągle aż do zera. W ostatniej ćwierci okresu ciśnienie wyrównywa się znowu, b wzrasta, c maleje do zera i wszystko powraca do stanu początkowego. Kierunek ruchu równoleżnikowego jest przeciwny regule Boys-Ballota. Okres tych zmian wynosi: $\theta^1=2\pi/n=2\pi/2\nu\sqrt{p}=0{\cdot}52$ doby.

Dwóm następnym pierwiastkom p odpowiadają okresy:

dla $p=2{,}3195$, $\theta_2=0{,}33$ doby;

dla $p=4{,}337$, $\theta_3=0{,}24$ doby.

b) Fale stojące nieparzyste, Kładziemy:

$$\varphi=\sin\omega\,(a_0+a_2\cos^2\omega+a_4\cos^4\omega\ldots.)$$

Spółczynniki są związane zależnościami:

$$1\,.\,2\,(a_2-a_0)+\varkappa p a_0=0,$$

$$3\,.\,4\,(a_4-a_2)+\varkappa p a_2-\varkappa a_0=0,$$

$$5\,.\,6\,(a_6-a_4)+\varkappa p a_4-\varkappa a_2=0,\quad \text{i t. d.}$$

Digitized by Google

z których obliczymy te spółczynniki w taki sam sposób jak poprzednio. Trzy pierwsze (najmniejsze) pierwiastki dla $\varkappa = 10{,}94$ są:

$$p = 0{,}3447\,;\quad 1{,}567\,;\quad 3{,}238\,;$$

odpowiadają im okresy:

$$\theta = 0{,}85\,;\quad 0{,}40\,;\quad 0{,}28 \text{ doby}\,.$$

Z nieskończonej liczby rozwiązań parzystych i nieparzystych otrzymamy rozwiązanie ogólniejsze, biorąc ich sumę:

$$(11)\quad \begin{cases} b = \Sigma\, C_j \,.\, \varphi_j(\omega) \,.\, \cos(n_j t + \delta_j)\,, \\ c = -\,\Sigma\, C_j \,.\, 2\nu/n_j \;\; \varphi_j(\omega) \,.\, \cos\omega \,.\, \sin(n_j t + \delta_j)\,, \\ \varepsilon = -\,\Sigma\, C_j \dfrac{1}{n_j S} \,.\, \dfrac{d(\varphi_j \sin\omega)}{\sin\omega \,.\, d\omega} \,.\, \sin(n_j t + \delta_j)\,. \end{cases}$$

Stałe dowolne C_j i δ_j należy wyznaczyć ze stanu początkowego, dla którego b, c i ε są dane jako funkcye wielkości ω. Dwa nieskończone szeregi C_j i δ_j nie wystarczają jednak do zadośćuczynienia tym trzem warunkom, a więc powyższe rozwiązanie (11), przedstawiające fale stojące, nie jest jeszcze zupełne. Otóż równaniom różniczkowym (3) można jeszcze uczynić zadość, zakładając:

$$(12)\quad \begin{aligned} &b = 0, \quad c = \Psi(\omega), \quad \text{gdzie } \Psi \text{ jest pewną dowolną funkcyą wielkości } \omega, \\ &\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} = \frac{2\nu S}{RT} \cos\omega \,.\, \Psi(\omega). \end{aligned}$$

Dołączając to rozwiązanie do (11), otrzymamy wszystko, aby uczynić zadość warunkom początkowym. Rozwiązanie (12) przedstawia ruch stateczny wzdłuż równoleżników, zgodny z regułą Buys-Ballotta. Równania (11) i (12) wyczerpują wszystkie ruchy, mogące nastąpić przy warunkach strefowych, bez tarcia.

§ 5. Tarcie. Ruchy zanikające proste.

Ograniczymy się do rozpatrzenia warstwy kulistej wirującej. Przyjmując tarcie jako proporcyonalne do prędkosci o spółczyn-

Digitized by Google

niku proporcyonalności l, będziemy mieli następujące równania różniczkowe:

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} -\frac{RT}{S}\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} &= \frac{\partial b}{\partial t} - 2\nu\cos\omega\,.\,c + l\,.\,b,\\ 0 &= \frac{\partial c}{\partial t} + 2\nu\cos\omega\,.\,b + l\,.\,c,\\ \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{S}\cdot\frac{\partial(b\sin\omega)}{\sin\omega\,.\,\partial\omega} &= 0.\end{aligned}\right.$$

Po wyrugowaniu wielkości c i ε, otrzymamy równanie na b:

$$(14)\quad \frac{RT}{S^2}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}+l\right)\frac{\partial}{\partial\omega}\,\frac{\partial(b\sin\omega)}{\sin\omega\,\partial\omega} - \frac{\partial^3 b}{\partial t^3} - 2l\frac{\partial^2 b}{\partial t^2} - (l^2+4\nu^2\cos^2\omega)\frac{\partial b}{\partial t} = 0.$$

Równaniu temu można uczynić zadość dwoma odmiennemi sposobami; w jednym przypadku otrzymamy ruchy zanikające proste [1], w drugim drgania peryodyczne zanikające. Rozpatrzymy naprzód pierwszy przypadek. Szukamy rozwiązania w postaci:

$$(15)\qquad b = e^{-\gamma t}.\,\varphi(\omega),$$

uważając γ za stałą dodatnią. Dla wyznaczenia funkcyi φ i stałej γ będziemy mieli równanie:

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{d\omega}\,\frac{d(\varphi\sin\omega)}{\sin\omega\,.\,d\omega} + \varkappa' p'\varphi + \varkappa'\cos^2\omega\,.\,\varphi = 0,\\ &\left[\varkappa' = \frac{\gamma}{l-\gamma}\cdot\frac{4\nu^2 S^2}{RT} = \frac{\gamma}{l-\gamma}\varkappa,\ p' = \left(\frac{l-\gamma}{2\nu}\right)^2\right)\right].\end{aligned}\right.$$

Zaś c i ε wyrażają się przez wzory następujące:

$$(16a)\qquad c = -\frac{2\nu}{l-\gamma}\,e^{-\gamma t}\cos\omega\,.\,\varphi(\omega),\quad \varepsilon = \frac{1}{\gamma S}\,e^{-\gamma t}.\,\frac{d(\varphi\sin\omega)}{\sin\omega\,d\omega}.$$

Równanie (16) jest podobne do równania (6) z tą różnicą, że mamy

[1]) Margules nazywa je „zapełniającemi“ (ausfüllende).

Digitized by Google

$-\varkappa'$ zamiast $\varkappa$ i $-p'$ zamiast p. Rozwiążemy je też w podobny sposób, ograniczając się do rozwiązań parzystych, dla których równik jest płaszczyzną węzłową i płaszczyzną symetryi, kładąc:

$$\varphi = \sin\omega(a_1 \cos\omega + a_3 \cos^3\omega + \ldots) . \tag{17}$$

Pomiędzy spółczynnikami a_1, a_2, istnieją związki następujące:

$$2.3(a_3 - a_1) + \varkappa' p' . a_1 = 0; \quad 4.5(a_5 - a_3) + \varkappa' p' a_3 + \varkappa' a_1 = 0 \text{ i t. d.}$$

$$\frac{a_j}{a_{j-2}} = \frac{\varkappa'}{(j+1)(j+2) - \varkappa' p' - \dfrac{(j+1)(j+2)\varkappa'}{(j+3)\ (j+4) - \varkappa' p' - \ldots}}$$

Postępując jak poprzednio, znajdujemy, iż dalsze rozwiązanie zależeć będzie od znalezienia pierwiastków równania:

$$0 = 2.3 - \varkappa' p' - \frac{2.3\varkappa'}{4.5 - \varkappa' p' - \dfrac{4.5\varkappa'}{6.7 - \varkappa' p' - \ldots}} \tag{18}$$

lecz obecnie sprawa komplikuje się bardzo przez to, że nietylko $\varkappa' p'$ jest niewiadome, lecz nieznane jest także i $\varkappa'$, które, podobnie jak p', zależy od szukanej wielkości γ. Nie pozostaje nic innego, jak tylko przyjąć na $\varkappa'$ szereg dowolnych wartości liczebnych i obliczyć odpowiadające im pierwiastki $\varkappa' p$; przyjmując $\varkappa'$ za odcięte, a $\varkappa' p'$ za rzędne, wykreśliliśmy krzywą, z której znajdziemy należyte wartości dla $\varkappa'$ i $\varkappa' p'$. Autor podaje tabelkę pierwiastków, wziętych poczęści z tej krzywej. Tylko takie wartości $\varkappa'$, które są zawarte pomiędzy 0 i 12,54, prowadzą do ruchów zanikających prostych; dla innych wartości $\varkappa'$ są p' i γ ilości zespolone. Ponieważ $\varkappa'$ jest dodatnie, a zatem i $\gamma/l - \gamma > 0$ (p. równ. (16)), dalej γ z założenia dodatnie, więc i $l - \gamma > 0$. Dalej z równań (13) wynika:

$$-\frac{RT}{S} \cdot \frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} = \frac{(l-\gamma)^2 + 4\nu^2 \cos^2\omega}{l-\gamma}\, b,$$

czyli $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}$ i b mają znaki przeciwne, a więc ruch wzdłuż południka odbywa się w kierunku spadku ciśnienia.

Digitized by Google

$$\frac{c}{b} = -\frac{2\nu}{l-\gamma}\cos\omega = \operatorname{tang}\xi,$$

ξ jest kątem, który kierunek ruchu wypadkowego tworzy z południkiem. Przypuśćmy, że $b<0$ (ruch w kierunku na północ), a więc że dziedzina ciśnienia mizkiego leży na północy, wówczas dla półkuli północnej jest składowa równoleżnikowa $c>0$ (kierunek ruchu na wschód). Dochodzimy przeto do ważnego wyniku, że ruchy „zapełniające" odbywają się zgodnie z regułą Buys-Ballota.

§ 6. Tarcie: Drgania zanikające w warstwie wirującej.

Wyrażenia (15) i (16a) na b, c i ε, jak to już zaznaczyliśmy, nie są jedynemi, czyniącemi zadość równaniom (13); równania te można jeszcze rozwiązać, kładąc:

$$(19)\quad \begin{cases} b = e^{-\alpha t}\left[\cos\beta t\,.\,\varphi_1(\omega) + \sin\beta t\,.\,\varphi_2(\omega)\right], \\ c = e^{-\alpha t}\left[\cos\beta t\,.\,\psi_1(\omega) + \sin\beta t\,.\,\psi_2(\omega)\right], \\ \varepsilon = e^{-\alpha t}\left[\cos\beta t\,.\,E_1(\omega) + \sin\beta t\,.\,E_2(\omega)\right], \end{cases}$$

i szukając funkcyj φ, ψ i E oraz stałych α i β. Rozwiązanie to przedstawia drgania peryodyczne o amplitudzie zanikającej. Postępowanie takie byłoby jednak bardzo trudne. Daleko prościej jest iść tą samą drogą, co i w przypadku poprzedzającym, t. j. założyć:

$$b = e^{-\gamma t}\varphi(\omega),$$

z tą różnicą, że teraz będziemy uważali γ za ilość zespoloną. $\varkappa'$ i p' jako też spółczynniki rozwinięcia:

$$\varphi = \sin\omega\,(a_1\cos\omega + a_3\cos^3\omega + \ldots)$$

muszą być zespolone. Kładąc $\gamma = \alpha + \beta i$, mamy:

Digitized by Google

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{\gamma}{l-\gamma}\varkappa=\varkappa'=P+iQ=Ue^{ui}; \quad P=\dfrac{al-a^2-\beta^2}{(l-a)^2+\beta^2}\cdot\varkappa; \\ \qquad\qquad Q=\dfrac{l\beta}{(l-a)^2+\beta^2}\cdot\varkappa; \\ \gamma(l-\gamma)\cdot\dfrac{\varkappa}{4\nu^2}=\varkappa'p'=M-iN=Ve^{vi}; \quad M=\dfrac{al-a^2+\beta^2}{4\nu^2}\varkappa; \\ \qquad\qquad N=\dfrac{2a\beta-b\beta}{4\nu^2}\cdot\varkappa. \end{cases}$$

Rachunek wykonywa się w sposób następujący. Dla dowolnie obranego $\varkappa'$ szukamy odpowiadającego mu pierwiastka $\varkappa'p'$, czyniącego zadość równaniu (18). Następnie obliczamy ilości U, V, u, v, a przez nie $\varkappa$, l, a, β. Z równań (20) wynika:

$$\frac{\varkappa}{2\nu}(a+\beta i)=\sqrt{UV}\left(\cos\frac{u+v}{2}+i\sin\frac{u+v}{2}\right),$$

$$\frac{1}{2\nu}(l-a-\beta i)=\sqrt{\frac{V}{U}}\left(\cos\frac{u-v}{2}-i\sin\frac{u-v}{2}\right),$$

dalej:

$$(21)\quad \begin{cases} \varkappa=U\dfrac{\sin\frac{u+v}{2}}{\sin\frac{u-v}{2}}, \quad \dfrac{1}{2\nu}a=\sqrt{\dfrac{V}{U}}\sin\dfrac{u-v}{2}\cot\dfrac{u+v}{2}, \\ \dfrac{1}{2\nu}l=\sqrt{\dfrac{V}{U}}\cdot\dfrac{\sin u}{\sin\frac{u+v}{2}}, \quad \dfrac{1}{2\nu}\beta=\sqrt{\dfrac{V}{U}}\sin\dfrac{u-v}{2}. \end{cases}$$

W ten sposób otrzymujemy rozwiązanie, ale takie, które prowadzi do dwu wartości specyalnych $\varkappa$ i l (a więc i do specyalnej wartości na temperaturę, która wchodzi w wyrażenie na $\varkappa$), podczas gdy wartości te powinny być zgóry założone. Otóż, trzeba wykonać rachunek dla większej liczby dowolnie obranych $\varkappa'$, ażeby przez interpolacyę znaleść takie $\varkappa'$, któreby prowadziły do założonego $\varkappa$ i do dodatnich l.

Ilorazy następujących po sobie spółczynników a_j rozwinięcia (17) znajdziemy, jak poprzednio, za pomocą ułamków łańcucho-

Digitized by Google

wych. Pierwszy spółczynnik a_1 pozostaje nieoznaczonym. Ponieważ należy uważać go za zespolony, więc będziemy mieli w całce szczególnej dwie stałe dowolne, kładziemy:

$$a_j = A_j + iB_j .$$

Równania do wyznaczenia spółczynników a_j rozpadają się na dwie grupy, odpowiadające części rzeczywistej i urojonej:

$$\begin{aligned}
&2 . 3 (A_3 - A_1) + MA_1 + NB_1 = 0, \\
&4 . 5 (A_5 - A_3) + MA_3 + NB_3 + PA_1 - QB_1 = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&2 . 3 (B_3 - B_1) + MB_1 - NA_1 = 0, \\
&4 . 5 (B_5 - B_3) + MB_3 - NA_3 + PB_1 + QA_1 = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Jeżeli napiszemy jeszcze dla skrócenia:

$$A = \sin\omega \Sigma A_j \cos^j\omega , \quad B = \sin\omega \Sigma B_j \cos^j\omega ,$$

$$A' = \frac{d(A \sin\omega)}{\sin\omega \, d\omega} , \qquad B' = \frac{d(B \sin\omega)}{\sin\omega \, d\omega} ,$$

to otrzymamy rozwiązanie szczególne układu (13) w postaci następującej:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned}
b &= e^{-at} [\cos\beta t . A + \sin\beta t . B + i (\cos\beta t . B - \sin\beta t . A)], \\
c &= -\frac{2\nu \cos\omega . e^{-at}}{(l-a)^2 + \beta^2} \left[\begin{matrix} \cos\beta t \{ (l-a) A - \beta B \} \\ + \sin\beta t \{ \beta A + (l-a) B \} \end{matrix} \right. \\
&\qquad\qquad \left. + i \left(\begin{matrix} \cos\beta t \{ \beta A + (l-a) B \} \\ - \sin\beta t \{ (l-a) A - \beta B \} \end{matrix} \right) \right], \\
\varepsilon &= \frac{e^{-at}}{S(a^2+\beta^2)} \left[\begin{matrix} \cos\beta t \{ aA' + \beta B' \} \\ + \sin\beta t \{ -\beta A + aB' \} \end{matrix} \right. \\
&\qquad\qquad \left. + i \left(\begin{matrix} \cos\beta t \{ -\beta A' + aB' \} \\ - \sin\beta t \{ aA' + \beta B' \} \end{matrix} \right) \right].
\end{aligned} \right.$$

Części rzeczywiste wzorów na b, c i ε przedstawiają same przez się rozwiązanie równań (13), podobnież spółczynniki przy i.

Digitized by Google

To drugie rozwiązanie nie daje jednak nic nowego i otrzymuje się z pierwszego, podstawiając $\beta t + \frac{\pi}{2}$ zamiast βt; A i B są identyczne z φ_1 odpowiednio φ_2 wzoru (19).

Margules podaje dwa przykłady liczebne, odpowiadające dwóm różnym spółczynnikom tarcia ($\varkappa = 10{,}94$, $T = 273^0$). Ciekawe jest porównanie wyników tych obliczeń z obliczeniami analogicznemi dla przypadku bez tarcia i dla ruchów zanikających prostych. W przypadku bez tarcia maximum b następuje na wszystkich szerokościach jednocześnie, przyczem c i ε stają się wszędzie równe 0; po upływie ćwierci okresu b staje się równe 0, a c i ε osiągają maximum. Otóż, wskutek tarcia, maximum b następuje na różnych szerokościach w różnych czasach: na biegunie później, niż na równiku, przyczem $c \neq 0$; długość okresu wahania przez tarcie powiększa się i to tem więcej, im większe jest tarcie. W przypadku drugim porównania ruchów zanikających wahadłowych z prostemi wynika, że pierwsze zanikają bez porównania szybciej niż drugie.

Ruchy wahadłowe wogóle nie zgadzają się z regułą Buys-Ballota. Otrzymane wyniki dają możność wytłómaczyć, dla czego w przyrodzie nie dostrzega się ruchów przeciwnych wspomnianej regule: przyczyna tego faktu tkwi w tem, że ruchy wahadłowe, powstające w atmosferze, zanikają wskutek tarcia bardzo prędko i są zamaskowane przez trwalsze ruchy proste, które odbywają się zgodnie z regułą Buys-Ballota.

Całki (22) i (15) są rozwiązaniami szczególnemi równań (13). Całki ogólne otrzymamy, biorąc sumy nieskończone całek szczególnych.

(Dokończenie nastąpi.)

Digitized by Google

Digitized by Google

WŁ. GORCZYŃSKI.

Wiadomość o organizacyi służby meteorologicznej włoskiej.

Właściwy początek nowoczesnej organizacyi służby meteorologicznej we Włoszech datuje się od r. 1879, w którem też rozpoczęte zostało wydawnictwo „Annali dell' Ufficio Centrale di Meteorologia Italiana“ (Roma, 1880), zawierające spostrzeżenia za rok 1879. Przedtem bowiem obserwacye meteorologiczne włoskie były rozproszone już to w wydawnictwach różnych akademij prowincyonalnych, już to w buletynach centralnych pod zmienną nazwą, jako to:

a) Meteorologia Italiana, 1865 — 1875. Bollettino decadico, 1873—1874 i 1875—1877.

b) M. J. Bollettino mensile 1875—1878.

c) Meteorologia Italiana; suplemento, 1875—1878.

Dane te były ogłaszane w publikacyach statystycznych, już to w „Ministero della pubblica istruzione,“ już to w „Ministero della marina e dei lavori pubblici“ lub wreszcie w „Bolletino di notizie agrarie“. Ulegało także zmianie miejsce publikacyi, które początkowo było w Florencyi, a dopiero następnie zostało przeniesione do Rzymu.

Organizacya prognoz meteorologicznych we Włoszech funkcyonowała już od r. 1865 w obserwatoryum we Florencyi pod kierunkiem fizyka prof. Matteucci i była subwencyonowana przez ministeryum marynarki. Następnie kierownictwo tego biura synoptycznego przeszło na dyrektora obserwatoryum we Florencyi Donati'ego, a od r. 1873 na Costantino Pettei.

Pierwszy impuls do ujednostajnienia służby meteorologicznej włoskiej dany był na kongresie „Congresso degli scienziati italiani“

Digitized by Google

odbytym w Palermo w sierpniu 1875, w którym na zaproszenie rządu wybrana została komisya specyalna do spraw meteorologicznych. Do komisyi tej weszli: Schiaparelli, Secchi, Palmieri, Respighi, Volpicelli, Cacciatore, Tacchini, Dorna, Fergola, Garibaldi oraz delegaci ministeryalni. Komisya ta postawiła sobie następujące zadania:

a) Należy zjednoczyć i zorganizować spostrzeżenia według wspólnego planu, stosując się do postanowień kongresów meteorologicznych międzynarodowych, a w szczególności przyjąć normy stacyj II i III rzędu według kongresu wiedeńskiego.

b) Ujednostajnienie powinno przedewszystkiem polegać na przyjęciu wspólnych godzin obserwacyjnych i wspólnego planu spostrzeżeń; zajęcie się przedewszystkiem organizacyą tych stacyj, które wskutek swego położenia są najbardziej ważne dla celów Meteorologii lokalnej i ogólnej.

c) Wobec zupełnej konieczności posiadania wszędzie wypróbowanych narzędzi według wspólnego typu, wszelkie przyrządy, służące do pomiarów, winny być otrzymywane z Biura Centralnego.

d) Wobec bardzo złożonych zadań organizacyi i prowadzenia służby meteorologicznej sieci krajowej, przy Biurze Centralnem ustanawia się „Consiglio Direttivo", złożone z meteorologów; „Consiglio" to mające charakter naukowy, powinno decydować wyłącznie co do organizacyi spostrzeżeń („dovrebbe ritenersi come l'unico potere dirigente in fatto di Meteorologia").

Wreszcie dyrektor „R. Ufficio Centrale di Meteorologia" zostaje wybierany za wspólną zgodą „Consiglio Direttivo" i delegatów wszystkich zainteresowanych ministeryów, które też układają bilans Biura i renumeracye stacyj i wprowadzają sumy odnośne do budżetu państwowego, przedstawianego na zatwierdzenie parlamentu.

W roku następnym 1876 prof. Cantoni, delegat do komitetu międzynarodowego meteorologicznego, przedstawił referat ministeryum rolnictwa i handlu, które też powierzyło jemu organizacyę i charakter naczelny w „Direzione della Meteorologia Italiana".

Rada „Consiglio Direttivo" zebrała się poraz pierwszy w Rzymie w marcu 1877 roku pod przewodnictwem P. Secchi, zajęła się wyborem przyrządów normalnych; na sesyi drugiej w lipcu tegoż roku omówiono normy dla umieszczania przyrządów na stacyach oraz ich inspekcyi, na którą zwrócono szczególną uwagę. Na

Digitized by Google

następnych sesyach, którym wskutek śmierci Secchi'ego przewodniczył Blaserna, opracowano plan ostateczny działalności i kierownictwa sieci meteorologicznej włoskiej. Samo zaś „R. Ufficio Centrale di Meteorologia" było ostatecznie zatwierdzone dekretem z dnia 26 listopada 1876 r. i otrzymało siedzibę w „Collegio Romano", będąc pod zawiadywaniem administracyjnem ministeryum rolnictwa przemysłu i handlu.

W organizacyi sieci meteorologicznej włoskiej należy zauważyć, że, uznając potrzebę zjednoczenia i ujednostajnienia spostrzeżeń, starano się jednocześnie ograniczyć tę centralizacyę przez tworzenie sieci prowincyonalnych. Tak już na sesyi z grudnia 1878 r. na wniosek Tacchini'ego uznano za pożyteczny następujący plan stacyj:

1) Sieć zasadnicza stacyj meteorologicznych włoskich składa się z 59 punktów w centrach odnośnych prowincyj lub w ich pobliżu.

2) Prócz punków obserwacyjnych sieci zasadniczej wybierają się w miarę potrzeby i inne punkty, a to w zależności od warunków miejscowych oraz odpowiadającego terytoryum.

3) Z stacyj powyższych wybiera się 27, których obserwacye mają służyć bezpośrednio do celów międzynarodowej organizacyi Meteorologii synoptycznej.

4) W każdej prowincyi tworzą się sieci drugorzędne z grupami stacyj termometrycznych i pluwiometrycznych; tworzenie tych stacyj, do celów Meteorologii rolniczej i leśnej, zależy od środków, otrzymywanych od administracyj lokalnych na ich opracowywanie i prowadzenie.

Po tych krótkich wiadomościach z epoki organizacyjnej sieci włoskiej, przejdziemy do teraźniejszego jej stanu pod kierunkiem Biura centralnego w Rzymie „R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica".

Dodamy tylko, że do r. 1899 Biuro Centralne meteorologiczne pozostawało pod dyrekcyą Tacchini'ego, który też jednocześnie był dyrektorem Obserwatoryum astronomicznego i tym sposobem te dwie instytucye, mieszczące się w „Collegio Romano", były zjednoczone pod wspólnem kierownictwem. Po śmierci Tacchini'ego, Obserwatoryum astronomiczne i Biuro meteorologiczne zostały od siebie zupełnie oddzielone i posiadają dyrekcyę niezależną; dyrektorem obserwatoryum jest obecnie E. Millosevich, a dyrektorem „R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica" jest L. Palazzo.

Digitized by Google

Prócz wyżej wspomnianego dyrektora w Biurze pracuje 5 asystentów naukowych, kierujących oddzielnemi sekcyami i posiadających do pomocy 10 urzędników; przy Biurze znajduje się biblioteka i oddzielny sekretarz administracyjny dla całego Biura.

Podamy w krótkości kilka danych ważniejszych o sekcyach poszczególnych, które są następujące:

1) Servizio dei Presagi (buletyny synoptyczne codzienne).

2) Servizio Meteorico Agrario (buletyny meteorologiczno-rolnicze za dekady).

3) Servizio Fisico (sekcya narzędzi).

4) Servizio climatologico (wydawnictwo spostrzeżeń rocznych).

5) Servizio aeronautico (badanie wyższych warstw atmosfery).

6) Servizio geodinamico (spostrzeżenia seismograficzne i wogóle z Geodynamiki).

7) Biblioteca (katalog książek i pism).

8) Archiwum (spostrzeżenia dawne oraz skład narządzi) i sekretaryat (sprawy administracyjne i wysyłka publikacyj).

Co do organizacyi sekcyj poszczególnych Biura rzymskiego, ograniczamy się do następujących kilku danych, przytoczonych dla każdej sekcyi osobno.

Sekcya meteorologii synoptycznej.

Sekcya ta, pozostająca obecnie pod zawiadywaniem Burgatti'ego, wydaje codziennie buletyn synoptyczny; wydawnictwo to datuje się od początku zreorganizowania Biura w r. 1879 i liczy już 27 tomów.

Kierownik sekcyi posiada do pomocy 1 urzędnika i 2 telegrafistów, których aparaty są bezpośrednio połączone z telegrafem centralnym w Rzymie. Buletyn układa się na zasadzie depesz sieci międzynarodowej (z górą 50 stacyj), nadsyłanych raz dziennie według spostrzeżeń rannych w depeszach, przeważnie kumulacyjnych z kilku centrów w Europie. Stacye włoskie, w liczbie koło 70, nadsyłają dane dwa razy dziennie; pierwsza depesza jest spółczesna z międzynarodowemi, druga zaś układana jest według spostrzeżeń południowych i służy do oryentacyi co do zmian stanu atmosfery w dniu danym.

Buletyn codzienny synoptyczny zawiera 3 mapy, a mianowicie:

Digitized by Google

1) Carta delle isoterme al mare alle 7^h ant. (stato del mare, pioggia, temporali, vento nelle 24^h prec.). Mapa ta obejmuje całą Francyę, Szwajcaryę, Włochy, Grecyę, Bośnię i Hercegowinę, Serbię, Austro-Węgry oraz część terytoryum Niemiec, Polski, Hiszpanii i Algeryi oraz Tunisu. Izotermy kreślone są w odstępach dwustopniowych.

2) Carta delle isobare, vento, stato del cielo e mare alle ore 7. Mapa ta o rozmiarze i skali zupełnie analogicznej podaje izobary co 1 mm.

3) Mapka p. t. „Isobare d'Europa al mattino" podaje przebieg ciśnienia dla całego terytoryum europejskiego (w odstępach co 5 mm.) i ma rozmiary daleko mniejsze, niż dwie poprzednie.

Miejsca wolne na 4 stronach buletynu codziennego wypełniane są, jak zazwyczaj, danemi spostrzeżeń meteorologicznych stacyj włoskich i zagranicznych, użytkowanych dla celów buletynów synoptycznych. Samo prawdopodobieństwo (probabilità) pogody podane jest na stronie czwartej ogólnie dla całych Włoch i poprzedzone jest treściwym opisem stanu pogody w ciągu ostatnich 24-ch godzin oraz rana dnia danego.

Buletyn wydawany jest koło godz. 3 popołudniu dla wszystkich bez wyjątku dni w roku i rozsyłany pocztą; depesza zaś synoptyczna przesyłana jest bezpośrednio po ułożeniu buletynu do bardzo wielu punktów we Włoszech, gdzie jest wystawiana na użytek publiczny przy urzędach pocztowych, zarządach administracyjnych lokalnych itp.

Wrazie, gdy kształt izobar, gradient i kierunek depresyj każą przewidywać możliwość burz i silnych wiatrów na morzu, posyłane są ostrzeżenia do portów włoskich, które też bezzwłocznie wystawiają odpowiednie sygnały, znamionujące niebezpieczeństwo.

Wreszcie buletyn podaje także wiadomości o dostrzeżonych w dniu ostatnim trzęsieniach ziemi w różnych okolicach kraju.

Dla użytku obserwatorów, nadsyłających depesze synoptyczne, wydana została staraniem sekcyi broszura „Formulario dei dispaci meteorici" (Roma, 1883), zawierająca liczne przykłady i tabele.

Sekcya meteorologii rolniczej.

Sekcya ta pod tytułem: „Servizio Meteorico Agrario e dei temporali" pozostaje pod zawiadywaniem D. Pacini'ego, który do pomocy

Digitized by Google

posiada 1 urzędnika. Sekcya ta wydaje od r. 1886 publikacyę p. t. „Rivista meteorico-agraria“, która ukazuje się w zeszytach 3 razy na miesiąc (za dekady) i obejmuje już 20 tomów (in 8-o).

Wydawnictwo to publikuje się na żądanie ministeryum rolnictwa przemysłu i handlu i wychodzi też jako odbitka z „Bollettino ufficiale“ tegoż ministeryum, zawierająca między innemi dane rolnicze z różnych prowincyj Włoszech.

Jako materyał do układania tego przeglądu służą karty pocztowe, nadsyłane przez obserwatorów co dekadę i zawierające: temperaturę najwyższą i najniższą za dekadę, średnią temperaturę i zachmurzenie oraz opady (sumę i liczby dni z deszczem i śniegiem). Po tych danych liczbowych wypełniają się rubryki: „Note meteoriche“, oraz „Notizie delle campagne durante la decade“.

Układana na zasadzie tych danych „Rivista meteorico-agraria“ obejmuje:

a) Krótki przegląd meteorologiczny za dekadę.

b) Krótki przegląd rolniczy dla 11 rejonów (Liguria, Piemonte, Lombardia, Veneto, Emilia, Marche ed Umbria, Toscana e Lazio, Regione meridionale adriatica, Regione meridionale mediterranea, Sicilia, Sardegna) oraz treściwe zestawienie ogólne (repilogo).

c) Mapkę z izotermami (co 2°) za dekadę oraz sumami opadów w odstępach co 25mm.

d) Korespondencye rolniczo-meteorologiczne z danemi liczbowemi ze spostrzeżeń, zgrupowane dla poszczególnych rejonów z uwzględnieniem osobno każdej stacyi.

„Rivista“ ta ukazuje się najpóźniej piątego dnia po ukończeniu dekady i obejmuje półtora arkusza druku (in 8°).

Sekcya zajmuje się także burzami; wiadomości o tych ostatnich nadsyłają obserwatorzy na specyalnych kartach, które oczywiście wszystkie są wolne od opłaty pocztowej. Sposoby notowania podane są w broszurce „Istruzioni generali per l'osservazione dei temporali“.

Sekcya narzędzi.

Sekcya ta pod tytułem „Servizio Fisico“ pozostaje pod zawiadywaniem pierwszego asystenta E. Oddone, który też zastępuje dyrek-

Digitized by Google

tora wrazie jego nieobecności. Pierwszem zadaniem tego wydziału jest sprawdzanie narzędzi przed dostarczaniem ich stacyom prowincyonalnym, a głównie barometrów rtęciowych i termometrów (zwyczajnych oraz maximum i minimum). Do zadań wydziału należy także prowadzenie i innych badań z fizyki atmosfery ziemskiej.

Sekcya ta, reprezentowana tylko przez E. Oddone, funkcyonuje w skromnych rozmiarach.

Inspekcye stacyj prowincyonalnych, w celu sprawdzania stanu narzędzi na miejscu, nie są stale prowadzone dla braku odpowiednich środków.

Sekcya klimatologiczna.

Dział klimatologii zostaje pod zawiadywaniem asystenta F. Eredia, mającego do pomocy 4 urzędników do obliczania i przygotowywania spostrzeżeń do druku.

Sieć meteorologiczna włoska składa się, według ostatniego „Elenco degli Osservatorii meteorologici italiani corrispondenti coll' Ufficio Meteorologico Centrale“ z następujących stacyj:

a) 164 „Osservatorii“, odpowiadających stacyom rzędu II-go według najczęściej przyjmowanej klasyfikacyi. Z liczby tych stacyj 4, a mianowicie w Adi Ugri, Asmara, Massana i Tripoli (Barberia) znajdują się w koloniach włoskich; szerokość geograficzna pierwszych trzech punktów wynosi około 15°, a ostatniego 32°, 9.

Niektóre z tych „Osservatorii“, prócz zwykłych spostrzeżeń 3 razy dziennie barometru, termometrów i wilgotności, wiatru, zachmurzenia i opadów, robią także i inne nadetatowe obserwacye. Dla stacyj tych nie wydana została osobna instrukcya; natomiast dla ich użytku Biuro Centralne wydało dogodne „Tavole ad uso degli Osservatorii meteorologici italiani“ (Roma, 1895).

c) W 21 „Scuole pratiche di Agricoltura“, w 13 „Capitanerie di Porto“ i na 60 semaforach portowych prowadzone są spostrzeżenia w różnym zakresie. Co się tyczy stacyj, prowadzących spostrzeżenia na wybrzeżach lub na morzu (obserwacye na okrętach), to staraniem Instytutu hydrograficznego w Genui i w porozumieniu z Biurem meteorologicznem w Rzymie wydane zostały „Norme per le osservazioni meteorologiche nei semafori e sulle R. navi“ (Genova, 1900).

Digitized by Google

c) Istnieje przeszło 500 „stazioni termo-udometriche“, odpowiadających stacyom rzędu III według najbardziej rozpowszechnionej klasyfikacyi. W tych punktach raz dziennie (o 9*a*) notowane są opady oraz maximum i minimum temperatury; prowadzone są także obserwacye nad burzami.

Do użytku obserwatorów stacyj rzędu III-go służą wydane w roku 1895 „Norme per le osservazioni termo-udometriche e dei temporali“.

Należy nadmienić, że według pierwotnego planu, o którym wspominaliśmy wyżej, istnieją także sieci prowincyonalne stacyj rolnych, pluwiometrycznych i burzowych, nadsyłających swe dane do głównego „Osservatorio“ w danej prowincyi. W publikacyach Biura centralnego niema jednak wzmianki o funkcyonowaniu tych sieci drugorzędnych, a w każdym razie przeważna część tych stacyj nadsyła swe obserwacye i bezpośrednio do Rzymu.

Brak jest także dokładniejszych wskazówek co do narzędzi i ich poprawek dla wszystkich tych stacyj meteorologicznych, których spostrzeżenia są drukowane w publikacyach rocznych Biura rzymskiego.

Organem głównem Sekcyi klimatologicznej oraz wogóle biura centralnego jest publikacya, wydawana od r. 1879 p. t. „Annali dell' Ufficio centrale meteorologico e geodinamico italiano“. Roczniki te składają się z trzech części, a mianowicie:

I. Memorie.
II. Osservazioni meteorologiche.
III. Osservazioni termo-udometriche

W części I zawierają się obszerniejsze prace z dziedziny Meteorologii i Klimatologii oraz opracowania różnych obserwacyj nadetatowych (burzowych, słonecznych i t. p.), a także kilkanaście prac z magnetyzmu ziemskiego. Ogłaszali w niej prace: P. Tacchini, C. Chistoni, C. Ferrari, D. Ragona, G. Schiaparelli, E. Pini, A. Battelli, G. Agamennone, L. Palazzo, E. Oddone i innych.

W części II-ej „Annali“ publikowane są spostrzeżenia stacyj rzędu II-go w wyciągach za dekady, w zestawieniach miesięcznych i rocznych. W ostatnich rocznikach spostrzeżenia in extenso nie są zupełnie drukowane.

Digitized by Google

Zestawienia miesięczne podawane są wogóle według schematu międzynarodowego; średnie tworzone są z trzech spostrzeżeń dziennych (o 9^h_a, 3^h_p i 9^h_p) sposobem średnich arytmetycznych, z wyjątkiem temperatury, dla której średnia obliczana jest według wzoru:

$$\frac{1}{4}\,(9^h_a + 9^h_p + \text{max.} + \text{min}).$$

Co do sum opadów należy zauważyć, że obserwatorowie dla przypadku śniegu ograniczają się przeważnie podawaniem tylko jego wysokości, a nie odpowiadającej ilości wody po stopieniu. Prócz spostrzeżeń według stałego schematu podawane są także obserwacye nadetatowe nad ewaporyzacyą, kierunkiem obłoków i t. p.

Część III poświęcona jest stacyom rzędu III-go i podaje „Riassunti delle osservazioni termo-udometriche". Wyniki te zawierają oddzielnie dla 3 dekad i miesiąca, temperaturę średnią z minimów, z maximów, dalej sumy opadów, opady najwyższe i liczby dni z opadami. Podawane są także liczby dni: „sereni, misti i nuvolosi"; nie jest jednak jasne, jak są otrzymywane te ostatnie dane liczbowe według notowań obserwatorów.

Wogóle daje się uczuwać brak w „Annalach" wyczerpujących objaśnień co do stanu narzędzi, ich sprawdzań, opracowań i materyałów, oraz wiarogodności i charakteru danych; nadmienimy także, że w r. 1904 ukazał się tom XX za rok 1898. Ten tom zawiera tylko część I-szą, innych zaś części, wydawanych często osobno, brak dotychczas. Komplety tomów z wszystkiemi działami obejmują obecnie okres 1879—1892. Spostrzeżenia z lat następnych do obecnego po większej części znajdują się jeszcze w opracowaniu.

Wreszcie wspomnimy, że zestawienia kilkoletnie i dane co do klimatu Włoszech podawane są co pewien czas w „Annuario Statistico Italiano". Dane liczbowe są poprzedzane wstępem rozumowanym.

Prócz stacyj różnego typu, omówionych poprzednio, do "Ufficio Centrale" w Rzymie należy także kilka stacyj górskich, jako to: w Monte Rosa, Cimone, Etna, Monte (Avellino) i Tiriolo (Catansaro). Najważniejszym punktem obserwacyjnym górskim jest bezwątpienia „Capanna Osservatorio sul Monte Rosa" na wysokości 4559 metrów nad

Digitized by Google

powierzchnią morza. Obserwatoryum to, pozostające pod kierownictwem C. Alessandri, ma zająć się stałem badaniem różnych czynników meteorologicznych w warstwie górnej atmosfery, odpowiadającej poziomowi tego punktu.

Sekcya aeronautyczna.

Sekcya ta, poświęcona badaniom wyższych warstw atmosferycznych, pozostaje pod kierunkiem bezpośredniem dyrektora L. Palazzo przy udziale jednego z asystentów sekcyjnych. Balony sondy i balony z obserwatorami są puszczane w różnych odstępach czasu w parku areonautycznym, należącym do wydziału aeronautycznego w ministeryum wojny. W wyborze dni są przedewszystkiem uwzględniane terminy wzniesień międzynarodowych.

Od roku 1904, z siedzibą w Rzymie, istnieje „Società Aeronautica Italiana", która wydaje Bolletino della S. A. I. w zeszytach miesięcznych. Staraniem tegoż stowarzyszenia wydane zostało „Regolamento della Società" oraz „Istruzioni per le ascensioni libere", zawierające ważne i pożyteczne wskazówki co do organizacyi wzniesień i korzystania z otrzymanych materyałów,

Sekcya geodynamiczna.

Sekcya ta, pozostająca pod zawiadywaniem V. Monti'ego, zbiera dane geodynamiczne we Włoszech, ograniczając się jednak prawie wyłącznie do zjawisk seismicznych, mających szczególną ważność dla terenu sieci włoskiej.

Dane te są publikowane w rocznie wydawanych „Bollettino della Società Sismologica Italiana", którego tom pierwszy wydany został w r. 1895 pod redakcyą prof. P. Tacchini'ego; publikacya ta oprócz „Notizie sui terromoti osservati in Italia" zawiera także oryginalne prace z seismologii badaczów włoskich oraz zamiejscowych. Tak w tomie VI-m „Bolletino della S. S. I." (r. 1900) znajduje się artykuł „Sur la nature des vibrations sismiques" przez prof. M. P. Rudzkiego, figurującego także na liście członków towarzystwa seismologicznego włoskiego.

Digitized by Google

Materyały co do trzęsień ziemi zbierane są we Włoszech przez 4 obserwatorya geodynamiczne 1-ej klasy, posiadające przyrządy registracyjne, a mianowicie w Rocca di Papa (koło Rzymu), w Pavia, w Catania (w Sycylii) oraz w Casamicciola (wyspa Ischia); nadto znajduje się koło 100 małych obserwatoryów (kl. 2) i wreszcie koło 500 punktów, dostarczających wiadomości seismiczne.

Prócz powyższych funkcyonuje także kilka obserwatoryów prywatnych, utrzymywanych kosztem założycieli, a nie kosztem rządu włoskiego, jak obserwatorya klasy 1 i 2.

Jako główne obserwatoryum geodynamiczne uważane jest Rocca di Papa w okolicach Rzymu, niedaleko Frascati. Dyrektorem tego obserwatoryum jest Dr G. Agamemnone, który do pomocy posiada asystenta, zamieszkującego na miejscu.

Wreszcie wspomnimy, że Sekcya geodynamiczna wydała w roku 1899 dla użytku korespondentów seismicznych broszurę p. t. „Norme per le osservazioni geodinamiche“.

Biblioteka. Archiwum. Sekretaryat.

Biblioteka znajduje się pod zawiadywaniem sekcyi klimatologicznej (asystent Dr. Eredia) i zawiera w osobnej sali bogaty zbiór (przeszło 10000 tomów) głównych publikacyj i czasopism meteorologicznych w różnych językach. Odnalezienie materyału nader ułatwia dokładny katalog kartkowy, ułożony według liter początkowych i zawierający oznaczenie numera szaf, półek oraz miejsca porządkowego.

W Archiwum, podległem również Sekcyi klimatologicznej, przechowują się oryginały dawnych i bieżąco nadsyłanych spostrzeżeń, rozsegregowane według prowincyj.

Wreszcie przy „R. Ufficio Centrale di Meteorologia e di Geodinamica“ znajduje się sekretaryat ogólny, którym zajmuje się specyalny urzędnik. W sekretaryacie tym koncentruje się wysyłka korespondencyj (w kraju bez opłaty pocztowej), wysyłka publikacyj zamiennych oraz załatwianie wszelkich spraw administracyjnych i rachunkowych.

Digitized by Google

Interesującem jest następujące zestawienie sum, które parlament włoski asygnuje na utrzymanie obserwatoryów meteorologicznych i personelu Biura centralnego w Rzymie.

Biuro centralne w Rzymie znajduje się pod kierunkiem naukowym dyrektora i 5 asystentów z wykształceniem uniwersyteckiem. Renumeracya roczna tego „personale scientifico“ wynosi koło 25000 lirów.

Personel administracyjny składa się z sekretarza, 8 rachmistrzów (compilatori), 3 niższych urzędników i 3 woźnych. Renumeracya roczna na utrzymanie tego personelu wynosi 17000 lirów.

Na wydawnictwa map synoptycznych codziennych, przeglądów pogody i roczników spostrzeżeń budżet przewiduje koło 36000 lirów rocznie.

Na bibliotekę (zakupno książek, prenumeratę pism i oprawę) 10000 lirów, subsydyum dla sekcyi aeronautycznej 5000 lirów, na zakupno narzędzi dla obserwatoryów i stacyj prowincyonalnych oraz koszta instalacyi i inspekcyi koło 30000 lirów. Subsydya i inne wydatki 7000 lirów.

Ogółem na utrzymanie Biura centralnego w Rzymie i zakup narzędzi parlament uchwala do 130000 lirów rocznie.

Niezależnie od tej sumy, asygnowany jest corocznie fundusz, wynoszący około 50000 lirów, na utrzymanie obserwatoryów meteorologiczno-geodynamicznych w kilku miejscach Włoszech. Personel tych obserwatoryów, zależnych bezpośrednio od Biura Centralnego, składa się albo z dyrektora, asystenta i kustosza, albo tylko z asystenta i kustosza. Do tych obserwatoryów, utrzymywanych całkowicie z budżetu sieci meteorologicznej włoskiej, należą: Rocca di Papa, Pavia, Monte Rosa, Catania i Cassamicciola. Nadmienimy, że, prócz powyższych, istnieje dość znaczna liczba obserwatoryów uniwersyteckich, utrzymywanych z funduszów zakładów naukowych, dalej obserwatorya, subsydyowane przez administracye lokalne, wreszcie obserwatorya i stacye, działające staraniem i z funduszów osób i instytucyj prywatnych.

Kończąc te krótkie szkicowe wiadomości o stanie Meteorologii włoskiej, nie możemy nie wspomnieć, że prócz urzędowego Biura centralnego w Rzymie i całej sieci rządowych i prywatnych obserwatoryów i stacyj różnego typu, istnieje także „Società Meteorologica Italiana“ z siedzibą główną w Turynie. Stowarzyszenie to, zorganizo-

Digitized by Google

wane w sposób podobny, jak poprzednie wymienione towarzystwa seismologiczne i aeronautyczne, wydaje dwumiesięcznik „Bollettino bimensuale“, zawierający krótkie artykuły, kronikę, recenzyę i obserwacye z dziedziny nauk meteorologicznych i które obecnie obejmuje już 24 tomy skończone.

Winniśmy wreszcie z podziękowaniem i wdzięcznością zaznaczyć tę wysoką uprzejmość, z jaką dyrektor Biura centralnego w Rzymie prof. L. Palazzo udzielił nam wszystkich materyałów, znajdujących się w zasobnej bibliotece meteorologicznej w „Collegio Romano“; dalej asystentowi Dr. P. Eredia, który nie szczędził wszelkich potrzebnych wyjaśnień co do działalności poszczególnych sekcyj, oraz Dr. Agamemnone, dyrektorowi Obserwatoryum geodynamicznego w Rocca di Papa, koło Rzymu, który był łaskaw pod swem osobistem przewodnictwem zorganizować specyalną wycieczkę dla poznania na miejscu tego ważnego punktu spostrzeżeń seismograficznych.

Z niemniejszą wdzięcznością wspominamy uprzejme pozwolenie sędziwego prezydenta Akademii dei Lincei senatora prof. Blaserna na zapoznanie się z Instytutem Fizycznym w Rzymie i korzystanie z jego biblioteki, a także profesorom: G. Rizzo z Messyny i E. Stracciati z Rzymu za nadesłanie swych prac z dziedziny promieniowania.

Również uprzejmości dyrektora obserwatoryum geofizycznego w Modenie C. Chistoni'ego, oraz dyrektora w Pawii A. Gamba zawdzięczamy możność zwiedzenia i zapoznania się na miejscu z urządzeniem i działalnością tych dwóch prowincyonalnych obserwatoryów.

Rzym, w kwietniu, 1906 roku

Digitized by Google

Digitized by Google

PRZEGLĄD LITERATURY. BIBLIOGRAFIA.

F. Kucharzewski. Nowsze poglądy na zasady Mechaniki. Freycinet, Poincaré, Wickersheimer. Badoureau, Mechanika połączeń Andrade'a. Odbitka z „Przeglądu Technicznego", 1906, 8-o, str. 52.

Zasady Mechaniki — to przedmiot wielkiej wagi ze względu na doniosłe znaczenie tej nauki, teoretyczne i praktyczne. Krytyczny rozbiór tych zasad wiąże się najściślej z wielkiem zagadnieniem o podstawach wiedzy ścisłej i stanowi od pewnego czasu dziedzinę głębokich dociekań pierwszorzędnych myślicieli: Macha, Henryka Hertza, Boltzmanna, Poincarégo, Duhema i wielu innych. W niedawno ogłoszonej w przekładzie przez Redakcyę „Wiadomości matematycznych" książce Duhema p. t. „Ewolucya Mechaniki", zostały przedstawione w znakomity sposób i oświetlone w sposób oryginalny zasadnicze fazy rozwoju tej nauki, jej zadania, cele i środki. Dla czytelników polskich tego dzieła Duhema praca p. Kucharzewskiego stanowić może pożądane uzupełnienie, W wykładzie jasnym streszcza autor kolejno poglądy wymienionych w nagłówku myślicieli, z których niektórzy, jak Wickersheimer, idący jeszcze dalej od innych w usuwaniu z zasad Mechaniki wszelkich śladów metafizyki i antropomorfizmu; Badoureau, uważający naukę o ruchu za nauką doświadczalną; Andrade, wprowadzajacy do pojęć podstawowych Mechaniki pojęcia połączeń, wzięte z Mechaniki fizykalnej, mniej są u nas znani. *S. D.*

Digitized by Google

Dr. G. H. Niewenglowski. Les Mathématiques et la Medicine. Paris. H. Desforges, 1906, 8-o, str. 70.

W broszurze tej autor stawia następujące pytania: w jaki sposób należy podjąć zastosowanie Matematyki do Fizyologii i Patologii; jakie zjawiska fizyologiczne lub patologiczne można traktować przy pomocy rachunku; na jakich częściach Matematyki, Mechaniki i Fizyki można się oprzeć. Dawszy ogólny zarys pojęcia funkcyi wielu zmiennych, wykazuje trudności zastosowania Analizy do zjawisk biologicznych z powodu niemożności ścisłego wyznaczania postaci i istoty funkcyj, określających zjawiska; ale trudności te zmniejsza, zdaniem autora, okoliczność, że posługiwać się wolno i należy funkcyami przybliżonemi, prostszemi do funkcyj nieznanych. Stosowanie Mechaniki do Fizyologii uważa autor za zupełnie uzasadnione na tej zasadzie, że w świecie organicznym przyjąć należy działanie tych samych czynników fizyko-chemicznych, którym podlegają zjawiska w świecie nieorganicznym. Badanie matematyczne równowag chemicznych daje się stosować do Fizyologii, Patologii i Terapeutyki. Jako przykład przytacza autor wpływ diastazów na żywienie się mikrobów; działanie tych pierwszych V. Henri wyraził (Société française de Physique 17 marca 1905) wzorem:

$$x = \frac{a}{k_1 - k}\left[(k_1 - A)e^{-kt} - (k - A)e^{-k_1 t}\right],$$

gdzie $A = \frac{1}{1+ma}$, m jest stała, a koncentracya ciał, na które działa diastaz, x czas, t koncentracya przekształcającego się ciała. Drugim przykładem jest działanie antytoksyny na toksynę, do którego można zastosować wzór klasyczny Berthelota na prędkość etyryfikacyi:

$$\frac{dy}{dt} = k\left(1 - \frac{y}{l}\right)^2,$$

w którym l oznacza granicę eteryfikacyi, y część kwasu lub alkoholu, która została połączona, t czas, k spółczynnik zależny od natury substancyj, będących w reakcyi. Klasyczne teorye sprężystości daje się stosować do zjawisk fizyologicznych; autor pokazuje to jej zastosowanie do zjawiska kurczenia się włókna mięśniowego. Dalej następują

Digitized by Google

przykłady zastosowania teoryi napięcia powierzchniowego do określenia postaci ameb, leukocytów i ruchów tychże. Ważne znaczenie w zastosowaniach tego rodzaju grają analogie matematyczne, t. j. jednakość formy równań różniczkowych dla rozmaitych kategoryj zjawisk, jak to wykazał Petrovitch w dziełku p. t. „La Mécanique des phénomènes fondée sur l'analogie".

W konkluzyi twierdzi autor, że o ile stosowanie bezpośrednie Matematyki do zjawisk biologicznych polega nieraz na złudzeniu z powodu zawikłania danych i mnogości zmiennych niezależnych, to z drugiej strony, dzięki Matematyce, pojąć łatwiej można pewne analogie i pewną liczbę praw biologicznych. *S. D.*

G. B. Guccia. 1) Un théorème sur les courbes algebriques planes d'ordre n. C. R. CXLII, 5 czerw. 1906.

2) Un théorème sur les surfaces algébriques d'ordre n. Tamże, 25 czerwca 1906.

3) Sopra una nuova espressione del l'ordine e della classe di una curva gobba algebrica. (Rend. Palermo, 1906, 10 czewca 1906.)

W nocie pierwszej rozważa autor krzywą algebraiczną C_n rzędu n. Na jej płaszczyźnie ustala dowolnie: 1-o punkt P, 2-o prostą D_2 nie przechodzącą przez ten punkt. Niechaj D_1 będzie styczna w P krzywej jedynej pęku (C_n, D^n_2) przechodzącego przez P; D_3 prosta biegunowa punktu P względem C_n. Czwarta prosta D_4 wyznacza się za pomocą następującej konstrukcyi: Pęk (C_n, G_n) (G_n jest grupą n prostych, łączących P z n punktami spotkania D_2 z C_n) zawiera krzywą, która rozkłada się na D_2 i na krzywe C_{n-1} rzędu $n-1$. Podobnież pęk (C_{n-1}, G_{n-1}) (gdzie G_{n-1} jest grupą $n-1$ prostych, łączących P z $n-1$ punktami spotkania D_2 z C_{n-1}) zawiera krzywą, która rozkłada się na D_2 i krzywą C_{n-1} rzędu $n-2$ i t. d. Wyznaczamy w ten sposób $n-1$ krzywych $C_{n-1}, C_{n-2}, \ldots, C_{n-(n-1)}$, z których ostatnia jest prostą D_4. Autor dowodzi twierdzenia: „Jeżeli obierzemy dowolnie na płaszczyźnie punkt P i prostą D_2, to: 1-o, cztery proste D_1, D_2, D_3, D_4 spotykają się

Digitized by Google

w jednym punkcie; 2-o, ich stosunek anharmoniczny jest stały i równy n.

Stąd, na podstawie zasady dwoistości, wynika analogiczne twierdzenie, według którego niezmiennik liczbowy m (klasa krzywej) jest stosunkiem anharmonicznym czterech punktów na prostej.

W nocie drugiej rozważa autor powierzchnię algebraiczną F_n rzędu n. Obiera dowolnie w przestrzeni: 1-o punkt P; 2-o płaszczyznę Π_2, nie przechodzącą przez ten punkt. Niechaj Π_1 będzie płaszczyzną styczną w P do jedynej powierzchni pęka (F_n, Π^n) przechodzącego przez P; Π_3—płaszczyzną biegunową punktu P względem F_n. Czwartą płaszczyznę Π_4 wyznaczamy za pomocą następującej konstrukcyi. Pęk (F_n, K_n) (K_n oznacza stożek o wierzchołku P, przechodzący przez krzywą przecięcia płaszczyzny Π_3 z F^n) zawiera powierzchnię, która rozkłada się na Π_2 i na powierzchnię F_{n-1} stopnia $n-1$. Podobnież pęk (F_{n-1}, K_{n-2}), (gdzie K_{n-1} oznacza stożek o wierzchołku P, przechodzącym przez krzywą przecięcia płaszczyzny Π_3 z F_{n-1}) zawiera powierzchnię, która rozkłada się na Π_2 i na powierzchnię F_{n-2} rzędu $n-2$ i t. d. Wyznaczamy w ten sposób $n-1$ powierzchni: $F_{n-1}, F_{n-2}, \ldots, F_{n-(n-1)}$, z których ostatnia jest płaszczyzną Π_4. Autor dowodzi twierdzenia:

Jeżeli obierzemy dowolnie w przestrzeni punkt P i płaszczyznę Π_2, to: 1-o cztery płaszczyzny Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 przechodzą przez jednę i tę samą prostą; 2-o ich stosunek anharmoniczny jest stały i równy n.

W Nocie trzeciej dowodzi autor analogicznego twierdzenia dla krzywych skośnych algebraicznych i (na podstawie zasady dwoistości) dla powierzchni rozwijalnych, mianowicie:

Rząd n krzywej skośnej daje się wyrazić jako stosunek anharmoniczny stały czterech płaszczyzn, przechodzących przez jednę i tę samą prostą; klasa zaś r jako stosunek anharmoniczny stały czterech prostych, leżących na jednej płaszczyznie. *S. D.*

T. Levi-Civita. Sulla penetrazione dei proietilli nei mezzi solidi. Wenecya 1906 (Atti del Ren. Ist. Veneto di sc. etc. **65**, str. 1149—1555).

Według teoryi zwykłej w Balistyce, głębokość X, na którą

Digitized by Google

wchodzi pocisk, wymierzony do celu (ciała stałego), wyraża się wzorem:

$$X = h \log (1 + \beta V^2),$$

gdzie V jest prędkość pocisku, h, r, β ilości stałe. Funkcya $\log(1+\beta V^2)$ rośnie wraz z V; tymczasem doświadczenie wskazuje, że w wielu przypadkach istnieje określona odległość od celu, a zatem pewna wartość na V, dla której przenikanie jest największe. Pochodzi to stąd, że pocisk, uderzając o cel, doznaje odkształcenia. To objaśnienie daje się potwierdzić rachunkiem i prowadzi do następującego związku pomiędzy X i V:

$$X = \frac{h \log (1+\beta V^2)}{1+kV},$$

gdzie h, k, β są spółczynniki stałe, zależne od natury pocisku i ośrodka. W rozprawie podany jest wywód tego wzoru, oparty na Mechanice odkształceń sprężystych. *S. D.*

G. Veronese. Il vero nella Matematica, Discorso inaugurale dell'anno scolastico 1905—6 letto nell'Aula Magna della R. Università di Padova, il giorno 6 novembre 1905. Roma 1906. 8-o, str. 38.

Matematyka czysta jest nauką ścisłą. Prawda w nauce ścisłej polega na harmonii różnych aktów myślenia, a swoboda umysłu w jego twórczości jest ograniczona jedynie zasadą przeciwieństwa. Stąd hypoteza jest możliwa wtedy tylko, gdy nie zachodzi sprzeczność z przesłankami i wnioskami z tych przesłanek. W Matematyce dowód fałszywości hypotezy lub dedukcyi powinien być matematyczny, czyli, inaczej mówiąc, powinien wychodzić z przesłanek i z zasady przeciwieństwa, lecz nie może być oparty na tej lub innej hypotezie filozoficznej, dotyczącej genezy samych przesłanek. Z drugiej strony, z nowego przedstawienia pojęć matematycznych korzystać może teorya poznania. Zapewne, różnych form liczby rozciągłości oderwanej, jak np. form nieskończoności, nie napotykamy w naszych wrażeniach zmysłowych. Kombinacya pojęcia nieograniczonego następstwa i aktu myślenia, przy pomocy którego następstwa te rozważamy, jest całkowicie dana przez samo myślenie. Nie można atoli twierdzić, że prawo myślenia, przy pomocy którego tworzymy pojęcie nieograniczoności, a z niej pojęcia nieskończoności i nieskończonek potencyalnych i aktualnych w ich różnych formach, wydobywamy jedynie z obserwacyi, jak nie

Digitized by Google

wydobywamy z niej przestrzeni fizycznej nieograniczonej. Moglibyśmy uniknąć genezy nieograniczoności i nieskończoności za pomocą odpowiednich definicyj lub umów, i ustalić tym sposobem z zupełną pewnością pojęcia potrzebne matematykom, lecz maskujemy przez to kwestyę poznania, bynajmniej jej nie rozwiązując. Prawo nieograniczoności jest konieczne dla postępu wiedzy i nie możnaby zbudować Arytmetyki bez tego prawa i jego koniecznych konsekwencyj.

Inaczej rzecz się ma z genezą matematyczną zasad Geometryi i Mechaniki, które są naukami doświadczalnemi o tyle, o ile ich pierwsze przedmioty są podsunięte przez doświadczenie. Prawda w tych naukach polega na harmonii myślenia z przedmiotami zewnętrznemi, i jesteśmy zmuszeni uważać za fałszywe wszystko, co sprzeciwia się prawom myślenia i samym przedmiotom. Ścisłość Geometryi będzie tem większa, im pewniejszą będzie ścisłość aksiomatów, podsuniętych przez doświadczenie, im one będą prostsze, powszechniej przyjęte i mniej liczne.

Nasza intuicya przestrzeniowa nie jest formą a priori transcendentalną naszego umysłu, jakkolwiek powstaje z obserwacyi, połączonej z abstrakcyą. Nie możemy tedy za podstawę Geometryi przyjąć definicyi euklidesowej równoległych, jako prostych płaszczyzny nie spotykających się przy jakkolwiek dalekiem przedłużeniu; na tej definicyi aksiomatu oprzeć nie można. Należy tedy dać definicyę równoległych, opartą na spostrzeganiu, i wtedy dopiero możemy przekonać się, że postulatowi Euklidesa, iż „z punktu można poprowadzić tylko jednę równoległą do prostej danej“, brak tej rzeczywistości, jaką posiadają inne aksiomaty, wydobyte z doświadczenia. Jest konieczne odróżnienie przestrzeni fizycznej od intuicyjnej, tej zaś od geometrycznej. Przestrzeń geometryczna jest tą częścią czystej rozciągłości, w której przedstawiamy przestrzeń fizyczną i intuicyjną; przestrzeń ta nie może we wszystkich swych formach znaleść przedstawienia w świecie rzeczywistym. Przestrzeni fizycznej i intuicyjnej nie można zdefiniować, przeciwnie zaś można dać definicyę przestrzeni geometrycznej. Tak np. nietylko równość figur geometrycznych nie jest koniecznie określona przez ruch ciał stałych (sztywnych, jak utrzymywał Helmholtz, lecz nie jest przezeń nawet określona równość figur geometrycznych, konieczna do określenia ruchu ciał sztywnych. Stąd wniosek, że Geometrya teoretyczna nie jest częścią Mechaniki, jak twierdził Newton.

Digitized by Google

Oprócz Geometryj euklidesowych istnieją jeszcze geometrye inne, nie dające się stwierdzić w świecie fizycznym, jakkolwiek logicznie możliwe. Do tych należy Geometrya niearchimedesowa, najprzód zwalczana, obecnie zaś przyjmowana przez matematyków, lecz nie dyskutowana dotąd przez filozofów, którzy zajmowali się aktualnemi nieskończonostkami. Dalej należy tu Geometrya przestrzeni o więcej niż trzech wymiarach, zawartych w przestrzeni ogólnej o nieskończonej liczbie wymiarów. I przestrzenie te nie są pojęciami pustemi; możemy w nich bowiem podejmować badania, wprowadzając punkty, proste i płaszczyzny, jak w przestrzeni zwykłej. Nie należy jednak mniemać, że Matematyka wprowadza tu jakąś hypotezę fizyczną o istnieniu przestrzeni rzeczywistej o czterech wymiarach, lub, jak chciał Zöllner, że ciała fizykalne są cieniami ciał, istniejących w przestrzeni czterowymiarowej.

Każde prawo matematyczne, będąc prawem myślenia, jest zarazem prawem Natury. Galileusz powiedział, że Przyroda jest księgą, pisaną językiem matematycznym. Stąd Matematyka stosuje się do badania rzeczywistości zewnętrznej; lecz jeżeli dane doświadczalne, stanowiące podstawę badania, są niedostateczne, rachunek lub rozumowanie matematyczne mogą doprowadzać do sprzeczności. Gdy z biegiem postępu nauki badacz poznaje dokładnie te dane, wtedy Matematyka może mu odkrywać fakty poprzednie nieznane, nieobserwowane, jak to niejednokrotnie zaświadcza historya nauki. *S. D.*

Dr. Mieczysław Łazarski, prof. Szkoły Politechnicznej. „Zasady Geometryi wykreślnej.“ Tom I. Tekst z 18 tablicami rysunkowemi. 1903. 8-o większe, str. 145. Tom II. Tekst z 35 tablicami rysunkowemi. 1906, 8-o większe, str 143. Lwów. Nakładem wydawnictwa Biblioteki politechnicznej.

Treść tego dzieła jest następująca:

Tom I. Część I. Zasady Geometryi rzutowej: O utworach zasadniczych Geometryi. O stosunku pojedyńczego podziału. O stosunku podwójnego podziału. O perspektywności utworów rzędu pierwszego. O utworach rzędu pierwszego jednokreślnych. O sprowadzaniu utworów jednokreślnych do położenia perspektywicznego. O uzupełnianiu utworów rzędu pierwszego jednokreślnych. O utworach harmonicznych. O pękach spółśrodkowych i szeregach leżących na spólnej podstawie. O szeregach i pękach inwolucyjnych. O kolineacyi dwu układów płaskich. O utworach pęków i szeregów jednokreślnych. O biegunach i biegunowych przekrojów stożkowych. O prawie biegunowej dwoistości. O szeregach punktów i pękach stycznych przekroju stożkowego. O kolineacyi przekrojów stożkowych z kołem. O dwu przekrojach stożkowych

Digitized by Google

O kolinacyi dwu przekrojów stożkowych. O przekrojach stożkowych spółogniskowych. O przekrojach stożkowych, stykających się w stopniu drugim i trzecim. Zagadnienia o przekrojach stożkowych.

Część II. Metody Geometryi wykreślnej. A) Rzuty środkowe (Perspektywa linijna). O prostych, przechodzących przez środek rzutów. O płaszczyznach, przesuniętych przez środek rzutów. O prostych dowolnych. O dwu prostych. O płaszczyznach dowolnych. O prostych i płaszczyznach. O kładach płaszczyzn, O punktach dzielenia. Zagadnienia o punktach, prostych i płaszczyznach. O zmianie rzutów srodkowych. Zmiana środka rzutów. O zmianie położenia utworów przestrzeni. O zmianie tła. B) Rzuty prostokątne. O rzutach punktów i prostych, o śladach płaszczyzn, jakoteż o związkach, zachodzących między punktami i płaszczyznami. O obrotach punktów i płaszczyzn. O zmianie płaszczyzn rzutowych. C) Aksonometrya prostokątna. O trójkącie i osiach aksonometrycznych, o skróceniach odcinków, równoległych do osi układu prostokątnego, o związkach między temi skróceniami. O konstrukcyach bezpośrednich w Aksonometryi. O wyznaczeniu prawdziwych wielkości odcinków. O kładach płaszczyzn. D) Kolineacya utworów przestrzeni.

Część III. O wielościanach. Kąty bryłowe trójścienne. O rzutach wielościanów. O rzutach wielościanów foremnych. O przekrojach wielościanów płaszczyznami. O wyznaczaniu punktu przecięcia się prostej z wielościanami. O przenikaniu się wielościanów. O cieniach własnych i cieniach rzuconych wielościanów.

Tom II. O krzywych płaskich. O krzywych algebraicznych — rząd i klasa—związki pomiędzy rzędem i klasą. O rzutach krzywej płaskiej. O krzywiznie krzywych płaskich. O cykloidach. O wyznaczaniu stycznych, punktów styczności i normalnych krzywej narysowanej lecz nie określonej. O krzywych wichrowatych. O rzędzie, stopniu i klasie krzywych wichrowatych algebraicznych. O rzucie krzywej wichrowatej. O przekrojach płaskich powierzchni rozwijalnej, opisanej na krzywej wichrowatej. O powierzchniach stożkowych i walcowych. O rzutach powierzchni stożkowych i walcowych. O konstrukcyi płaszczyzn stycznych, poprowadzonych przez dany punkt do powierzchni stożkowej i walcowej. O konstrukcyi punktów przecięcia się powierzchni stożkowych i walcowych z liniami prostemi i krzywemi. O przekrojach powierzchni stożkowych i walcowych płaszczyznami. O powierzchniach stożkowych rzędu drugiego. O przekrojach powierzchni stożkowej rzędu drugiego płaszczyznami. O powierzchniach stożkowych obrotowych. O krzywych przenikania się dwu powierzchni stożkowych rzędu drugiego. O rozwijaniu powierzchni stożkowych i walcowych. O powierzchniach w ogóle i o powierzchniach rzędu drugiego. O powierzchniach rzędu drugiego. O biegunowej dwoistości. O powierzchniach wichrowatych rzędu drugiego. O krzywych zwężenia (strykcyjnych) na powierzchniach wichrowatych rzędu drugiego. O powierzchniach rzędu drugiego krzywokreślnych. O dwu powierzchniach rzędu drugiego. O przekrojach kołowych i pękach powierzchni krzywokreślnych rzędu drugiego. O powierzchniach

Digitized by Google

obrotowych. O powierzchniach wichrowatych. O sklepicniu wichrowatem. O konoidach rzędu czwartego i trzeciego. O liniach i powierzchniach śrubowych. O powierzchniach śrubowych rozwijalnych. O liniach równego oświetlenia na powierzchniach.

Prac matematyczno-fizycznych tom XVII wyszedł z druku i zawiera: T. Levi-Civita, Sur la recherche des solutions particulières des systèmes différentiels et sur les mouvements stationnaires. (Badanie szczególnych rozwiązań układów różniczkowych i o ruchach umiejscowionych). K. Żorąwski. Ueber Krümmungseigenschaften der Scharen von Linienelementen. (O własnościach krzywiznowych ciągłych zbiorów elementów liniowych). W. Sierpiński. O pewnem zagadnieniu z Rachunku funkcyj asymptotycznych. G. A. Miller. Groups generated by two operators which transform each other into the same power. (O grupach utworzonych przez dwa operntory, przekształcające się wzajemnie na jednę potęgę). A. Przeborski. O całkach nieanalitycznych równań różniczkowych liniowych o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego. G. Doborzyński. Hypoteza van der Waalsa o stanach odpowiednich. G. Mittag-Leffler. O przedstawieniu analitycznem jednoznacznej gałęzi funkcyi analitycznej. Przekład S. Dicksteina. Nota IV. A. Przeborski. O całkach nieanalitycznych równań różniczkowych o pochodnych rzędu pierwszego.

W. Dziewulski. Wiekowe perturbacye Marsa w ruchu Erosa. Osobne odbicie z Rozpraw Wydziału matematyczno-przyrodniczego. T. XLV. Serya A. Kraków, 1906, str. 32.

Patrz „Kronika“ w zeszycie niniejszym (str. 232).

Prof. Lodovico Silberstein Elettricità e Magnetismo, Corso teorico tenuto nella R. Università di Bologna nell'anno accademico 1900—01. Bologna, Litografia Sauer e Barigazzi 1902—1905.

Ten kurs litografowany składa się z 66 arkuszy i obejmuje 47 lekcyj, zawierających wykład teoretyczny nauki o elektryczności i magnetyzmie.

E. Pascal. Sui simboli di Riemann nell Calcolo differenziale assoluto. (Rend. della R. Acc. dei Lincei, 17 giugno 1906, p. 671 674).

E. Pascal. Sul reciproco del teorema fondamentale relativo alle derivazioni covarianti. (Rend. del R. Ist. Lomb. 1906, p. 414 - 418).

Digitized by Google

E. Pascal. Sulle matrici formati cogli elementi di un sistema covariante. (Atti del R. Ist. Veneto, 1905—1906, p. 1115—1120.)

L. Sinigalla. Sul sistema di tre forme cubiche binarie. (Rend. Palermo, 1906,) str· 6.

L. Sinigalla. Sopra le forme differenziali derivate. (Rend. del R. Ist. Lomb.) 1906, p. 876—893.

Stanislaus Jolles. Die Grundzüge der Fokaltheorie linearer Strahlenkongruenten. (Odbitka ze Sprawozdań z posiedzeń berlińskiego Towarzystwa matematycznego, stt. 51—53).

Autor podaje twierdzenia teoryi ogniskowej liniowych kongruencyj promieni. Obszerny wykład tej teoryi wraz z dowodami twierdzeń ogłoszony ma być w „Mathematische Annalen".

L. Bruner i S. Tołłoczko. Chemia nieorganiczna z 73 rycinami w tekście i tablicą widmową. Wydanie drugie poprawione. Warszawa. Nakład Gebethnera i Wolffa. Kraków, G, Gebethner i S-ka, 1907. 8-o. str. 284.

Br. Znatowicz. Zasady Chemii, napisał..... Wydanie drugie przejrzane i znacznie zmienione, z 32 rysunkami w tekście. Warszawa. Nakład Gebethnera i Wolfa. Kraków, G Gebethner i S-ka. 1906. 8-o, str. 311. Cena w oprawie kart. rb. I k. 20.

KRONIKA.

Akademia umiejętności w Krakowie. Wydział matematyczno-fizyczny [1],

Posiedzenie dnia 6 listopada 1995.

P. Rudzki referuje o pracy W. Dziewulskiego p. t. „Wiekowe perturbacye Marsa w ruchu Erosa".

Wiadomo, że niedawno odkryta mała planeta Eros obiega drogę, która częściowo leży w obrębie orbity Marsa, częściowo zaś po za nią wykracza·

[1]) Według „Sprawozdań z czynności i posiedzeń Akad. Um. w Krakowie."

Digitized by Google

Jednakże skutkiem znacznego nachylenia (około 10°) płaszczyzny orbity Erosa do płaszczyzny orbity Marsa, oraz dzięki specyalnemu położeniu silnie wydłużonej orbity Erosa w swej płaszczyźnie. obecnie orbity obu planet nietylko nie przecinają się, ale nawet wszędzie są znacznie od siebie oddalone.

Wiadomo zaś, że orbity nie zachowują stałej pozycyi w swych płaszczyznach, przeciwnie kręcą się po nich, a jednocześnie ulegają dowolnym deformacyom. Może się przeto zdarzyć, że nie przecinające się obecnie orbity Erosa i Marsa kiedyś przetną się wzajemnie.

Autor zastanawia się przedewszystkiem nad pytaniem, czy i kiedy może nastąpić ta ewentualność. W tym celu bada perturbacye w ruchu Erosa zależne od przyciągania Marsa, Ziemi, Jowisza i Saturna. Przypadek Marsa jest specyalnie trudny. Ponieważ orbita Erosa sięga po za orbitę Marsa, przeto nie można było posługiwać się wzorami klasycznej teoryi perturbacyj. Autor musiał uciec się więc do metody Gaussa, opracowanej przez Hilla. Perturbacye, zależne od trzech iunych planet, mogły być obliczone zwyczajnemi metodami. Autor specyalnie posługiwał się wzorami Charliera.

Do rozpoznania krytycznej epoki, t. j. epoki, w której następuje przecięcie się orbit Erosa i Marsa, dochodzi autor przez kolejne próby. Znajduje wreszcie. że najbliższa w przyszłości krytyczna epoka powinna nastąpić około 8600 r. naszej ery, a najbliższa w przeszłości krytyczna epoka zapewne nastąpiła około 7400 r. przed Chr. Naturalnie liczby te nie są pewne choćby dla tego, że w rachunkach swych musiał autor pominąć perturbacye peryodyczne, uwzględniając tylko perturbacye wiekowe.

Lecz jeżeli dwie orbity przecinają się, albo w pewnych miejscach bardzo blizko sąsiadują ze sobą, to obiegające po nich ciała mogą też znaleść się bardzo blizko siebie. W pewnych warunkach mogłaby nawet nastąpić kolizya.

Możnaby tu wprost postawić pytanie, w jakiej chwili wzajemna odległość obu ciał staje się najmniejszą i jaka jest ta najmniejsza odległość. Lecz rozwiązanie podobnego zadania byłoby bardzo trudne, nie przedstawiałoby zaś realnego interesu, albowiem wobec tego, że rezultaty pierwszego zadania, tyczącego się krytycznej epoki, są tylko z gruba przybliżone, wyniki opartego na niem drugiego zadania musiałyby być zgoła niepewne.

Wskutek tego autor poprzestaje na zbadaniu, czy w pobliżu krytycznej epoki obie planety mogą jednocześnie lub prawie jednocześnie przechodzić przez tę samą stronę linii węzłów, t. j. znaleść się blizko siebie, i dochodzi do wyniku, że z powodu, iż Eros obiega swoją orbitę w krótszym czasie. niż Mars swoją, to wśród obiegów, przypadających na czas około epoki krytycznej, znajdą się takie. w ciągu których obie planety przechodzą przez tę samą stronę linii węzłów w małym stosunkowo odstępie czasu, a więc przechodzą blizko siebie. Eros musi wtedy doznać znacznych perturbacyj w swym ruchu, perturbacye zaś w ruchu Marsa będą bez porównania mniejsze z powodu, że jego masa jest bez porównania większa od masy sąsiada.

Za pomocą metody waryacyi stałych, posiłkując się też pewnemi wzorami Strömgrena, próbował autor obliczyć perturbacye Erosa, towarzyszące jego

Digitized by Google

rozmijaniu się z Marsem w epoce krytycznej; jednakże z różnych powodów, przedewszystkiem zaś z powodu, że nie można było uwzględnić wpływu perturbacyj, które towarzyszyły dawniejszym rozmijaniom się dwóch planet—nie mógł dojść do dostatecznie pewnych rezultatów. Tyle tylko można powiedzieć, że owe rozmijania się Erosa z Marsem w epokach krytycznych mogą z czasem doprowadzić do zupełnego zdeformowania orbity Erosa. Tak np. może się zdarzyć, że za jaki milion lat jego orbita stanie się podobna do orbit innych małych planet.

Posiedzenie dnia 4 grudnia 1905 r.

Wł. Szajnocha referuje o pracy E. Romera p. t. „Epoka lodowa na Świdowcu".

Od r. 1877, w którym Paul i Tietze znaleźli ślady lodowe pod Howerlą, studya glacyalne autora są pierwszemi na terytoryum fliszu karpackiego. Wnosząc z uznanej powszechnie teoryi Partscha, że dyluwialna granica firnu podnosiła się w Europie od zachodu na wschód, uważano poszukiwanie śladów glacyalnych w Karpatach fliszowych za bezowocne. W dwu wycieczkach na Świdowiec, będący orograficznem przedłużeniem Czarnejhory na Z. od Cisy, znalazł jednak autor 14 cyrków (karów) glacyalnych, wystawionych przeważnie ku Pn. i W. W celu stworzenia podstawy do dalszego studyum zdjął autor hypsometrycznie około 400 punktów wysokości badanego terenu. Z pięciu bliżej zbadanych dolin, trzy są skierowane ku Pn., dwie ku Pn.W. Doliny te mają wyraźną budowę schodkową, a są zamknięte ku górze rozległym kotłem o równem dnie. Rosnąca w górę szerokość dolin, terasowość, zamknięte zagłębia, powodujące odwrotny kierunek odwodnienia, wreszcie ogólny charakter krajobrazu jest dowodem glacyalnego pochodzenia tej rzeźby terenu. Powstanie tych form przypisuje autor przedewszystkiem erozyi glacyalnej, objawy czynności osadowej (moreny) odgrywają tu rolę bardzo podrzędną.

W sprawie teras glacyalnych Świdowca zajmuje autor następujące stanowisko. Główne terasy powstają w miejscu zwiększenia się mas lodu w profilu poprzecznym (Penck), drugorzędne są śladem oscylacyj klimatycznych, w szczególności faz cofania się lodowca. Poziomy teras nie mogą wykazywać zgodności nawet w sąsiednich dolinach. Zgodność poziomu teras, lub pewne właściwości ukształtowania poprzecznego profilu dolin skłaniają autora do wniosku o łączeniu się mas lodowych w poprzek garbów, oddzielających doliny glacyalne. Na tej podstawie przeprowadza autor następującą rekonstrukcyę lodowców Świdowca.

Dolina	Poziom lodowca górny	Poziom lodowca dolny	Największa długość	Największa grubość	Największa szerok.	Powierzchnia lodu w profilu poprzecznym
Apszyniecka Z.	1600	1150	1800	130	1000	59 000 m²
Apszyniecka W.	1580	1200	1700	75		24.000
Worożeska	1580	1250	1450	110	650	52.000
Dragobrat	1750	1125	2600	200	750	140.000
Trufaniec	1770	1200	2000	135	500	80 000

Digitized by Google

Granicę wiecznego śniegu oznaczył autor kilku metodami w wysokości około 1450—1485 m. Podczas gdy dyluwialna granica firnu podnosiła się od średnich gór Anglii do Sudetów od 400—1100 m., w Tatrach podnosiła się do 1500 m., pozostał jej poziom aż do źródlisk Cisy co najmniej niezmienny.

Ze śladów górnych teras glacyalnych w dolinie Worożeskiej, z podłużnych listw wzdłuż grzbietów nierozczłonkowanych dolinami, z terasowości garbów poprzecznych wnosi autor o podwójnem zlodowaceniu Świdowca. Starszy okres lodowy był intenzywniejszy od ostatniego, granica firnu miała poziom około 150 m. niższy, ale nie pozostawiła wielkich śladów w przeobrażeniu rzeźby Świdowca, ponieważ pierwszy okres lodowy nie napotkał predyspozycyi do erozyi wobec braku erozyi wodnej, w czasie poprzedzającym stary okres lodowy. Próba rekonstrukcyi staroglacyalnej powierzchni przedstawia nam krainę bardzo jednostajną, łagodnie pochyloną, zbliżoną do penepleny. Są niemniej wskazówki, że przełom Cisy poniżej Körösmezö powstał dopiero w górnem dyluwium.

Posiedzenie dnia 8 stycznia 1906 r.

A. Witkowski referuje o pracy B. Sabata p. t.: „Wpływ promieni radu na przewodnictwo elektryczne elektrolitów".

Działanie jonizujące promieniowania radu na gazy, tudzież analogiczny, aczkolwiek słaby ich wpływ na dielektryki stałe i ciekłe były wystarczającym motywem do zbadania z całą ścisłością, czy i o ile przewodnictwo elektrolitów ulega zmianie pod wpływem tego promieniowania. Badania autora wykonane w pracowni prof. Curie w Paryżu dały wynik ujemny. Nie znaleziono żadnej zmiany przewodnictwa po za tą, która wynika ze zmiany temperatury elektrolitu, spowodowanej sąsiedztwem preparatu radowego.

Posiedzenie dnia 5 lutego 1906 r.

A. Witkowski referuje o pracy W. Żłobickiego p. t. „Pomiary napięcia powierzchniowego metodą małych baniek".

Przyrządem, którego dokładność wynosiła $\pm 0{\cdot}01$, wykonał autor szereg pomiarów napięcia powierzchniowego w $\left(\frac{\text{miligramach}}{\text{milimetr}}\right)$ i doszedł do następujących wyników:

1) Przy pomiarach napięcia powierzchniowego metodą małych baniek można bez obawy o wyniki używać do wytwarzania baniek, któregokolwiek z trzech gazów: powietrza, dwutlenku węgla lub gazu świetlnego.

2) Jest cechą charakterystyczną roztworów gazowych w wodzie, że mają napięcie powierzchniowe nie o wiele różne od napięcia czystej wody, nawet wtedy, gdy spółczynnik absorbcyi danych gazów ma bardzo wielką wartość.

3) Napięcie powierzchniowe wodnych roztworów kolloidowych ciał organicznych jest nawet, w razie bardzo małej koncentracyi, wybitnie różne od napięcia wody i to w obu kierunkach: napięcie powierzchniowe maleje lub rośnie.

4) Gdy koncentracya tych roztworów wzrasta, zachowanie się napięcia powierzchniowego jest bardzo charakterystyczne skutkiem tego, że napięcie to osiąga stosunkowo rychło pewne minimum lub maximum.

Digitized by Google

5) Napięcie powierzchniowe kolloidowych roztworów ciał organicznych maleje ze wzrostem temperatury stosunkowo prędzej, niż napięcie czystej wody.

6) Tak zwane roztwory kolloidowe metali mają napięcie powierzchniowe nie o wiele różne od napięcia wody i zachowują się wobec zmiany temperatury odmiennie, niż roztwory kolloidowe organiczne.

7) Roztwory kolloidowe metali pod względem napięcia powierzchniowego przypominają zawiesiny.

Posiedzenie dnia 5 marca 1906 r.

W. Natanson referuje o pracy M. Smoluchowskiego p. t: „O średniej drodze cząsteczek gazu i o związku jej z teoryą dyfuzyi".

W teoryi kinetycznej gazów ograniczano się dotychczas do rozważania swobodnego ruchu cząsteczek w czasie między kolejnemi spotkaniami, związanego z pojęciem tak zwanej drogi „swobodnej". Autor zaś bada, w jaki sposób cząsteczki w przeciągu dłuższego czasu, zakreślając drogę zygzakowatą, złożoną z kilku dróg swobodnych, oddalają się od położenia początkowego. Z obliczeń jego, na podstawie założeń, zwykle w teoryi gazów przyjmowanych, wynika funkcya, wyrażająca prawdopodobieństwo zakreślania przez cząsteczkę danej drogi (nieswobodnej) w przeciągu danej liczby spotkań. Za pomocą tej funkcyi, przyjmującej formę prostą dla liczb dużych, autor dochodzi bezpośrednio do ogólnego rozwiązania zadania dyfuzyi, które otrzymuje się zwykłą metodą jako całkę równania dyfuzyi. Koniec rozprawy stanowią rozważania co do wpływu upraszczających podstawowych założeń i krytyka próby Jeansa poprawienia teoryi pod tym względem.

Towarzystwo Kursów naukowych w Warszawie. Na sekcyi matematyczno-przyrodniczej Kursów naukowych ogłoszono na semestr zimowy roku 1905—6 następujące wykłady: S. Dickstein, Analiza algebraiczna (2 godziny); Rachunek nieskończonostkowy (2 godziny); Kurs matematyki dla przyrodników (2 godz.). W. Sierpiński; Wstęp do Analizy (2 godziny); Teorya liczb (2 godziny). L. Zarzecki, Geometrya analityczna płaszczyzny (2 godz.); Geometrya analityczna przestrzeni (2 godz.). S. Kalinowski: Fizyka—ciepło i światło (3 godziny). T. Miłobędzki: Chemia organiczna (3 godz.). Z. Weyberg: Mineralogia (2 godziny). J. Lewiński: Geologia dynamiczna (2 godziny); Paleontologia (2 godziny). J. Sosnowski: Biologia ogólna część, I (2 godz.), część II (2 godz,); Fizyologia (2 godz.). J. Tur: Embryologia porównawcza (1 godz.); Zoologia (4 godz.). Z. Woycicki: Botanika (Morfologia 2 godziny, Anatomia 2 godz.). K. Stołyhwo: Antropologia zoologiczna (2 godziny). L. Krzywicki, Antropologia etniczna (2 godziny). A Mahrburg: Logika (2 godziny); Psychologia (Część I 2 godz., Część II 2 godz.).

Digitized by Google

Komitet bibliografii i studyów astronomicznych przy Obserwatoryum królewskiem belgijskiem w Uccle nadesłał nam list wraz z podpisaną przez dyrektora Komitetu prof. P. Stroobanta odezwą, w której Komitet zwraca się z prośbą o ułatwienie mu ułożenia listy obserwatoryów i astronomów całego świata, przez Obserwatoryum królewskie wydać się mającą. Odezwę tę przytaczamy w oryginale.

„Le Comité de bibliographie et d'études astronomiques de l'Observatoire royal de Belgique a entrepris de publier une liste des observatoires et des astronomes du monde entier.

Une demande, sous forme de questionnaire, accompagnée d'un modèle de réponse relatif au Service astronomique de l'Observatoire d'Uccle (Belgique) a été adressée à tous les directeurs d'observatoire.

La liste comprendra aussi les astronomes libres (professeurs d'Université amateurs. etc.) qui ne sont attachés à aucun observatoire, mais qui s'occupent de recherches célestes.

Les renseignements parvenus déjà au Comité permettront de donner non seulement une liste des observatoires, avec leurs coordonnées géographiques et les membres du personnel, mais aussi un véritable tableau de l'activité astronomique dans le monde entier grâce aux indications concernant les instruments dont chaque établissement dispose, les recherches auxquelles il se livre et les travaux qu'il publie.

Nous faisons appel aux directeurs d'observatoire auxquels la demande ne serait pas parvenue ou qui n'auraient pas encore envoyé leur réponse ainsi qu'aux astronomes libres et nous les prions d'envoyer les indications mentionnées ou de signaler toute omission, le plus tôt possible au directeur du Comité: M. le Prof. Dr. P. Stroobant, astronome à l'Observatoire royal de Belgique, à Uccle, Belgique)".

Digitized by Google

SKOROWIDZ ALFABETYCZNY NAZWISK.

Agamemnone 216, 219,221.
Allesandri 218.
Andrade 223.
Archimedes 65.
Arctowski 172, 173.

Badoureau 223.
Banachiewicz 82.
Barbetti 132.
Batelli 216.
Berthelot 224.
Bessel 123.
Bisconcini 117.
Blaserna 211, 221.
Bohuszewicz 9.
Boltzmann 10, 223.
Bruner 232.
Burgatti 212.
Buys-Ballot 185, 201, 204, 207

Cacciatore 210.
de la Campa 122.
Cantoni 209.
Cardano 1, 3.
Charlier 233.
Chistoni 216, 221.
Chwolson 105.
Clausius 66, 67.
Curie, 235.

Dickstein 116,131,223,225.
Doborzyński 231.
Donatti 209.
Doppler 74.
Dorna 210.
Dove 179.
Duhem 223.
Drude 66.
Duhamel 44.
Dziewulski W. 231. 232.

Eredia 219, 221.

Faifofer 115.
Fergola 210.
Ferrari 216.
Ferriera 122.
Freycinet 223.
Friesendorff 33.

Galileusz 223.
Galois 121.
Gamba 221.
Garibaldi 210.
Gauss 132, 149, 233,
Gay-Lussac 6.
Gibbs 59.
Gorczyński 88, 97, 105, 110, 209.
Grassmann, 130.
Guldberg A. 118.
Guldberg, patrz Waage.

Hall 74.
Hann 2. 171. 190.
Hansky 83.
Helmholtz 35, 36, 55.
Henri 224.
Hertz 223.
Hill 233.
Huber 115.

Janowski 176.
Jeans 236.
Jędrzejewicz Jan 81.
Jędrzejewicz Janusz 116.
Jolles 232.
Jordan 121.

Kalinowskt 236.
Karliński 123.
Kelvin 69, 72.
Kirchhoff 35, 71, 79
Klein 121.
Kommerell 142, 163, 164.
Kosiński 97, 100.
Krzywicki 236.
Kucharzewski 115, 223.
Kwietniewski S. 129.
Kwietniewski W. 115.

Laplace 191, 197.
Lebedew 74.
Levi-Civita 116, 226, 231, 234.
Lewiński 236.

Digitized by Google

Lie 121.
Lissajous 4, 34.
Lohse 83.
Lorentz H. A. 53, 65, 58, 75, 78.

Łazarski 229.
Łąpiński 115.

Mach 223.
Mahrburg 226.
Margules 181, 182, 183, 188, 190, 191, 202, 207.
Matenecci 209.
Maxwell 58, 60, 61, 63.
Merecki 10, 88, 169.
Meusnier 164.
Miller G. 72, 73.
Miller G A. 231.
Millosevich 211.
Miłobędzki 115. 236.
Mittag-Leffler 116, 231
Monti 218.

Nansen 171.
Natanson 236.
Neumann C. 35.
Newton 186.
Nichols 74.
Nielsen 122.
Niewenglowski 224.

Oddone 214. 215, 216.

Pacini 213.
Palazzo 211. 216, 221.
Palmieri 210.
Partsch 234.
Pascal E. 231, 232.
Paszl, 234.
Peltier 69.
Pesci 122.
Petrovitch 225.
Pettei 209.
Picard 121.
Pini 216.
Planck 75, 77.
Poincaré 223.
Przeborski 231.

Ragona 216.
Rayleigh 197.
Respighi 210.
Riecke 66.
Rius y Casas 122.
Rizzo 221.
Romer 234.
Rudzki M. P. 218, 232.

Sabat 225.
Schiaparelli 210, 216.
Secchi 210, 211.
Segre 158.
Sierpiński 231, 236.
Silberstein 231.
Smoluchowski 226.
Smosarski 181.
Sosnowski 236.
Stattlerówna 116.
Stephan 73.
Stracciati 221.
Stroobant 237.
Strömgren 233.
Szajnocha 234.
Szturcel 115.

Tacchini, 210, 211, 216, 218.
Teixeira 22.
Thomson J. J. 77.
Thomson W. 66, 67, 191.
Tietze 234.
Tołłoczko 232.
Trabert 181.
Tur 236.

Veronese 132, 226.
Vessiot 121.
Voigt 35, 36, 41. 42, 45.
Volpicelli 210.

Waage 63, 64.
van der Waals 77.
Weber H. 45.
Weyberg 236.
Wien 73, 74, 75.
Wickersheimer 223.
Witkowski A. 235
Witkowski J. 107.

Zarzecki 236.
Znatowicz 232.
Zöllner 83.
Zydler 115.

Żłobicki 235.
Żorawski 132.

Digitized by Google

Digitized by Google

SPRAWOZDANIA

Z POSIEDZEŃ

KOŁA MATEMATYCZNO - FIZYCZNEGO

w WARSZAWIE.

redagowane

przez L. ZARZECKIEGO.

Rok 1906/7.

Wiadomość o zawiązaniu i pierwszych pracach Koła matematyczno-fizycznego.

Gdy na początku zeszłego 1905-go roku po całem Królestwie rozlegać się zaczęło hasło walki o szkołę polską, jednocześnie w społeczeństwie naszem rosnąć i odczuwać się dała potrzeba przygotowania się do przyjęcia na własne barki wysoce ważnego i odpowiedzialnego obowiązku kształcenia przyszłych pokoleń narodu. W tym mianowicie czasie powstała w szczupłem gronie kilku ludzi myśl utworzenia Koła matematyczno-fizycznego, którego zadaniem byłoby ulepszanie nauczania przedmiotów fizyko-matematycznych z jednej strony, z drugiej zaś, przez wzajemne wspomaganie się, podniesienie kultury naukowej nauczycielstwa, które po tyloletniej śpiączce mogło nareszcie z własną występować inicyatywą, własnemi siłami i swojską myślą podsycaną światłem, płynącem z Zachodu, budować gmach przyszłego szkolnictwa naszego. W końcu marca tegoż roku odbyło się zebranie kilkunastu zaproszonych osób. Na posiedzeniu tem debatowano nad najważniejszemi i najpilniejszemi sprawami i zadaniami najbliższemi Koła. Uznano, że jedną z najgłówniejszych kwestyj jest opracowanie chociażby tymczasowego, jednolitego jednakże i więcej z wymaganiami nauki i czasu liczącego się programu. Na wszystkich, w odstępach dwutygo-

Digitized by Google

dniowych a nieraz mniejszych, odbywających się posiedzeniach Koła w ciągu kwietnia, maja, aż do połowy czerwca wspomnianego roku zajmowano się głównie kwestyą programu, przyczem dość raźnie zwiększająca się liczba członków pozwalała podzielić pracę pomiędzy różne komisye do poszczególnych przedmiotów. W połowie czerwca program był dość szczegółowo opracowany i w streszczeniu oddany do druku w istniejącym jeszcze wtedy „Przeglądzie Pedagogicznym". W programie tym zwrócono głównie uwagę na odświeżenie kursu początkowej Arytmetyki, rekomendując więcej zwracać uwagi na rachunek, unikać sztucznych sposobów, rozwijać pojęcie proporcyonalności, biorąc zadania z życia i otaczającej nas przyrody, nie uganiając się za sztucznemi kombinacyami, jakiemi są przepełnione istniejące u nas podręczniki. Przy nauczaniu t. zw. Algebry oraz Geometryi zwracano uwagę na więcej metodyczne traktowanie początków tych nauk, wprowadzając propedeutykę Geometryi już od klasy 1-ej, a z rozwiązywaniem prostszych równań 1-go i nawet 2-go stopnia zaznajamiając uczących się jeszcze przed systematycznem przechodzeniem działań nad jednomianami i wielomianami, przygotowując grunt do przyjęcia i zrozumienia pojęcia o liczbie ujemnej i działaniach nad nią. Długo debatowano nad wprowadzeniem z jednej strony elementów Geometryi nowej do programu szkoły średniej, z drugiej nad uzupełnieniem kursu Matematyki szkolnej przez dodanie w ostatniej klasie początków t. zw. Analizy wyższej i Geometryi analitycznej. Członek Koła J. Szczepański w tej materyi odczytał referat, w którym uzasadniał konieczność tych ostatnich inowacyj, gwoli rozwoju innych nauk i potrzeb życia praktycznego. Chronologicznie późniejszy program, opracowany przez zjazd nauczycieli i uczonych niemieckich w Meranie w jesieni 1905 roku, zawiera mniej więcej te same myśli przewodnie, co tylko świadczyć może o dostatecznej dojrzałości prac Koła, które ze swojej strony duże zawdzięcza światłym radom swego prezesa S. Dicksteina. W tymże czasie J. Szczepański przedstawił Kołu swoją pracę pod tytułem: „Kurs uzupełniacy Matematyki elementarnej". Rękopis ten odczytany był przez wybranych członków Koła, którzy swoje uwagi nad nim zreferowali na jednem z posiedzeń. Książka obecnie już wyszła i należy do wybitniejszych zjawisk naszej nowopowstającej literatury naukowo - pedagogicznej. W jesieni pomienionego roku posiedzenia Koła odbywały się w odstępach

Digitized by Google

miesięcznych i zajmowano się głównie sprawą nowych podręczników, a także rzeczową krytyką dawniejszych i nowopowstających. Z inicyatywy Koła powstały nowe wydania Geometryi Faifofera i Algebry Todhuntera. Ta ostatnia gruntownie przerobiona i poprawiona została przez syna tłómacza, Stefana Kwietniewskiego[1]). Niebawem ma wyjść drugie wydanie Geometryi Badowskiego opracowane przez autora, który stara się uwzględnić desideraty przedstawione przez Koło. Prócz tego na zebraniach, poczynając od stycznia 1906 roku, odczytywane były referaty w różnych kwestyach, mających związek z nauczaniem predmiotów fizyko-matematycznych. Odczytane były lub wypowiedziane następujące referaty:

Wł. Sawicki, „O programie Fizyki w szkole średniej".

St. Kwietniewski, „O przedstawieniach graficznych".

Z. Straszewicz, „O traktowaniu Geometryi nowej w kursie szkoły średniej".

L. Zarzecki, „O rysowaniu brył geometrycznych".

W. Włodarski, „O pewnym typie szkoły średniej".

Na jednem z ostatnich posiedzeń Koła powstała myśl ulegalizowania tegoż, a także założenia własnego pisma, w którem odźwierciadlałyby się prace i działania Koła, a także poruszane byłyby wszelkie sprawy, z nauczaniem przedmiotów fizyko-matematycznych związane. Starania o ulegalizowanie powiodły się i teraz istniejemy legalnie Na redaktora organu Koła matematyczno-fizycznego obrano L. Zarzeckiego. Po ulegalizowaniu odbyło się posiedzenie ogólne Koła, na którem obrano Zarząd, a także oznaczono warunki przyjęcia nowych członków i obowiązki rzeczywistych.

Członkiem Koła, jak głosi Ustawa, może być każdy, kto się interesuje sprawą nauczania przedmiotów fizyko-matematycznych. Członek obowiązany jest brać w jakikolwiek sposób czynny udział w sprawach Koła, wnosić ustanowioną opłatę roczną 6 rubli (jednorazowo lub

---

[1]) Prócz wspomnianych książek wyszedł z druku „Zbiór zadań arytmetycznych" na klasę wstępną i pierwszą, członka Koła A. Dąbrowskiego. Zbiór był przejrzany uprzednio przez dwóch członków Koła, którzy zdali na ogólnem posiedzeniu szczegółową relacyę. Książka niczem szczególnem się nie wyróżnia, nie należy jednakże do podręczników słabych. Żal, że autor nie nadmienił w przedmowie, że książka jego jest aprobowana przez Koło.

Digitized by Google

ratami), przyczem pisma, wychodzące przy Kole, odbiera bezpłatnie. Raz na rok, około świąt Bożego Narodzenia, Koło urządza ogólny zjazd wszystkich członków, na którym wybierany jest nowy Zarząd Koła na przeciąg jednego roku. Obecny Zarząd ma jednakże funkcyonować do końca 1907-go roku.

W skład Zarządu weszły następujące osoby: S. Dickstein—prezes; Z. Straszewicz—wiceprezes; R. Korniłowicz i L. Zarzecki—sekretarze; Z. Tyszka—skarbnik; J. Szczepański[1]) — bibliotekarz.

Biblioteka Koła składa się już z 200 blizko tomów dzieł naukowych w szerszym zakresie i podręczników szkolnych w przeróżnych językach, a także kilkunastu roczników pisma. „Zeitschrift für mathematiskhen und naturwissenschaftlichen Unterricht“ i kilku innych.

Kancelarya Koła mieści się w lokalu T-wa „Urania“, Bracka 18.

L. Zarzecki.

---

[1]) Z powodu wyjazdu p. Szczepańskiego do Płocka na stanowisko dyrektora tamtejszego gimnazyum polskiego, obowiązki bibliotekarza pełni obecnie członek Koła G. Zawadzki.

Digitized by Google

Lista członków Koła matematyczno-fizycznego w dniu 1-ym października 1906 r. [1]

1. Arlitewicz Ziemowit, Warszawa, Wróbla 12.
2. Banachiewicz Tadeusz, Warszawa, Marszałkowska 77.
3. Berkman Michał, Skierniewice.
4. Białowiejski Maksymiljan, Warszawa, Złota 30.
5. Barchwic Cezary, Warszawa, Krucza 19.
6. Bouffałł Stanisław, Warszawa, Marszałkowska 47.
7. Cier Stefan, Warszawa, Marszałkowska 43.
8. Czerwiński Eugeniusz, Warszawa, Al. Jerozolimska 35.
9. Czubalski Władysław, Warszawa, św. Barbary 8.
10. Dal Trozzo Jan, Warszawa, Mokotowska 47.
11. Danielewicz Bolesław, Warszawa, Krakowskie - Przedmieście (Tow. „Przezorność").
12. Dąbrowski Andrzej, Siedlce (inspektor Szkoły klasycznej).
13. Dickstein Samuel, Warszawa. Marszałkowska 117.
14. Gabszewicz Zygmunt, Warszawa, Ztota 38.
15. Gniazdowski Wacłnw, Warszawa, Mokotowska 72.
16. Gosiewski Władysław, Warszawa, Ordynacka 10.
17. Grabowski Jan (wyjechał zagranicę).
18. Grabowski Kazimierz, Warszawa, Nowogrodzka 11.
19. Juraszyński Jan, Warszawa, Aleksandrya 3.
20. Heilpern Maksymilian, Warszawa, Chmielna 24.
21. Kalinowski Stanisław, Warszawa, Górna 8.
22. Koralewski Kazimierz, Warszawa, Wspólna 63*b*.
23. Korniłowicz Rafał, Warszawa, Nowogrodzka 12.

---

[1]) W chwili oddania numeru pod prasę liczba członków znacznie się zwiększyła. Listę nowych członków podamy w numerze następnym.

Digitized by Google

24. Kozłowski Wiktor, Warszawa, Smolna 19.
25. Kramsztyk Stanisław, Warszawa, Jerozolimska 72*a*.
26. Księżopolski Władysław, Warszawa, Prosta 14.
27. Kwietniewski Stefan, Siedlce.
28. Lubliński Władysław, Warszawa, Sosnowa 1.
29. Niklewski Tomasz, Warszawa, Prosta 12.
30. Pożarysk i Mieczysław, Warszawa, Mokotowska 6.
31. Renkawek Bolesław, Warszawa, Hortensya 1.
32. Sawicki Władysław, Warszawa, Kapucyńska 5.
33. Sierpiński Wacław, Warszawa, Marszałkowska 73.
34. Służewski Ksawery, Lublin.
35. Smosarski Władysław, Warszawa, Nowogrodzka 15.
36. Srebrny Stanisław, Warszawa, Sienna 22.
37. Świętochowski Tomasz, Warszawa, Prosta 14.
38. Szczepański Józef, Płock.
39. Stattlerówna Helena, Warszawa, Wilcza 24.
40. Straszewicz Zygmunt, Warszawa, Koszykowa 7.
41. Thieme Aleksander, Warszawa, Wspólna 58.
42 Tosio Kacper, Warszawa, Marszałkowska 33.
43. Tyszka Zygmunt, Warszawa, Sosnowa 14.
44. Ujejski Karol, Warszawa, Żórawia 19.
45. Włodarski Włodzimierz, Ujazdowska 39.
46. Zarzecki Lucyan, Warszawa, Kaliksta 21.
47. Zawadzki Grzegorz, Warszawa, Kaliksta 21.
48. Zydler Jan, Warszawa, Wilcza 40.

Digitized by Google

MISCELLANEA MATEMATYCZNE.

1. Jedno twierdzenie o czworokącie i wnioski z niego.

Niech będzie $ABCD$ czworokąt dowolny wypukły, niezupełny, którego boki AB, BC, CD, DA oznaczmy odpowiednio przez a, b, c, d, a przekątne AC i BD, przecinające się pod kątem $BOC = \varphi < \frac{\pi}{2}$ w punkcie O, przez p_1 i p_2.

Z $\Delta\Delta$-ów AOB, BOC, COD, COA mamy:

$$a^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + 2 \,.\, AO \,.\, BO \,.\, \cos\varphi\,,$$

$$b^2 = \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 - 2BO \,.\, CO \,.\, \cos\varphi\,,$$

$$c^2 = \overline{CO}^2 + \overline{DO}^2 + 2 \,.\, CO \,.\, DO \,.\, \cos\varphi\,,$$

$$d^2 = DO^2 + AO^2 - 2DO \,.\, AO \cos\varphi\,.$$

Stąd, pomnożywszy równość drugą i czwartą przez -1 i dodawszy wszystkie, otrzymamy:

$$(1) \qquad a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2AC \,.\, BD \cos\varphi = 4P \operatorname{cotg}\varphi.$$

P—pole danego czworokąta. Jeżeli $\varphi > \frac{\pi}{2}$, to $b^2 - a^2 + d^2 - c^2 > 0$; jeżeli $\varphi = \frac{\pi}{2}$, to $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Z równości (1) wypada: $a^2 - b^2 + c^2 + d^2 = 2p_1p_2 \cos\varphi$, skąd, gdy czworokąt daje się opisać na kole, t. j. gdy $a + c = b + d$, dostajemy: $2p_1p_2 \cos\varphi = (a+c)^2 - 2ac + (b+d)^2 - 2bd = 2(bd - ac)$ czyli:

$$(2) \qquad bd - ac = p_1p_2 \cos\varphi\,.$$

Digitized by Google

Z tego widocznem jest, że dla takiego czworokąta w przypadku $\varphi = \frac{\pi}{2}$ istnieje równość:

(3) $$ac = bd.$$

Wrazie, gdy $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ i $ac = bd$ albo $a \pm c = b \pm d$ i $ac = bd$, to czworokąt tym warunkom zadosyć czyniący musi być deltoidem, a w przypadku szczególnym — rombem.

Dla czworokąta $ABCD$ wpisanego w koło, gdzie np. $\angle DAB + \angle DCB = \pi$, opierając się tylko na tem, oznaczywszy kąty DAB i ABC odpowiednio przez α i β, możemy otrzymać prócz (1) jeszcze następujące równości:

$$4F \operatorname{cotg} \alpha = a^2 + d^2 - b^2 - c^2 \text{ i } 4P \operatorname{ctg} \beta = a^2 + b^2 - c^2 - d^2.$$

Dla tegoż czworokąta z (1) dostajemy: $(a+c)^2 - (b-d)^2 = 4p_1p_2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$. $(b+d)^2 - (a-c)^2 = 4p_1p^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$. Jeżeli czworokąt daje się jednocześnie wpisać i opisać na kole, to, uwzględniwszy (2), a także $ac + bd = p_1p_2$, mamy:

(4) $$\begin{cases} ac = p_1 p_2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \\ bd = p_1 p_2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \end{cases}$$

Równości te przepisać można w ten sposób:

(5) $$\begin{cases} ac = P \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}, \\ bd = P \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}. \end{cases}$$

Stąd, pomnożywszy jednę równość przez drugą, otrzymujemy:

(6) $$P^2 = abcd \quad \text{czyli} \quad P = \sqrt{abcd}.$$

Jeżeli jednocześnie $ac = bd$, to czworokąt jest deltoidem, przyczem, gdy $p_1 > p_2$, $\angle ABC = \angle CDA = \frac{\pi}{2}$.

Digitized by Google

2. O niektórych własnościach równania $ax+by=c$, gdzie a i b są liczby wzajemnie pierwsze, a przytem łącznie z c — całkowite i dodatnie.

Będziemy mówili o pierwiastkach całkowitych i dodatnich pomienionego równania, włączając w nie 0.

Twierdzenie 1. Gdy równanie $ax+by=c$, zadośćczyniące powyżej nadmienionym warunkom, wcale niema pierwiastków całkowitych i dodatnich, koniecznem jest, by $c<ab$.

Dow. Równanie przepisać można tak:

$$x=\frac{c-by}{a}.$$

Wiadomo, że śród liczb 0, 1, 2, ..., $a-1$ istnieje zawsze jedna i tylko jedna taka, która nam daje jednę z wartości na y, zadośćczyniących równaniu powyższemu. Ponieważ równanie to nie może mieć pierwiastków całkowitych i dodatnich, więc jeżeli y przyjmuje wartość $a_k<a$, ale >0, to $c-ba_k<0$, a więc tembardziej $c-ab<0$, czyli:

$$c<ab. \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Twierdzenie 2. Jeżeli w równaniu powyższem: $ax+by=c$ wyraz wolny $c=nab$, gdzie n jest liczbą całkowitą i dodatnią, to dane równanie posiada $n+1$ pierwiastków całkowitych i dodatnich.

Dow. Z równania $ax+by=nab$ wypada:

$$x=\frac{nab-by}{a}.$$

Łatwo widzieć, że, dając na y wszystkie wartości liczebne z szeregu $0, a, 2a, \ldots, na$, dostaniemy na x też wartości całkowite i dodatnie. Tych wartości na x i y jest $n+1$. Więcej ich być nie może. Rzeczywiście niech $y=ka+m$, gdzie $m<a$, k jedna z liczb szeregu $0, 1, y, \ldots, n$ (mowa o pierwiastkach dodatnich). Wtedy $x=\frac{(n-k)ab-bm}{a}$

Digitized by Google

lecz licznik tego ułamku przez a dzielić się nie może, gdyż b i m są liczby pierwsze względem a, $(n-k)ab$ przez a się dzieli. Tym sposobem równanie ma zawsze $n+1$ pierwiastków i tylko $n+1$.

Twierdzenie 3. Jeżeli w równaniu powyższem c zadośćczyni nierównościom: $(n-1)ab \leqq c < nab$, to równanie ma albo n, albo $n-1$ pierwiastków całkowitych i dodatnich.

Dow. Ponieważ, jak to wypada z twierdzenia (1), równanie ma przynajmniej jeden pierwiastek całkowity i dadatni, np. x_0 i y_0, to wszystkie inne pierwiastki tego równania, jak wiadomo, dostać możemy ze wzorów: $x = x_0 \pm bt$, $y = y_0 \mp at$. Z drugiej strony z danego warunku na c mamy:

$$n-1 \leqq \frac{c}{ab} < n, \quad \text{czyli} \quad n-1 \leqq \frac{ax_0+by_0}{ab} < n,$$

albo:

$$(1) \qquad n-1 \leqq \frac{x_0}{b} + \frac{y_0}{a} < n.$$

Jezeli x i y mają być liczbami całkowitemi i dodatniemi, to $x_0 \pm bt > 0$ i $y_0 \mp at > 0$. Wybierając jedną parę odpowiadających sobie znaków (to samo można powtórzyć, uwzględniwszy drugą), dostajemy $t > -\frac{x_0}{b} < 0$ i $t < \frac{y_0}{a} > 0$. Prócz pary pierwiastków x_0 i y_0 równanie może mieć jeszcze tyle par pierwiastków całkowitych i dodatnich ile razy t może przyjmować wartość liczebną całkowitą pomiędzy granicami: $-\frac{x_0}{b}$ i $\frac{y_0}{a}$, lecz, jak wskazuje warunek (1) takich wartości, nie uwzględniając 0, może być albo $n-1$, albo $n-2$. To pierwsze będzie wtedy, gdy:

$$E\left(\frac{x_0}{b} + \frac{y_0}{a}\right) = E\left(\frac{x_0}{b}\right) + E\left(\frac{y_0}{a}\right),$$

drugie, gdy

$$E\left(\frac{x_0}{b} + \frac{y_0}{a}\right) > E\left(\frac{x_0}{b} + E\left(\frac{y_0}{a}\right),$$

czyli:

$$E\left(\frac{x_0}{b} + \frac{y_0}{a}\right) = E\left(\frac{x_0}{b}\right) + E\left(\frac{y_0}{a}\right) + 1.$$

Digitized by Google

Stąd wypada, że pierwiastków równanie może mieć albo n, albo $n-1$, co b. d. o.

Wszystkie powyższe własności równania $ax+by=c$ można zilustrować graficznie w ten sposób, że na osiach odciętych i rzędnych w kierunku dodatnim od początku układu odetniemy szereg odcinków odpowiednio równych 1, 2, 3 i t. d. jednostkom przyjętym długości. Przez punkty podziału poprowadzimy proste równoległe do osi, przez co utworzy się sieć, w której każdy punkt przecięcia powyższych prostych będzie miał spółrzędne całkowite i dodatnie w kącie pierwszym, o który głównie nam chodzi. Równanie $ax+by=c$ przedstawia w tym razie prostą, przecinającą osi w kącie pierwszym tak, że odcinki na osiach są odpowiednio równe $\frac{c}{a}$ i $\frac{c}{b}$.

Nie będziemy tutaj bliżej wchodzili w szczegóły, nadmienimy tylko, że wszystkie proste, przechodzące przez początek układu i przez odpowiednie wyżej wzmiankowane punkty sieci, są nachylone do osi X pod kątami, których styczne przyjmują wszelkie wartości wymierne liczebne, zawarte pomiędzy 0 i ∞, które dają się ułożyć w tabliczkę tego rodzaju, że z niej odrazu można widzieć przy pomocy ilustracyi geometrycznej, że mnogość tych liczb jest odliczalna, jak mówi Cantor (abzählbare Menge).

L. Z.

Digitized by Google

SPRAWOZDANIA Z LITERATURY. — RECENZYE. BIBLIOGRAFIA.

H. Weber und **J. Wellstein**. Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende von ..... Theil I: Elementare Algebra und Analysis. Lipsk. Theil II. Elementare Geometrie. Lipsk 1905.

Dzieło to, którego dwa pierwsze tomy mamy przed sobą, jest wybitnem zjawiskiem nietylko w literaturze niemieckiej, skądinąd obfitującej w dzieła oryginalne i wytrawnem piórem pisane. Autorem piarwszego tomu jest znany matematyk niemiecki, profesor strasburskiego uniwersytetu, H. Weber. Tom ten podzielony jest na trzy części, w których autor na początku traktuje o podstawach Arytmetyki, potem o Algebrze, nareszcie o elementarnych podstawach Analizy. Każdy z tych działów jest nadzwyczaj treściwie i nieraz bardzo abstrakcyjnie napisany, przez co czytanie wymaga głębszego zastanowienia i może nastręczać czytelnikowi, pewne trudności. Nie należy jednakże zrażać się temi trudnościami, gdyż wysiłek sowicie będzie wynagrodzony. Autor po mistrzowsku wiąże oddzielne, luźnie niby stojące, działy nauki, i gdzie się ku temu nastręcza sposobność, wprowadza pojęcia szersze, właściwie, jak dotąd, do Matematyki elementarnej nie należące, a także z filozofią nauki związane. W pierwszym dziale ciekawa jest i wielce pouczająca nauka o mnogościach i metodą Dedekinda traktowane pojęcie o liczbie niewymiernej. Autor przesuwa przed oczami czytelnika obraz rozwoju pojęcia liczby, jako wolnego tworu ducha ludzkiego w ścisłym związku na początku z pojęciem mnogości, a później funkcyi w ele-

Digitized by Google

mentarnem tego słowa znaczeniu. Mamy tu naukę o potęgowaniu i logarytmowaniu, o równaniach piewszego i drugiego stopnia z jedną niewiadomą i związaną z temi ostatniemi teoryą liczb urojonych. Rachunek przybliżony, teorya mierzenia, gdzie autor wypowiada kilka głębokich uwag, w dziele tem są też odpowiednio uwzględnione. Od statyki liczb autor przechodzi do dynamiki, mówiąc obszernie o zestawieniach i kombinacyach, przyczem znajdujemy tu z pewnem zdziwieniem jedno z kardynalnych pojęć nowoczesnej Matematyki, pojęcie grupy. Są to t. zw. grupy permutacyjne. Autor, zdaniem naszem, pomimo swych zastrzeżeń we Wstępie, że należy raczej pogłębić treść Matematyki elementarnej, a nie wzbogacać jej pojęciami wyższej, bardzo szczęśliwie wprowadził ten nowy a wielce w następstwa płodny element myśli matematycznej. W zupełności należy się zgodzić z Poincarém, który mówi w swej „Science et l'hypothèse", że pojęcie grupy jest jednem z najpierwotniejszych pojęć. Dla czegoż by nie można było przy wykładzie już nauki o wielokątach foremnych nie wspomnieć o grupie cyklicznej $(1, S, S^2, \ldots, S^{n-1})$? Borel, w „Geometryi", z której w najbliższym czasie damy szczegółowsze sprawozdanie, wprowadza pojęcie grupy obrotów wielościanów i należy przyznać, pomimo wszystkiego, że takie dynamiczne traktowanie przedmiotu z jednej strony wielce wzbogaca i rozwija fantazyę geometryczną uczącego się, z drugiej ożywia i pobudza myśl jego. W dziale drugim, gdzie autor traktuje o Algebrze, zamiast liczby, występuje już funkcya algebraiczna całkowita. Mamy tu naukę o zasadniczych właściwościach tej funkcyi, równania nieoznaczone pierwszego i drugiego stopnia, i wielce, że tak powiemy, dowcipnie traktowaną rzecz z analitycznej teoryi liczb. Przy rozwiązaniu równania 4-go stopnia autor też mówi o szczególnym przypadku powyżej wspomnianych grup (związanych z imieniem Galois'a). Mamy tu też sposoby przybliżonego obliczania pierwiastków równania liczebnego i, na zakończenie, naukę o podziale koła i twierdzenie Abela o równaniach 5-go stopnia. W ostatnim dziale znajdujemy naukę o szeregach różnego rodzaju, o funkcyach wykładniczej i trygonometrycznych, nieskończonych i skończonych, i nakoniec, dowód przestępności liczb e i π. Czytelnik widzi, jak bogatą jest zawartość tej książki i jaką masę materyału na stosunkowo niewielkiej liczbie stronic (432, nie licząc dodatków) autor zdołał rozwinąć. Książka zawiera wiele bardzo dobrze obmyślanych

Digitized by Google

rzeczy i byłoby bardzo pożądane, gdyby się znalazł kto chętny i, ponieważ nie mamy całkowitego przekładu książki, rozwinął, może nawet trochę spopularyzował niektóre, mało u nas popularne rzeczy, jak np. naukę o podziale koła, o przestępności liczb π i e, o grupach permutacyjnych i t. p. Nie wymagałoby to wielkiego pracy nakładu, a byłoby wielce pożytecznem. Nie możemy swoją drogą nie wypowiedzieć żalu co do tego, że w tej książce, pomimo bogactwa treści, zestrzeżeń autora na wstępie, tytułu książki, nie znaleźliśmy kwestyi, które nauczyciela Matematyki wielce interesować mogą, jak np. o równaniach z ilościami pierwiastkowemi, o układach równań 2 go stopnia. nauki o równaniach wogóle i t. p.

Tom drugi nie ustępuje w niczem pierwszemu, ani w poważnem traktowaniu rzeczy, ani w bogactwie treści. Pięknym poprostu i wielce pożytecznym można nazwać rozdział, zatytułowany: Grundlagen der Geometrie. Rozdział ten zawiera bardzo dużo ciekawych myśli, które nietylko pedagoga lub człowieka nauki czystej interesować mogą. Autor nieraz robi wycieczki w dziedzinę filozofii. P. Wellstein myśli, że Geometrya, jak Wenus z piany morskiej, z życiowego powstała doświadczenia. Powołuje się — dość zresztą słaby ten argument— na historyę i widzi w niej dowody swych myśli. Doświadczenie daje surowy materyał, oddzielne fakty spostrzeżenia, tu niema jeszcze nauki. Nauka, nauka względna, nasza, ludzka, wyrasta, gdy tego materyału dotknie myśl człowieka, gdy przeniesie go z sobą do Platońskiego nieba, w świat idej niemal dowolnych, logicznie jednak powiązanych za pomocą pewnych stałych praw myśli. Autor nie waha się twierdzić, że pewniki i postulaty Geometryi są empirycznego pochodzenia, że są tylko, mówiąc słowami Kleina, wyidealizowaniem surowego materyału faktu. Bez wątpienia, stanowisko autora pod względem filozoficznym podlegać może wielu zarzutom bardzo poważnym, chociaż autor nieraz kantystom zdecydowanym porządny wymierza cios i sam twierdzi, że sprawa nad wyraz jest trudna, że znaleść należy nam, istotom ograniczonego pola widzenia, zamieszkującym maleńki kącik wszechświata, jakieś stanowisko, wyższe nad spółczesne poglądy i pojęcia. Przy tem wszystkiem autor bardzo umiejętnie wyłuszcza i rozwija przed czytelnikiem niektóre ważne kwestye zasadnicze. Do takich kwestyj należy np. stanowisko wobec pewników o przystawaniu

Digitized by Google

(Congruenzaxiome). Tutaj autor dowodzi konieczności uwolnienia się od pojęcia ruchu, które jest zbyt skomplikowane i ciemne, by można je było w podstawowych, wolnych od grubego empiryzmu, kwestyach wprowadzać. Pojęcie to autor radzi zastąpić przez t. zw. „immanentną konstrukcyę“, t. j. przez wyznaczanie pewnego odcinka, kąta lub wogóle pewnej figury w innem miejscu płaszczyzny lub przestrzeni. Konstrukcya ta idealna, bez materyalnych przyrządów wykonywana w myśli, może dać z jednej strony definicyę przystawania wolną od pojęcia ruchu, zadośćczyniącą jednakże zasadniczym założeniom, jakie w pojęciu przystawania, jak dowodzi Hilbert, są pochodnemi pojęcia ruchu. Tą „imnanentną konstrukcyę“, przy przypuszczeniu istnienia wszelkich punktów i linij płaszczyzny w znaczeniu danych, jest znana, przez Steinera podana metoda, opierająca się na istnieniu danego stałego koła. Tak samo, jak tu, autor wykazuje względność pojęcia przystawania w ścisłej nauce, tak w wykładzie dalszym rozwija Plückerowskie myśli o względności przyjętych elementów przestrzeniowych: punktu, prostej i płaszczyzny. Autor rozpatruje eliptyczne, paraboliczne i hyperboliczne skupienia kół i kul, i z jednej strony na tym dowcipnie wybranym przykładzie uzmysławia cechy trzech rodzajów Geometryi: euklidesowej i 2-ch nieeuklidesowych, a z drugiej, dowolnie wybierając elementy, wskazuje, że każdorazowo można zbudować odpowiednią Geometryę, w której spełniać się będą te same zasadnicze prawa myśli. Autor, co prawda, obraca się tylko w świecie Geometryi inwersyjnej, ale w każdym razie trudno byłoby wybrać przykład tak wszechstronnie, że tak powiemy, dobry i odpowiednich trudności w elementarnym wykładzie nie nastręczający. Zwróciwszy uwagę na różnego rodzaju pewniki, przez Hilberta postawione, jako to: połączenia, uporządkowania, przystawania, równoległości i zupełności, autor dalej, opierając się na 2-ch pierwszych grupach, buduje zasady Geometryi t. zw. rzutowej. Potem przechodzi do niektórych kwestyj Planimetryi zwykłej i rozwija niektóre zasadnicze pojęcia, jako to: równoległości, równoważności, podobieństwa i t. p. Jest tu też ciekawe traktowanie problematu Apolloniusza. Dalsze rozdziały 2-go tomu napisane są przez innych autorów. Trygonometrya płaska i Geometrya analityczna, łącznie ze Stereometrya, napisane są przez H. Webera, a trygonometrya sferyczna przez Jacobsthala, który też w Geometryi analitycznej napisał pewien

Digitized by Google

rozdział: analityczną Geometryę sferyczną. Nie będziemy tu bliżej wchodzili w więcej szczegółowe rozpatrywanie tych działów, powiemy tylko, że są opracowane według najnowszych poglądów, bardzo treściwo i pouczająco.

W ogóle książka należy do tych, które trzeba studyować, które mogą dać rzeczywiste pogłębienie wiedzy. Swoją drogą musimy podkreślić, że przedmowa do pierwszego tomu nie zupełnie odpowiada treści dzieła, zawiera ona bowiem dużo rzeczy z Matematyki wyższej. Zresztą granice pomiędzy wyższem a niższem są wogóle niewyraźne. a w Matematyce tak samo. Teraz, gdy poważne rozlegają się głosy o wprowadzenie elementów Rachunków dotąd wyższych do szkoły średniej, granica ta stała się jeszcze mniej wyraźną, i chociaż wielki respekt mamy dla powyższego dzieła, nie możemy się jednakże powstrzymać od zdania, że dużo rzeczy, szczególniej w tomie drugim, możnaby było zastąpić nieco obszerniejszem traktowaniem kwestyj, z elementarną Matematyką więcej bezpośrednio związanych, a dla nauczyciela ważnych, jak np.: o podstawach Geometryi w historycznem traktowaniu, a nie li tylko według myśli jednego autora, książka bowiem jest encyklopedyą. Nie widzimy też powodu, dlaczego tak dużo się mówi o Trygonometryi sferycznej, chociaż traktowanie to jest oryginalne i ciekawe.

Nauczyciel Matematyki, dla którego właściwie dzieło to jest napisane, ma prawo oczekiwać od autorów więcej szczegółowego i objektywnego traktowania rzeczy, jego obchodzących i jemu potrzebnych. Encyklopedya nie może nas odsyłać po krótkie nawet wiadomości do innych dzieł, np. do Cantora „Geschichte der Mathematik“, jak to robią autorowie, powinna sama tych rzeczy udzielić, a także nie opuszczać takich kwestyj, która, jak np. nowa geometrya trójkąta, należy w podstawach swoich do Geometryi elementarnej, i nawet „Repertoryum“ Pascala, pomimo ogromu materyału ją uwzględnia. Książka do tanich nie należy i wiela błędów drukarskich, jak większość książek niemieckich, nie zawiera. Niektóre błędy już są przez cenzurę niemiecką zauważone i poprawione. Pomimo wszystko, usilnie rekomendujemy czytelnikom naszym bliższe zapoznanie się z tęm dziełem.

L. Z.

Digitized by Google

Józef Szczepański. „Kurs uzupełniający Matematyki elementarnej i początkiAnalizy wyższej,“ ułożył..... Podręcznik dla wyższych klas szkół średnich i dla samouków. Z zapomogi Kasy pomocy dla osób, pracujących na polu naukowem im. Dr. med. Józefa Mianowskiego. Warszawa. skład główny w księgarni E. Wende i S-ka. 1906. 8-o, str. 452. Cena rb. 1 kop. 50,

Książka ta — czytamy w przedmowie — powstała w celu zadośćuczynia podwójnej potrzebie: 1-o, powiązania przy rekapitulacyi kursu Matematyki w jednolitą całość dorywczych pojęć, nabywanych w różnym wieku uczniów i w różnych stadyach wykładu; 2-o, uprzystępnienia wychowańcom szkół średnich pojęć i zasad Analizy wyższej.

Że potrzeby, o jakich mówi Autor, istnieją w rzeczy samej i domagają się zadośćuczynienia odpowiednio do zadań szkoły średniej ogólnokształcącej, dowodzą żywo dyskusye, prówadzone w tym przedmiocie w kompetentnych kołach uczonych i pedagogów zagranicą, a także rozprawy, prowadzone w roku ubiegłym w naszem „Kole matematyczno-fizycznem“, które sprawie tej i samemu podręcznikowi p. Szczepańskiego, będącemu jeszcze wówczas w rękopisie, poświęciło kilka interesujących posiedzeń. Sam autor brał żywy udział w tych rozprawach i pozostanie jego zasługą, że przekonaniu swemu o potrzebie uzupełnienia kursu Matematyki szkolnej początkami Analizy wyższej potrafił szybko dać wyraz, wydając dzieło, przy pomocy którego matematycy-pedagogowie będą mieli możność wypróbowania i ocenienia doniosłości tego rozszerzenia zakresu nauki Matematyki elementarnej.

Zanim damy szczegółowy rozbiór, pragniemy w tej wzmiance tymczasowej podać przynajmniej treść książki do wiadomości członków naszych i szerszych kół, interesujących się sprawą nauczania Matematyki.

Autor podzielił książkę swą na dwie części, odpowiadające dwom celom, wskazanym w przedmowie. Otóż Część I-sza, mająca wyjaśnić, ustalić i usystematyzować pojęcia zasadnicze z Arytmetyki i Algebry, wykładane uczniom w ciągu kursu szkolnego, nosi tytuł: „Liczby i działania zasadnicze“ i składa się z sześciu rozdziałów: 1. Prawa zasadnicze działań na liczbach (§§ 1—12); 2. Stopniowe uogólnienie pojęcia liczby (§§ 13—24); 3. Uogólnione pojęcia o działaniach matema-

Digitized by Google

tycznych (§§ 25—42). 4. Geometryczne odwzorowanie liczb wymiernych i niewymiernych (§§ 43—63); 5. Liczby urojone i zespolone (§§ 64—88); 6. Ciągłość (§§ 89—95).

Część II-ga poświęcona jest drugiemu z dwóch wzmiankowanych zadań i p.t. „Początki Analizy wyższej", ma stanowić niejako kurs tych początków, do szkoły średniej przystosowany. Dzieli się ona na dwa działy. Pierwszy p. t. „Wiadomości zasadnicze z teoryj funkcyj i równań" w trzech rozdziałach: 1. O funkcyach (§§ 1—3); 2. Funkcye i równania algebraiczne 3-go stopnia (§§ 4—25); 3. Funkcye i równania algebraiczne 4-go stopnia (§§ 26—38). Dział drugi o nagłówku: „Początki rachunków nieskończonostkowych" składa się z ośmiu rozdziałów. 1. Teorya granic (§§ 39—55); 2. Teorya nieskończonostek (§§ 56—67); 3. Pojęcia oparte na teoryi granic (§§ 76—95); 5. Różniczkowanie funkcyj (§§ 96—115); 6. Rozwijanie funkcyj na szereg (§§ 116—131); 7. Odwrotne zadanie Analizy matematycznej (§§ 132—143); 8. Teorya zadania o największości lub najmniejszości (§§ 144-175).

Już sama obfita treść oraz cena wielce przystępna tej książki powinny jej zjednać wielu nabywców, zwłaszcza wśród osób, pragnących obznajmić się z elementami Analizy wyższej oraz wśród nauczycieli Matematyki, którzy zapewne zechcą podzielić się z „Kołem matematyczno-fizycznem" spostrzeżeniami, jakie nasunęło im czytanie i ewentualne stosowanie w szkole podręcznika p. Szczepańskiego. *D.*

Z CZASOPISM.

Szkoła polska № 16 i 17 z d. 15 września, № 18 z d. 18 października b. r. 1906.

W № 16 i 17 str. 537—547, № 18 str. 607—613 artykuł pana A. R. p. t. „Nauczanie Matematyki" poświęcony jest przedstawieniu zapoczątkowanej przez inżyniera i matematyka angielskiego J. Perry'ego reformy nauczania Matematyki, polegającej na szerokiem uwzględnieniu strony praktycznej. W № 16 i 17 znajdujemy oceny następujących podręczników: M. Feldbluma „Algebry elementarnej" przez S. Srebrnego; A. Dąbrowskiego „Zbioru zadań arytmetycznych" i Z. Kuźbickiego „Zbioru zadań arytmetycznych na liczby wielorakie" przez L. Zarzeckiego; w № 18 ocenę „Kursu Geometryi" Jana del Trozzo, przez L. Zarzeckiego.

Digitized by Google

Wiestnik opytnoj Fizyki i elementarnoj matiematyki № 421. Efremowa O cewianach, przecinających się w jednym punkcie trójkąta. O metodzie słownej (razgowornyj metod) w Algebrze. Kronika, drobiazgi matematyczne i zadania.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaflichen Unterricht. 37 Jahrg, 6 Heft, 1906. Reformvorschläge für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Zweiter Theil von A. Gutzmer in Hallea S.

Periodico di matematica per l'insegnamento secondario. Anno XXII. Fasc. 1. A. L. Andreini. Rozwiązanie trygonometryczne zadania ogólnego o zegarach słonecznych płaskich. A. Padoa, O twierdzeniu Cantora — Bernsteina—Peano. G. Bisconcini, Rozwiązanie wymierne równań nieoznaczonych typu $x_1^2+x_2^2+\ldots\ldots+x^2_n = x^2_{n+1}$. S. Composto, O przekształceniu pierwiastnika $\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}$. M. Cipolla, O funkcyach symetrycznych rozważań wspólnych kongruencyom według danego modułu pierwszego. T. S. Palmieri, O własności łącznościowej dodawania

---

NOWE KSIĄŻKI

Baranlecki M. A. Krótka Arytmetyka z wielu zadaniami, Część I. Liczby całkowite i wielorakie. Wydanie III. Cena 70 kop.

— Część II. Ułamki. Reguła trzech. Wydanie III. Cena 70 kop.

Berkman M. Początki Arytmetyki. Wydanie II. Cena 75 kop.

Dabrowski A, Zbiór zadań arytmetycznych na klasę wstępną i pierwszą. Liczby całkowite od 1000. Liczby wielorakie. Cena 50 kop.

Dickstein S. Arytmetyka w zadaniach w 3 ch częściach. Część I, Liczby całkowite. Wydanie III. Cena 60 kop.

— Część II. Ułamki, z rysunkami w tekście. Wydanie III poprawione i rozszerzone. Cena 60 kop.

— Część III. Stosunki, proporcyonalność, kwadraty, sześciany, zadania różne, Wydanie II. Cena 60 kop.

Jurewicz. Zbiór zadań arytmetycznych dla szkół początkowych ludowych i prywatnych. Ułożony stosownie do wymagań przedmiotów wykładanych w początkowych szkołach Ministerwum oświaty. Przełożył i uzupełnił miarami metrycznemi i polskiemi R. Janowski. Rok drugi. Nakład H. Janowskiej w Jętrzejowie 1906. 8-o. str.

Kuźbicki Z. Zbiór zadań arytmetycznych na liczby wielorakie. Miary polskie, ruskie i metryczne. Cena 50 kop.

Digitized by Google

Thomas S. Teorya Arytmetyki. Część II. Ułamki zwyczajne i dziesiętne (do zadań części III). Cena 50 kop.

— Zbiór zadań arytmetycznych. Część III Cena 50 kop.

Rudnicka Ant. Zbiór zadań arytmetycznych z krótkiemi wskazówkami metodycznemi. Rok I, Cena 15 kop.

Stattlerówwna Helena i Jędrzejewicz Janusz Zbiór zadań arytmetycznych w zakresie klasy III Cena 50 kop.

Sturcel R. i Łapiński H. Zbiór zadań i przykładów arytmetycznych, poprzedzony krótkim rysem teoryi Arytmetyki zasadniczej oraz tablicą miar i wag. Kurs I dwuletni dla szkół początkowych. Cena 80 k.

I. St. Bohuszewicz. Zbiór zadań arytmetycznych dla szkół średnich, podług M. A. Baranieckiego, S. Dicksteina, L. Wereszczagina i innych. Część I. Cena 80 kop.

— Część II i III. Cena 80 kop.

Apolinary Klonowski Zadania arytmetyczne z liczbami całkowitemi, podzielone na rodzaje z dołączeniem sposobu rozwiązania każdego rodzaju. Część I. Cena 90 kop.

— Część II. Ułamki. Cena 50 kop.

— Część III. Cena 60 kop.

C. Klobanowski. Skrót matematyki niższej, ułożony specyalnie kn poznaniu słownictwa matematycznego polskiego. Podręcznik dla składających egzaminy. Część I. Arytmetyka.

A. Okraszewski. Zbiór zadań arytmetycznych. Łódź-Warszawa. Nakładem księgarni Ludwika Fiszera. 1906. 8-o, str 136.

Z. Rzędkowski. Zbiór zadań arytmetycznych z pierwszemi najłatwiejszemi początkami. Część I, str. 87. Warszawa - Łódź. Nakładem L. Fiszera.

Tedhunter I. Algebra początkowa. Tłomaczył Wł. Kwietniewski. Wydanie II opracował i uzupełnił Stefan Kwietniewski, doktór filozofii, z rysunkami w tekście. Nakład Gebethnera i Wolffa, 1906, 8-o, str. 538. Cena 1 rb. 50 kop

Dr. M. Feldblum. Algebra elementarna. Warszawa-Łódź. Nakładem księgarni Ludwika Fiszera, 1906, 8-o, str. 500 [1]).

Zydler J. Geometrya w zakresie szkoły średniej. Część I. Planimetrya, 8-o str. 184. Część II. Stereometrya, str. 87. Warszawa, 1906. Nakładem i drukiem M. Arcta.

Faifefer A. prof. Pierwsze początki Geometryi. Przetłómaczył z włoskiego Wł. Kwietniewski, Wyd. II przejrzane i poprawione przez L. Z. Warszawa, 1906. 8 o, str. XII, 141. Nakład Gebethnera i Wolfa. Cena 1 rb.

Badowski H. Geometrya elementarna. Wyd. nowe (dotąd wyszedł zeszyt 1 8-o, str. 126).

Dal Trozzo J. Kurs Geometryi dla szkół średnich i przemysłowych. Część I. Planimetrya. Warszawa. 1906, str 92. Cena kop. 61.

A. J. Stodółkiewicz. Wykład Trygonometryi prostokreślnej. Płock, 8 o str. 74. druk K. Miecznikowskiego. Cena 1 rb.

---

[1]) Ocenę tej książki podamy w następnym numerze „Sprawozdań".

Digitized by Google

Szczepański Józef. Kurs uzupełniający Matematyki elementarnej i początki Analizy wyższej. Podręcznik dla wyższych klas szkół średnich i dla samouków. Z zapomogi kasy pomocy im. J. Mianowskiego. Warszawa, 1906, 8-o, str. 452. Cena 1 rb. 50 kop. (p. w. str. 17).

Sperzyński Kazwery. Nauka Fizyki (skrócona).

— Fizyka w dziedzinie życia powszedniego, podług A. Sprockhoffa. Cena kop. 45.

— Fizyka do użytku szkół średnich z uwzględnieniem handlowych i technicznych, podług Karstena i Kleibera, opracował....., kand. nauk przyr., nauczyciel szkół handlowych i technicznych. Książka objaśniona 437 rysunkami. Warszawa. Nakładem i drukiem M. Arcta, 1906. 8-o, str. 440. Cena rb. 2

Streusand B. Zbiór zadań arytmetycznych dla szkół początkowych. Część I. Nakład i własność Jana Fiszera. 16-ka, str. 126.

Tablice matematyczno-fizyczne. ułożył A. W. Witkowski, profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego. Nakład redakcyi „Wiadomości matematycznych". Warszawa, 1904, 8-o, str. 158. Cena rb. 1 kop. 50 (w kartonie rb. 1 kop. 65).

Tablice te obejmują następujące działy: I. Matematyka. Logarytmy 4-cyfrowe liczb od 100 do 1109; logarytmy 4-cyfrowe funkcyj goniometrycznych; logarytmy 5-cyfrowe liczb od 1000 do 10009; logarytmy 7-cyfrowe liczb od 1000 do 110009; logarytmy funkcyi wykładniczej; logarytmy naturalne; logarytmy 5-cyfrowe funkcyj goniometrycznych w odstępach 0,01 stopnia; tablice pomocnicze do obliczania logarytmów kątów od 0^0 do 5^0 i od 85^0 do 90^0, styczne goniometryczne, zamiana stopni i godzin na minuty i sekundy, zamiana stopni łuków i godzin, łuki, cięciwy i strzałki, liczba π, jej wielokrotności, powierzchnia koła i kuli. kwadraty i sześciany liczb, logarytmy całki algebraicznej, funkcye Bessela, funkcye kuliste, całka prawdopodobieństwa, logarytmy spółczynników w rozwinięciach na szeregi. II. Fizyka i Kosmografia: Miary długości, pól. objętości i pojemności, ciężaru i masy, natężenie ciężkości, miary dynamiczne, gęstość, sprężystość, wytrzymałość, ściśliwość, redukcya barometru, niwelacya barometryczna, tarcie, prędkość głosu, wysokość tonów, skale temperatury, rozszerzalność, prężność, jednostki ciepła i równoważnik dynamiczny, ciepło właściwe, temperatury topnienia i wrzenia i t, d., stan krytyczny, rozpuszczalność przewodnictwo, dyfuzya, ciężary atomowe, włoskowatość, ciepło reakcyj chemicznych i t. d., długość fal świetlnych, widma emisyjne, spółczynniki załamania i t. d., wymiary wielkości elektrycznych i magnetycznych, tablice miar elektrycznych i magnetycznych i t. d., magnetyzm ziemski, Ziemia, Słońce, Księżyc, Planety i t. d. Szerokość i długość geograficzna.

O książce tej napisał Wł. Folkierski (Wiad. matem t. 8 zesz. III): „Radzibyśmy, żeby te Tablice matematyczne znalazły się na każdym stoliku inżyniera, budowniczego, geometry, we wszystkich biurach rachunkowych, w każdym gabinecie przyrodnika i aby dla swej jasności w użyciu, a głównie dla wartości naukowej swych zestawień z ostatnich wyników wiedzy zastąpiły z korzyścią zagraniczne wydania tego rodzaju".

Digitized by Google

Zadania do rozwiązania.

1. Zbudować trójkąt mając bok jeden, środkową tego boku i odległość środkowej danej od ortocentru.

2. W trójkącie ABC, gdzie $c^2 = ab$, dwusieczna kąta spotyka bok AB w punkcie D, a koło na trójkącie opisane w punkcie E. Z punktu C promieniem $= c$ zakreślamy koło, spotykające poprzednie w punkcie G i H, a prostą AB w punkcie F, a także na bokach AC i OB od punktu C odcinamy odcinki CI i CK odpowiednio rowne CB i CA. Dowieść, że:

1) Punkty G, D i H leżą na jednej prostej;

2) Punkty I, F, E, H leżą na kole, którego promień równy jest promieniowi koła, opisanego na trójkącie danym, a środek leży na wysokości (z wierzchołka C poprowadzonej) lub na jej przedłużeniu.

3. W prostokącie $ABCD$ boki AB i BC mają długości, wyrażone odpowiednio liczbami a i b całkowitemi i wzajemnie pierwszemi, Boki te podzielono odpowiednio na a i b równych części i przez punkty podziału poprowadzono równoległe do boków prostokąta. Dowieść, że przekątna prostokąta nie może przejść prócz A, B, C i D przez żaden inny punkt przecięcia się tych prostych.

4. W kole o promieniu r poprowadzono sześć równych kół stycznych wewnętrznie do poprzedniego i przechodzących przez O. Niech koła te będą: O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6. Pary kół: O_1, O_2; O_2, O_3; O_3, O_4; O_4, O_5; O_5, O_6; O_6, O_1 przecinają się odpowiednio w punktach A, B, C, D, E i F prócz wspólnego punktu O i każde z tych kół dotyka koła O w punktach odpowiednio: A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1.

Digitized by Google

Dowieść, że:

1-o. Koła zakreślone na trójkątach: AOD, BOE, COF przecinają się w jednym punkcie jeszcze prócz punktu O.

2-o. Koła zakreślone na trójkątach A_1OF_1, F_1OE_1, E_1OD_1, D_1OC_1, C_1OB_1, B_1OA_1 przecinają się parami w trzech punktach, które razem z O leżą na jednym okręgu (mianowicie koła zakreślone na A_1OF_1 i D_1OC_1, na F_1OE_1 i BOC_1 i t. d.).

5. Dowieść, że prosta dana przez równanie: $Ax + By = C$, gdzie $A^2 + B^2 = C^2$, jest zawsze na odległości od początku układu $= \pm 1$, i naodwrót. *L. Z.*

Digitized by Google

Digitized by Google

„WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE“

wychodzą zeszytami w ilości 4 do 6 zeszytów rocznie, z których każdy składa się z 2—4 arkuszy druku, i obejmują:

---

1. Artykuły ze wszystkich działów matematyki czystej i stosowanej z mechaniki, fizyki, chemii, astronomii, geodezyi, geofizyki, meteorologii i t. p.
2. Artykuły z teoryi ubezpieczeń na życie i od nieszczęśliwych wypadków.
3. Artykuły z historyi nauk ścisłych.
4. Życiorysy uczonych i wynalazców.
5. Opisy obserwatoryów, pracowni fizycznych i chemicznych, instytutów naukowych i t. p.
6. Posiedzenia towarzystw naukowych, kongresów i t. p.
7. Kronika. Nowości z dziedziny nauk matematycznych i fizycznych
8. Krytyka. Rozbiory dzieł i bibliografia.
9. Przegląd prasy peryodycznej naukowej.
10. Zagadnienia i ich rozwiązania.
11. Korespondencya (w granicach programu).
12. Ogłoszenia.
13. Ilustracye, portrety, rysunki i t. p.

Przedpłata roczna wynosi: w Warszawie 3 ruble; w innych miejscowościach z przesyłką rs. 3 kop. 60.

Prenumeratę przyjmuje księgarnia Gebethnera i Wolffa w Warszawie, Krakowskie Przedmieście № 15.

Adres Redakcyi „Wiadomości matematycznych“: **Warszawa, Marszałkowska Nr. 117.**

Digitized by Google

DZIEŁA MATEMATYCZNE

WYDANE

z zapomogi Kasy pomocy dla osób pracujących na polu naukowem

im. D-ra Józefa Mianowskiego

do nabycia we wszystkich księgarniach.

A. BIBLIOTEKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNA,

wydawana pod redakcyą

M. A. Baranieckiego i A. Czajewicza.

Serya I tom II i III. Kramsztyk S. Wiadomości początkowe z fizyki Książeczka I, wydanie drugie str. XII. 105, drzeworytów 61. Cena w oprawie kop. 40. Książeczka II, wydanie drugie str. XI. 171, drzeworytów 77. Cena w oprawie kop. 65.

Serya I tom IV. Witkowski A. W. Wiadomości początkowe z geografii fizycznej i meteorologii. Warszawa 1884 w 12-ce str. X. 108, drzeworytów 22, lit 4. Cena w oprawie kop. 25.

Serya III tom V. Baraniecki M. A. Początkowy wykład syntetyczny własności przecięć stożkowych, na podstawie ich pokrewieństwa harmonicznego z kołem. Warszawa 1885 w 8-ce str. XVI. 151, drzeworytów 63 Cena kop. 40.

Serya III tom VI. Czajewicz A. Trygonometrya płaska i kulista. Warszawa 1891 w 8-ce str. XX, 389, drzeworytów 86. Cena rb. 2.

Serya III tom VIII. Witkowski August. Zasady fizyki. Tom. I. Warszawa 1892 w 8-ce str. X. 469. Cena rb. 2.

Serya IV tom II Sochocki J. Rozwiązywanie równań liczebnych. Warszawa 1884 w 8-ce lex. str. XII, 212. Cena kop. 60.

Serya IV tom IV. Zajączkowski Wł. Geometrya analityczna. Warszawa 1884 w 8-ce lex. str. XL. 411, drzeworytów 85. Cena rb. 1.

Serya IV tom X. Franke J. N. Mechanika teoretyczna. Warszawa 1889 w 8-ce str. XXXI. 645, drzeworytów 72. Cena rb. 3.

B. DZIEŁA I ROZPRAWY MATEMATYCZNO-FIZYCZNE,

wydawane przez

A. Czajewicza i S. Dicksteina.

I. Badowski I. Geometrya elementarna. Warszawa 1894. LVIII. 338 drzeworytów w tekście IX. 344. Cena rb. 1 kop. 35.

II. Baraniecki M. A. Arytmetyka, wykład szczegółowy, wydanie drugie znacznie zmienione. Warszawa 1894, str. LXIV. 408. Cena rb. 1.35.

III. Danielewicz A. B. Podstawy matematyczne ubezpieczeń życiowych. Warszawa 1896, str. 335. Tablic X. Cena rb. 2.

IV. Witkowski August. Zasady Fizyki. Tom II zeszyt pierwszy. Warszawa 1897 w 8-ce str. 301. Cena rb. 1 kop. 35.

V. Kowalczyk J. O sposobach obliczania przeszkód biegu ciał niebieskich. Warszawa 1901, str. 624. Tablic III. Cena rb. 7 kop. 50.

VI. Schur F. Podręcznik geometryi analitycznej, przekład z niemieckiego przez T. Łopuszańskiego. Warszawa 1901, str. 249 z licznemi rysunkami w tekście. Cena rb. 1.

VII. Feldblum M. Geometrya wykreślna. Warszawa. 1902. str. XVI, 325 z 172 rysunkami w tekście. Cena rb. 2.

VIII. Danielewicz A. B. Metoda najmniejszych kwadratów. Warszawa 1904, str. XII, str. XII, 186. Tablic IV. Cena rb. 1 kop. 20.

IX. Witkowski August. Zasady Fizyki. Tom II, zeszyt drugi. Warszawa 1904. Cena rb. 1 kop. 35.

X. Folkierski Wł. Zasady Rachunku różniczkowego całkowego. Wydanie II. Tom I. Warszawa 1904. Cena rb. 2 kop 40.

XI. Witkowski August. Zasady Fizyki. Tom I, wydanie drugie. Warszawa 1904. Cena rb. 2.

XII. Merczyng K. Teorya prądu elektrycznego. Warszawa 1905, 8-o, str. 62. Cena 75 kop.

Digitized by Google

WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE.

Digitized by Google

Digitized by Google

WIADOMOŚCI
MATEMATYCZNE.

Redaktor i Wydawca

S. DICKSTEIN.

TOM XI.

WARSZAWA.
Druk Józefa Sikorskiego, Warecka Nr. 14.

1907.

Digitized by Google

HARVARD COLLEGE LIBRARY
SEP 13 1911
CAMBRIDGE, MASS.

Prof. W. F. Osgood

Digitized by Google

Treść tomu XI. — Table des matières du tome XI.

Str.

H10,T. H. Merczyng. Równanie różniczkowe Fouriera $\frac{\partial V}{\partial t} = A\Delta^2 V$ w zastosowaniu do poznania zjawisk natury (Geofizyka, Elektryczność, Dyfuzya, Ruch).

Équation différentielle de Fourier $\frac{\partial V}{\partial t} = A\Delta^2 V$ et son application à la connaissance des phénomènes naturels (Géophysique, Electricité, Diffusion, Mouvement) . 1—23

S. W. Smosarski. Prace M. Margulesa o wahaniach peryodycznych ciśnienia barometrycznego. (Ciąg dalszy i dok.)

Les travaux de M. Margules sur les oscillations périodiques de la pression barométrique (Suite et fin) . 23—59

K20f,E. G. Cesàro. Nowa metoda wyprowadzenia wzorów Trygonometryi kulistej (przełożył W. Bóbr).

Nouvelle méthode pour l'établissement des formules de la Trigonométrie sphérique (traduit par. M. W. Bóbr) 61—76

J2a. W. Sierpiński. O pewnym przypadku błędnego stosowania zasady mnożenia prawdopodobieństwa.

Sur un cas d'une application erronée du principe de multiplication des probabilités . . . . . 77—80

V9. J Kowalczyk. Krótki rys dziejów Obserwatoryum Warszawskiego 1820—1900.

Aperçu historique sur l'Observatoire astronomique à Varsovie 1820—1900 . . . . . 81—103

V9,10. W. Gorczyński. O organizacyi sieci meteorologicznych na wyspach Wielkiej Brytanii wraz z Irlandyą i w koloniach angielskich.

Sur l'organisation des réseaux météorologiques de la Grande Bretagne et Irlande et dans les colonies britanniques 105—163

Digitized by Google

V10. R. Merecki. Stacya Centralna Meteorologiczna przy Muzeum Przemysłu i Rolnictwa w Warszawie, rok 1906.
Station Centrale Météorologique du Musée d'Industrie et d'Agriculture à Varsovie. Année 1906 . . . 165—188
V9,10. Wł. Gorczyński. Samuel Pierpont Langley . . 189—194
H11b. W. Sierpiński. Wzór analityczny na pewną funkcyę liczbową.
Une formule analytique pour une fonction numérique . 225—231
T7. M. Wolfke. Elektron uważany jako środek ciśnień w eterze.
L'eléctron considéré comme un centre des pressions dans l'éther . . . . . 234—245
I2b. A. Łaparewicz. Cecha podzielności Lucasa.
Le caractère de divisibilité donné par Lucas . . 247—256
I2b. A. Łaparewicz. Gaston Tarry. Tablettes des cotes relatives à la base 20580 des facteurs premiers etc. . . 257—263
V10. Wł. Gorczyński. Wiadomość o sieci meteorologicznej serbskiej i o obserwatoryum w Belgradzie . . .
Notice sur le réseau météorologique de la Servie et sur l'Observatoire de Belgrade . . . . . 265—269

PRZEGLĄD LITERATURY .— BIBLIOGRAFIA.
ANALYSES ET COMPTES RENDUS. — BIBLIOGRAPHIE.

Lad. Gorczyński. Sur la marche annuelle de l'intensité de rayonnement solaire à Varsovie et sur la théorie des appareils employés . . . . . 195—199
Wł. Gosiewski. Zasady Rachunku prawdopodobieństwa . . 199—200
Journal of the Meteorological Society of Japon, Tokio 1906. . 200—201
Rapporto annuale dello R. Osservatorio Astronomico e meteorologico di Trieste . . . . . 201—202
Bibliotheca mathematica 8_3 zesz. 4-y . . . . . 173—275
Sitzungsberichte der Königl. Preussischen Akademie der Wissenschaften 1906 zesz. XXVII—XXIX . . . . . 275—278

KRONIKA. — CHRONIQUE.

Akademia Umiejętności w Krakowie . . . . . 202—208
X-y Zjazd przyrodników i lekarzy polskich we Lwowie . . . 278—285
Zapisy na cele naukowe . . . . . 285—286

DODATEK (z osobną paginacyą). — SUPPLÉMENT.

Sprawozdania z posiedzeń Koła matematyczno-fizycznego w Warszawie. Rok 1906/7.
Comptes rendus des séances du Cercle mathématique et physique à Varsovie. Année 1906/7.

Digitized by Google

Posiedzenie d. 17 listopada 1906. Séance du 17 novembre 1906. 25—27
Posiedzenie d. 29 grudnia 1906. Séance du 29 décembre 1906 . 28
Lista członków, Ciąg dalszy. Liste des membres, Suite . . 29, 72
Kwestyonaryusz Koła matematyczno-fizycznego.
Le questionnaire du Cercle mathematique et physique. 30—31
J1,Va. B. Danielewicz. O wykładzie ilości niewymiernych w szkole średniej.
Sur la théorie des quantités irrationnelles dans l'enseignement secondaire . . . . . 33—38
T5,6,7;Vaν. A. Pożaryski. O nauce elektryczności i magnetyzmu w szkołach średnich.
L'èlectricité et le magnétisme dans l'enseignement secondaire . . . . . 39—43
J25 T. Banachiewicz. Parę uwag o szeregach harmonicznych.
Quelques remarques sur les séries harmoniques . 44—48
Posiedzenie dnia 26 stycznia 1907. Séanse du 26 janvier 1907.
„ „ 26 lutego „ „ „ 26 février „
„ „ 23 marca „ „ „ 23 mars „
„ „ 27 kwietnia „ „ „ 27 avril „
„ „ 25 maja „ „ „ 25 mai „
„ „ 15 czerwca „ „ „ 15 juin „ 55—70
V910. M. Heilpern. Stanisław Kramsztyk. Wspomnienie pośmiertne. — Notice nécrologique . . . . 73—80
Vaγ. Z. Czubalski. (A. Laisant: „L'initiation mathématique) 81—87
I11. W. Sierpiński. O rozkładach liczb całkowitych na różnicę dwóch kwadratów.
Sur les décompositions des nombres entiers en une différence de deux carrés . . . . . 87—110
I11. S. Guzel. Dowód elementarny pewnego twierdzenia z analitycznej teoryi liczb.
Démonstration élémentaire d'un théorème de la théorie analytique des nombres . . . . . 111—119
MISCELLANEA. . . . . 7—11, 48—58

SPRAWOZDANIA Z LITERATURY. RECENZYE. BIBLIOGRAFIA.

A. J. Stodółkiewicz. Wykład Trygonometryi prostokreślnej (G. Zawadzki) . . . . . 57—39
E. Borel. Géométrie. Premier et second cycle (L. Zarzecki) . 59—61
M. Stuyvaert. Les nombres positifs. — Exposé des théories modernes de l'Arithmétique élémentaire (S. Dickstein) 61—62
M. Feldblum. Algebra elementarna (S. Kwietniewski) . ~~131—135~~ 121-125

Digitized by Google

Digitized by Google

9347
Lci 925.
HARVARD COLLEGE
MAY 15 1913
LIBRARY.
J. A. Lowell fund
(XI, 1-4; XIII, 1-6)

WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE.

Pages 211-224?

Redaktor i Wydawca

S. DICKSTEIN.

TOM XI.

Zeszyt 1—2—3—4.

WARSZAWA.
Druk Józefa Sikorskiego, Warecka Nr. 14.

1907.

Digitized by Google

Treść Zeszytu.

H.10.T. H. Merczyng. Równanie różniczkowe Fouriera $\frac{\partial V}{\partial t} = A\Delta^2 V$ w zastosowaniu do poznania zjawisk natury (Geofizyka, Elektryczność Dyfuzya, Ruch).

Équation différentielle de Fourier $\frac{\partial V}{\partial t} = A\Delta^2 V$ et son application â la connaissance des phénomènes naturels (Géophysiques, Electricité, Diffusion, Mouvement) . . 1—23

S. W. Smosarski. Prace M. Margulesa o wahaniach peryodycznych ciśnienia barometrycznego. (Ciąg dalszy i dok.)

Les travaux de M. Margules sur les oscillations périodique de la pression barométrique (Suite et fin) . 23—59

K.20.f.E. E Cesàro. Nowa metoda wyprowadzenia wzorów Trygonometryi kulistej (przełożył W Bóbr).

Nouvelle méthode pour l'etablissement des formules de la Trigonométrie sphérique (traduit par. M. W. Bóbr) 61—76

J.2.a. W. Sierpiński. O pewnym przypadku błędnego stosowania zasady mnożenia prawdopodobieństwa.

Sur un cas d'une application erronée du principe de multiplication des probabilités . . . . . 77—80

V.9. J. Kowalczyk. Krótki rys dziejów Obserwatoryum Warszawskiego 1820—1900.

Aperçu historique sur l'Observatoire astronomique à Varsovie 1820—1900 . . . . . 81—103

V.9.10. W. Gorczyński. O organizacyi sieci meteorologicznych na wyspach Wielkiej Brytanii wraz z Irlandyą i w koloniach angielskich.

Sur l'organisation des réseaux météorologiques de la Grande Bretagne et Irlande et dans les colonies britanniques 105—163

V.10. R. Merecki. Stacya Centralna Meteorologiczna przy Muzeum Przemysłu i Rolnictwa w Warszawie, rok 1906.

Station Centrale Météorologique du Musée d'Industrie et d'Agriculture à Varsovie. Année 1906 . . . 165—188

V.9.10. Wł. Gorczyński. Samuel Pierpont Langley . . 189—194

Przegląd literatury. Bibliografia
(Analyses et Comptes rendus. Bibliographie).

Lad. Gorczyński. Sur la marche annuelle de l'intensité de rayonnement solaire à Varsovie et sur la théorie des appareils employés . . . . . 195—199

Wł. Gosiewski. Zasady rachunku prawdopodobieństwa . . 199—200

Journal of the Meteorological Society of Japon, Tokio 1906. . 200—201

Rapporto annuale dello R. Osservatorio Astronomico e meteorologico di Trieste . . . . . 201—202

Dalszy ciąg na stronie 3-ej.

Digitized by Google

H. MERCZYNG.

RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE FOURIERA

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A \,.\, \Delta^2 V.$$

$$\left(\text{i w przypadku szczególnym } \frac{\partial V}{\partial t} = A \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right),$$

w zastosowaniu do poznania zjawisk Natury (Geofizyka, Elektryczność, Dyfuzya, Ruch).

Znaczenie niezmierne, jakie mają metody badania matematycznego dla poznania zjawisk Natury, szczególnie w dziedzinie Fizyki (i naturalnie Astronomii, a w ostatnich czasach i Chemii), nie podlega zaprzeczeniu. Była jednak w dziejach rozwoju Fizyki długa epoka, gdzie, dzięki nieszczęśliwemu podziałowi tej umiejętności na doświadczalną i matematyczną, przyjętemu sztucznie we Francyi, a potem i gdzieindziej, wywody matematyczne stały się dziedziną pracy tylko jednej grupy badaczy, którzy jednocześnie atoli zapominali często o doświadczalnych podstawach swych studyów i tworzyli czasem teorye, może piękne abstrakcyjnie, ale nie zawsze zgodne z rzeczywistością. Z drugiej strony t. zw. Fizyka „doświadczalna", oparta prawie wyłącznie na elementarnych środkach Analizy, nie mogła czynić wielkich postępów [1].

[1]) Naturalnie nie mamy tu na widoku większego lub mniejszego zamiłowania jednych badaczy do studyów teoretycznych, a drugich do doświadczalnych, lecz tylko ten, należący już do przeszłości, stan nauki, gdzie wolno było pracować nad Fizyką, nie znając Matematyki, w skutek czego w Niemczech długi czas teorye Maxwella nie miały rozpowszechnienia, bo wielu fizyków, dla braku wykształcenia matematycznego, po prostu ich nie rozumiało. Por. zresztą wyborną przedmowę Helmholtza do niemieckiego tłómaczenia „Filozofii Natury" Thomsona i Taita 1868 r

Digitized by Google

Stan ten dziś należy już do przeszłości. Od pół wieku, dzięki usiłowaniom szkoły fizyków angielskich, na czele których stali J. Cl. Maxwell i lord Kelvin, sztuczny ten podział upadł; związek między teoryą i doświadczeniem jest zupełny tak na kontynencie całym, jak i w Anglii, gdzie obecnie wśród wielu innych błyszczy imię J. J. Thomsona.

Równanie, rozpatrzeniu którego poświęcamy tę pracę, jest żywą ilustracyą wspomnianego faktu historycznego. Wyprowadzone dla zjawisk przewodnictwa cieplnego jeszcze w początkach XIX w. przez analityka francuskiego Fouriera, który zarazem wskazał sposoby jego rozwiązania, zostało ono dopiero w kilkadziesiąt lat później zastosowane przez lorda Kelvina do zbadania bardzo różnych zjawisk Fizyki — nawet w dziedzinie przewodnictwa cieplnego, dla którego je Fourier ustanowił. Kelvin (wówczas jeszcze sir William Thomson) zastosował je do zbadania termicznego stanu ziemi w dawnych epokach, a następnie do całego szeregu innych zjawisk, jak to: przenoszenia się stanu elektrycznego w kablach podmorskich, przenikania prądów zmiennych w głąb przewodników, dyfuzyi w płynach, ruchu gazów i płynów lepkich i t. d.

Ta wielka różnolitość kwestyj, do rozwiązania których kluczem staje się równanie Fouriera, skłania nas do zebrania w jednę całość tych wywodów, przyczem przedewszystkiem postaramy się fizycznie uzasadnić je dla każdej kategoryi zjawisk, następnie zaś dać możliwie uproszczoną drogą jego rozwiązanie matematyczne i, nakoniec, wracając znów na grunt fizyczny, zilustrować rozwiązanie w każdej kategoryi zjawisk. W części elektrycznej skorzystamy z przykładów, zawartych w naszej „Teoryi prądu“ [1], co zaś do Geofizyki, to postaramy się szczegółowiej rozwinąć przykład podany przez Kelvina (określenie wieku Ziemi), gdyż jakkolwiek dziś, dzięki doświadczeniom Strutta nad zawartością radu w bazaltach i granitach, powstaje nowa teorya, iż ciepło wewnętrzne zawdzięcza Ziemia radowi [2], to jednak

[1]) Wydanie Kasy im. Mianowskiego, Warszawa 1905.

[2]) Cfr. Proceedings of the Royal Society of London, za maj 1906 r.

Digitized by Google

określenie Kelvina nie utraciło jeszcze swego znaczenia, tem więcej, iż trudno dostępne w swym wykładzie dla geologów jest bardzo mało przez nich w swem uzasadnieniu matematycznem znane [1].

I. Uzasadnienie równania dla podległych mu kategoryi zjawisk.

Szczegółowe wyprowadzenie równania Fouriera w różnych przypadkach jego stosowania mogłoby być tylko wykładem odpowiednich rozdziałów Fizyki, co naturalnie byłoby tutaj zbytecznem, tem więcej, że w obydwóch przypadkach zastosowania go w teoryi elektryczności, czytelnik łatwo je znajdzie np. w naszej „Teoryi prądu". Tu mieć będziemy jedynie na względzie wykład zupełnie ogólny, kierując się do jednego celu, by pokazać, jakim sposobem tak różnorodne zjawiska, a mianowicie:

I. Cieplne: 1) przewodnictwo;

II. Elektryczne: 2) prawo spadku potencyału w przewodniku, posiadającym pojemność; 3) przenikanie promieniowania zakłóceń elektrycznych w głąb przewodników;

III. Hydrodynamiczne: 4) rozszerzanie się ruchu w gazach i płynach lepkich;

IV. Fizyko - chemiczne: 5) rozpuszczanie się ciał stałych w płynnych i dyfuzya,

mogą być wyobrażone przez identyczne prawo matematyczne.

---

[1]) Literatura rozpatrywanego przaz nas przedmiotu, o ile w tym artykule zużytkowana została:

Fourier, Théorie analytique de la Chaleur, Paris 1822.

Kelvin and Tait, Treatise on Natural Philosophy, Part II, Cambridge 1903.

Sir W. Thomson, Compendium of the Fourier Mathematics etc., art. LXXII, i, On the Theory of the Electric Telegraph art. LXXIII w Mathematical and Physical Papers, v. II, wydanie Cambridge 1884.

Tenże. Papers vol. III, wyd. Londyn 1890, art. XCVIII: Five applications of Fouriers law of Diffusion.

Tenże. Popular lectures and adresses

J. W. Mellor, Higher mathematics for students of Chemistry and Physics.

Digitized by Google

Dla uproszczenia zagadnienia ograniczymy się tak w fizycznej, jak i matematycznej części niniejszego artykułu do równania

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A \frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

t. j. przyjmiemy, że funkcya V jest funkcyą tylko dwóch zmiennych niezależnych: czasu t, i jednej spółrzędnej x, od y zaś i z nie zależy, t. j. w określonej chwili ma jednakie znaczenie we wszystkich płaszczyznach równoległych do YZ. W takim razie oczywiście:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

i

$$\Delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

A jest wielkością stałą, zależną od fizycznych warunków zagadnienia.

Wyobraźmy sobie, iż pewien zmienny stan fizyczny z biegiem czasu spotykamy w różnych miejscach przestrzeni, przyczem dla uproszczenia zagadnienia, jakieśmy to już zrobili dla zagadnienia analitycznego, założymy, iż stan ten w danej chwili jest zawsze jednaki we wszystkich punktach każdej płaszczyzny, równoległej do YZ i zmienia się zatem tylko wzdłuż osi X. Dlatego, by zmiany owego stanu fizycznego mogły być dostrzegalne, musi istnieć pewien wskaźnik dostępny doświadczeniu, charakteryzujący ów stan i przezeń do działalności powołany. Niech funkcya V przedstawia nam odczytania owego wskaźnika, wtedy zgodnie z określeniem zmienności stanu fizycznego, wskaźnik V będzie funkcyą zmiennych t i x i nie będzie zależał od zmiennych y i z. Oczywiście dalej, zmiany stanu fizycznego będą miały nietylko skutek, dający się obserwować doświadczalnie i dający się przedstawić przez funkcyę V, lecz muszą mieć także i przyczynę. Niech przyczyna ta będzie przesunięciem wzdłuż osi X pewnego substratu (który w ogóle może być albo materyą, albo energją).

Digitized by Google

Im więcej w pewnej chwili i w pewnem miejscu x będzie owego substratu, tem więcej zmieni się stan fizyczny i zatem tem wyższe będą pokazania wskaźnika, a zatem i wartości funkcyi V, i odwrotnie. Tym sposobem pewien „prąd“ substratu wzdłuż X będzie wywoływał zmiany wartości V. Jeżeli zauważymy dwa punkty na osi X, określone przez spółrzędne x i $x+dx$, to wartości V w nich będą w ogóle V_x i V_{x+dx}. Tu mogą mieć miejsce dwa przypadki:

a) albo $V_x = V_{x+dx}$, wtedy stan fizyczny w obu punktach jest jednaki, a zatem niema wzdłuż X „prądu“ substratu wcale;

b) albo $V_x \neq V_{x+dx}$, wtedy stan się zmienia, a zatem prąd istnieje.

W tem ostatniem przypuszczeniu, które nas jedynie interesuje, wyobraźmy sobie, iż stała $\frac{1}{a}$ charakteryzuje o p o r n o ś ć materyi, zapełniającej przestrzeń, przeciw przejściu przez nią prądu, wywierającego zmiany naszego stanu fizycznego i odczytań wskaźnika V, lub, co jest to samo, a oznacza p r z e w o d n i c t w o materyi (na jednostkę przecięcia i na jednostkę długości).

Wtakim razie siła prądu substratu (czyli ilość jego, przechodząca przez jednostkę przecięcia w jednostkę czasu) będzie w miejscu x:

$$i_x = a\,\frac{V_{x+dx} - V_x}{\partial x} = a\,\frac{\partial V_x}{\partial x}\,, \tag{1}$$

w miejscu zaś $x+dx$:

$$i_{x+dx} = a\,\frac{\partial V_{x+dx}}{\partial x}\,.$$

Ponieważ zaś, jeśli V jest funkcyą ciągłą zmiennej x:

$$V_{x+dx} = V_x + dV_x\,,$$

więc:

$$i_{x+dx} = a\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}\right). \tag{2}$$

Różniczki wyższych rzędów możemy odrzucić.

Digitized by Google

Oczywiście wyrażenie (1) przedstawi nam także ilość substratu, która przepływa przez przecięcie jednostki, znajdujące się na odległości x od płaszczyzny YZ w jednostkę czasu, a wyrażenie (2) tę samą ilość dla przecięcia $x + dx$.

Obecnie mogą być dwa przypadki:

1) albo $i_x = i_{x+dx}$, wtedy wszystek substrat, przepływający przez x, wypływa z $x+dx$, t. j. między x i $x+dx$ nie pozostaje nic z substratu[1], chociaż prąd ciągle się utrzymuje. Wtedy musi być:

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \text{ czyli } \frac{\partial V}{\partial x} = \text{const} = c_1, \text{ albo } V = c_1 x + c_2,$$

t. j. odczytania wskaźnika, a zatem i stanu fizycznego przestrzeni w tym przypadku są proporcyonalne do oddalenia rozpatrywanego przecięcia od płaszczyzny YZ;

2) albo $i_x \neq i_{x+dx}$.

Wtedy przez x przypływa więcej, niż odpływa przez $x+dx$ i między płaszczyznami x i $x+dx$ zostaje część substratu, a mianowicie w każdą jednostkę czasu zostaje tu $i_{x+dx} - i_x = a \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, a przez element czasu dt ilość substratu: $a \,.\, dt \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$. Ta część substratu może albo wyciekać na zewnątrz—przypadku tego rozpatrywać nie będziemy; albo pozostaje stale między x i $x+dx$ i w takim razie zmienia stan fizyczny materyi między temi płaszczyznami. Ów stan fizyczny, jakeśmy założyli poprzednio zależy od ilości substratu.

Jeżeli teraz V było odczytanie wskaźnika przed procesem (w miejscu x), to obecnie V (w temże miejscu x), po upływie czasu dt wzrośnie o dV. Ponieważ jednak wzrost ten nie zależy od x, lecz tylko od t, więc:

$$(4) \qquad dV = \frac{\partial V}{\partial t} \,.\, dt.$$

---

[1]) Przypuszczamy, że substrat nie jest ściśliwy.

Digitized by Google

Jeżeli przez b nazwiemy stałą, charakteryzującą zachowanie się materyi, wobec znajdującego się w niej substratu, t. j. zmianę jej stanu fizycznego, to ilość substratu, która podniesie wskaźnik o dV, będzie bdV lub $b.\frac{\partial V}{\partial t}.dt$. Ta ilość będzie się równała ilości pozostałej między x i $x+dx$, czyli $adt\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$. Tym sposobem:

$$b\frac{\partial V}{\partial t}.dt = adt.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

lub

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{a}{b}.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = A\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \tag{5}$$

gdzie $A = \frac{a}{b}$.

Rozpatrzony przez nas proces fizyczny prowadzi zatem do równania Fouriera. Nietrudno będzie ogólne ramy powyższego roztrząsania podprowadzić pod rzeczywiste fakty fizyczne które się wyrażają powyższą zależnością.

Zjawiska przewodnictwa cieplnego. Tu „substratem" naszym będzie ciepło. Jego prąd, dzięki przewodnictwu wzdłuż osi X—przyczem wszystkie punkty leżące w dowolnej płaszczyźnie równoległej do YZ są zawsze jednakowo ogrzane—wywołuje podnoszenie się temperatury — ogrzewanie materyi. Funkcya V jest obecnie temperaturą, nasz wskaźnik termometrem. Jeżeli V jest wszędzie stałe, temperatura w całej przestrzeni jest jednakowa i niema wcale prądu cieplnego. Jeżeli zaś np. w sztabie równoległej do osi X, opartej o ogrzaną płaszczyznę YZ ciepło przepływa, to w różnych punktach sztaby temperatura jest proporcyonalna do odległości x od YZ, jeżeli sztaba tyleż ciepła, ile otrzymuje od YZ, oddaje na swym przeciwległym końcu. (Przypuszcza się, iż boczne ścianki sztaby są dla ciepła nieprzenikalne). W takim razie temperatury w określonem miejscu z biegiem czasu się nie zmieniają.

Jeżeli nakoniec temperatury sztaby rosną, to zachodzi zjawisko, przedstawione przez równanie Fouriera.

Digitized by Google

W tym przypadku a jest stałą przewodnictwa cieplnego, b stałą pojemności cieplnej materyału.

Zjawiska prądu elektrycznego. Jeżeli przewodnik równoległy do osi X połączymy ze źródłem różnicy potencyału w płaszczyźnie YZ, to substrat, wywołujący zmianę stanu elektrycznego, będzie elektrycznością, jego prąd — prądem elektrycznym, wskaźnik—elektrometrem, a funkcya V—potencyałem elektrycznym. Stała a będzie stałą przewodnictwa elektrycznego, b—pojemności elektrycznej.

Jeżeli koniec przewodnika będzie izolowany, to prąd zauważymy tylko w bardzo krótkim przeciągu czasu, póki przepływ elektryczności nie ustanowi wszędzie stałego potencyału, wtedy i prąd się przerwie. Jeżeli w czasie istnienia jeszcze prądu, przewodnik będzie miał pojemność elektryczną (jak kable elektryczne), wtedy stosuje się równanie Fouriera. Jeżeli zaś mamy do czynienia z przewodnikiem pozbawionym pojemności, wtedy póki trwa prąd, mamy spadek potencyału podług prawa linii prostej; znajduje tu zastosowanie zwykłe prawo Ohma[1].

Zjawiska promieniowania energii elektrycznej w przewodniku. Jak wiadomo, energja elektryczna rozchodzi się promieniście w przestrzeni. Jeżeli więc wyobrazimy sobie, iż w przewodniku kierunek[1] rozchodzenia się energii jest równoległy do X, zakłócenie zaś ma miejsce w płaszczyźnie YZ, to substratem będzie energia, wskaźnikiem—zakłócenie elektryczne, które wywoła w płaszczyznach równoległych do YZ prąd elektryczny. Stała a będzie—jak w poprzednim przypadku — przewodnictwem elektrycznem, stała zaś b będzie proporcyonalna do stałej charakteryzującej zdolność namagnesowywania ośrodka. Jeżeli zakłócenie elektryczne—prądy elektryczne są prostopadłe do X—jest jednakie dla wszystkich x, t. j. w całym przewodniku, wtedy niema

---

[1]) Przypadek zastosowania teoryi Fouriera do prądu elektrycznego znajdzie czytelnik w naszej „Teoryi prądu“ str. 22 - 28.

[1]) Prawa rozchodzenia się energii w izolatorze nie podlegają równaniu Fouriera, lecz równaniu falowania $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = B \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$,

Digitized by Google

prądu energii. Jeżeli jednak zakłócenie jest różne dla różnych x, to albo siła prądów — i zakłócenie — zmieni się podług prawa linii prostej względem x i wtedy prądy w danych płaszczyznach się nie zmieniają, i jednocześnie energia nie wydatkuje się po drodze na dalsze namagnesowywanie ośrodka, albo też to ostatnie ma miejsce i w takim razie wywołane pole magnetyczne w dalszym ciągu podnosi zakłócenie i t. d. [1].

Zjawiska rozszerzania się ruchu, zapoczątkowanego w lepkim płynie lub gazie.

Jeżeli np. w płynie lepkim zaczniemy wywoływać wirowanie płynu około pewnej osi, lub jeszcze lepiej w masie płynu lepkiego jedna równoległa warstwa otrzyma pewną określoną prędkość, to ruch po niejakim czasie udzieli się i warstwom głębiej, ewentualnie dalej położonym. Prędkość będzie teraz naszą funkcyą V, zagłębienie się w płyn kierunkiem prądu substratu, lepkość płynu będzie proporcyonalna do a, nakoniec b charakteryzować będzie sprężystość płynu i zmianę sił międzycząsteczkowych. Wszystkie poprzednie już rozpatrzone zjawiska dadzą się zastosować i tutaj.

Zjawisko dyfuzyi, np. rozpuszczanie się ciał stałych w płynach.

Jeżeli np. w szklance wody rozpuścimy na dnie kawałek cukru, to konsystencya cukru w wodzie będzie różna w różnych płaszczyznach poziomych i w różnym czasie. Substrat będzie teraz cukrem, jego podnoszenie się w roztworze—prądem, wskaźnik V—ilością cukru w różnych odległościach od dna. Jeżeli cukier pozostaje jeszcze częściowo między dwiema poziomemi płaszczyznami, to oczywiście zawartość w nich cukru rośnie. Spółczynnik a będzie tu prędkością dyfuzyi, spółczynnik b—własnością nasycania płynu cukrem.

---

[1]) Te procesy znajdzie czytelnik szczegółowo objaśnione w mej „Teoryi prądu“ str. 48—52. Stała b dla tego przypadku $= 4\pi\mu$, gdzie μ jest stała namagnesowywania przewodnika.

Digitized by Google

II. Całkowanie równania Fouriera.

Jak wiadomo, równania z pochodnemi cząstkowemi posiadają nieograniczoną liczbę funkcyj, które im zadosyć czynią. Dla tego dla zastosowań fizycznych jest koniecznem znaleść takie wyrażenia całki, które odpowiadają fizycznym warunkom zagadnienia.

Niech [1] szukaną całką naszego równania

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \tag{1}$$

będzie takie V, które odpowiada warunkom:

a) dla początku czasu $t=0$, $V=f(x)=$ pewnemu rozkładowi wartości V w całej rozpatrywanej przez nas masie;

b) dla $x=0$, t. j. dla punktów masy stykających się z płaszczyzną YZ jest $V=0$.

Fizycznie np. w przypadku prądu elektrycznego (II), warunki te odpowiadają temu, iż pierwotnie cały przewodnik ma pewien rozkład stały potencyału $V=f(x)$. W przypadku szczególnym możemy np. przypuścić, że cały przewodnik ma jednaki potencyał V_0, t. j. $f(x)=V_0$. W przypadku ostatnim, t. j. gdy w całe, masie przewodnika $V=V_0$, prądu w przewodniku niema—gdy zaś dla punktu $x=0$, uskutecznimy połączenie z ziemią (potencyał $V=0$), to oczywiście prąd zacznie wypływać z przewodnika do ziemi i prawa jego zmienności da nam szukana całka.

W przypadku ciepła warunki nasze oznaczać będą, iż masa materyalna była pierwotnie ogrzana do stałej temperatury V_0, a następnie wzdłuż całej płaszczyzny YZ utrzymywano temperaturę stale 0^0. Oczywiście, jeżeli $V_0>0$, ciepło także wypływać będzie z naszej masy i prawa tego wypływu da nam rozwiązanie.

---

[1]) Przy ogólnym biegu całkowania korzystamy ze wskazówek Mellora (Higher Mathematics). Dodajemy tylko pojedyńcze części w rachunku, by ułatwić jego czytanie, co może być niezupełnie jasne u Mellor. a

Digitized by Google

Z łatwością następnie przekonamy się, iż uzyskane tą drogą rezultaty mogą być zastosowane z małą zmianą i do wpływającego ciepła, elektryczności i t. d.

W ogóle łatwo znaleść funkcyę dowolną, zadość czyniącą równaniu (1). Jedną z takich funkcyi będzie oczywiście:

$$V = e^{\alpha x + \beta t}. \tag{2}$$

Podstawiając, otrzymamy:

$$\beta = A\alpha^2.$$

Czyli, jeżeli przyjmiemy $\alpha = \sqrt{-1}\,.\,\mu = i\mu$;

$$V = e^{i\mu x - A\mu^2 t}.$$

Podług Moivre'a zatem całką będzie także:

$$V = e^{-A\mu^2 t} \sin(\mu x), \tag{3}$$

i również:

$$V = e^{-A\mu^2 t} \cos(\mu x). \tag{4}$$

Para rozwiązań (3) i (4) daje nam drugą parę:

$$\begin{aligned} V &= e^{-A\mu^2 t} \sin(\mu x) \sin(\mu z), \\ V &= e^{-A\mu^2 t} \cos(\mu x) \cos(\mu z). \end{aligned} \tag{5}$$

gdzie z jest parametr zupełnie dowolny.

Ponieważ każde z wyrażeń (5) jest całką równania (1), więc i ich suma będzie także całką, t. j.:

$$V = e^{-A\mu^2 t} \cos\{\mu(z-x)\}. \tag{6}$$

Każda z funkcyj (2), (3), (4), (5) i (6) czyni zadość równaniu różniczkowemu (1).

Obecnie należy do rozwiązania wprowadzić zasadnicze warunki fizyczne. Na podstawie analitycznego prawa Fouriera funkcya dowolna $f(x)$ może być przedstawiona jako całka podwójna określona

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \cos\mu(z-x)\, dz. \tag{7}$$

Digitized by Google

o ile funkcya f odpowiada pewnym określonym warunkom (jest skończona, jednowartościowa, ma skończoną liczbę maximów i minimów i t. d.).

Ponieważ funkcya dostawy jest parzysta względem μ (t. j. przy zmianie znaku przy μ dostawa znaku nie zmienia), więc poprzednie wyrażenie przechodzi na:

$$(8) \qquad f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\cos\mu(z-x)\,dz\,.$$

Pomnożymy wyrażenie całki naszego równania (6) przez zupełnie dowolną funkcyę zmiennej niezależnej $f(z)$. Dowolność zresztą tej funkcyi określa się, jak zaraz zobaczymy, danym rozkładem funkcyi V w ciele przy $t=0$. Oczywiście, że tak wyrażenie:

$$(9) \qquad V = f(z)\,e^{-A\mu^2 t}\cos\mu(z-x),$$

jak i podwójna całka określona:

$$(10) \qquad V = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-A\mu^2 t} f(z)\cos\mu(z-x)\,dz,$$

będą czyniły zadość naszemu równaniu, t. j. będą jego całkami. Lecz w ostatniej formie podwójnej całki określonej możemy już uważać na spełnienie warunków fizycznych, którym całka odpowiadać powinna.

Wszystkie złożone manipulacye nad całką równania (1) były nam właśnie potrzebne dla tego. Rzeczywiście, podług warunków zadania, dla czasu $t=0$, całka powinna nam dać ten rozkład funkcyi V w masie rozpatrywanego ciała, jaki jest nam dany; w przypadku szczególnym może w całem ciele V być stałe. Gdy jednak $t=0$, całka (10) staje się identyczną z wyrażeniem (8), które podług F o u r i e r a może wyobrażać dowolną funkcyę $f(x)$. Jeżeli więc np. pierwotny rozkład funkcyi V w ciele jest taki, że V rośnie od zera proporcyonalnie do x, t. j. $V = f(x)$, przy $t = 0$ jest $V = Kx$, wtedy (10) da nam całkę naszego równania, jeżeli pod drugim znakiem całki zamiast $f(z)$ podstawimy Kz. Jeżeli V jest stałe dla początku czasów, to zamiast $f(z)$ podstawiamy tę

Digitized by Google

stałą i t. d. Słowem znaleźliśmy rozwiązanie, które da nam rezultat liczebny dla dowolnego początkowo rozkładu funkcyi V w ciele i dla tego V z (10) przyjmiemy za szukaną całkę. Dalsze działania będą nosiły już tylko wyłącznie charakter algebraiczny.

Wyobraźmy dalej, że funkcya $f(z)$ jest funkcyą nieparzystą, t. j. taką, że $f(-z) = -f(z)$ [1]. Podstawiając w (10) zamiast z wartość $(-z)$, mamy:

$$(11) \qquad V = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Au^2t} f(-z)\cos\mu(z+x)\,dz.$$

Określemy V z sumy wartości (10) i (11). Wtedy:

$$(12) \qquad V = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Au^2t} f(z)\sin\mu z \sin\mu x\,dz \text{ [2]}.$$

Ponieważ wstawa jest jak $f(z)$ funkcyą nieparzystą, więc iloczyn $f(z)\sin\mu z$ jest funkcyą parzystą, a dlatego, każdej wartości tej funkcyi odpowiadają d w i e równe wartości zmiennej niezależnej z, różniące się tylko znakiem. Wobec tego całkować względem z w drugiej całce można między krańcami O i $+\infty$, zamiast między $-\infty$ i $+\infty$, jeżeli rezultat pomnożymy przez 2. Będzie tedy

$$(13) \qquad V = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(z)\,dz \int_0^{+\infty} e^{-A\mu^2t}\sin\mu z \sin\mu x\,d\mu.$$

Zastępując $\sin\mu z \sin\mu x$ przez $\frac{1}{2}\{\cos\mu(z-x) - \cos\mu(z+x)\}$, mamy ostatecznie:

$$(14) \qquad V = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f(z)\,dz \int_0^{\infty} e^{-Au^2t}[\cos\mu(z-x) - \cos\mu(z+x)]\,d\mu.$$

---

[1]) W przypadku gdy dana nam dla rozkładu w masie funkcya $f(x)$ byłaby parzystą, to dalszy wywód uległby tylko formalnej zmianie, gdyż w (12) mielibyśmy, zamiast iloczynu dwóch w s t a w, iloczyn dwóch d o s t a w,

[2]) Wyrażenie (10) daje nam $f(z)[\cos\mu z\cos\mu x + \sin\mu z\sin\mu x]$, wyrażenie (11) daje $-f(z)[\cos\mu z\cos\mu x - \sin\mu z\sin\mu x]$, a ich suma $2f(z)\sin\mu z\sin\mu x$. Ponieważ po lewej stronie mamy także $2V$, więc otrzymujemy rezultat wyrażony w (12).

Digitized by Google

Przystąpmy do wyznaczenia tej całki podwójnej.

Oczywiście jest całka wewnętrzna różnicą dwóch całek typu:

$$R = \int_0^\infty e^{-p\mu^2} \cos \mu u \, d\mu, \tag{15}$$

gdzie $p = At$, $u = s - x$ dla jednej, i $u = z + x$ dla drugiej całki. Utwórzmy pochodną R względem u:

$$\frac{\partial R}{\partial u} = -\int_0^\infty \mu e^{-p\mu^2} \sin \mu u \, d\mu. \tag{16}$$

Podstawiamy $d(e^{-p\mu^2}) = -2p\mu e^{-p\mu^2} d\mu$ i wtedy będzie:

$$\int_0^\infty \mu e^{-p\mu^2} \sin \mu u \, d\mu = -\frac{1}{2p} \int_0^\infty d(e^{-p\mu^2}) . \sin \mu u$$

$$= -\frac{1}{2p} \left[\Big| e^{-p\mu^2} \sin \mu u - \int_0^\infty e^{-p\mu^2} d(\sin \mu u) \right]$$

$$= +\frac{u}{2p} \int_0^\infty e^{-p\mu^2} \cos \mu u \, d\mu = \frac{u}{2p} R.$$

Więc:

$$\frac{\partial R}{\partial u} = -\frac{u}{2p} R, \tag{17}$$

albo:

$$R = Ce^{-\frac{u^2}{4p}}, \tag{18}$$

gdzie C jest stałą całkowania. By wyznazyć C, przyjmiemy $u = 0$;

$$C = \int_0^\infty e^{-p\mu^2} d\mu, \tag{19}$$

Wiadomo jest z teoryi całek określonych (i funkcyi Γ), iż podobna całka równa się $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$. Więc:

Digitized by Google

(20) $$R = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}\, e^{-\frac{u^2}{4p}}.$$

Podstawiając całkę (20) w całkę (14), w obec (15), otrzymujemy:

(21) $$V = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(z)dz)\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{At}}\, e^{-\frac{(z-x)^2}{4At}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{At}}\, e^{-\frac{(z+x)^2}{4At}}\right]$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi At}}\int_0^\infty f(z)\,dz\left\{e^{-\frac{(z-x)^2}{4At}} - e^{-\frac{(z+x)^2}{4At}}\right\}.$$

Całka (21) jest szukaną całką naszego równania.

Wprowadzimy zmianę zmiennych niezależnych, a mianowicie przyjmiemy:

$$q_1 = \frac{z-x}{2\sqrt{At}} \text{ i } q_2 = \frac{z+x}{2\sqrt{At}}.$$

Wtedy:

22) $$dz = dq_1 \,.\, 2\sqrt{At} = dq_2\, 2\sqrt{At}\,.$$

Nowe granice dla q_1 i q_2 będą:

gdy $z = 0,\ q_1 = -\frac{x}{2\sqrt{At}},\ q_2 = +\frac{x}{2\sqrt{At}},$

gdy $z = \infty,\ q_1 = \infty,\ q_2 = \infty.$

Więc:

(23) $$V = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{-\frac{x}{2\sqrt{At}}}^{\infty} f(q_1.2\sqrt{At}+x)e^{-q_1^2}dq - \int_{+\frac{x}{2\sqrt{At}}}^{\infty} f(q_2.2\sqrt{At}-x)\,e^{-q_2^2}dq_2\right].$$

Jeżeli pierwotny (przy $t=0$) rozkład funkcyi V w masie ciała od x nie zależy (jest stały), to poprzednie rozwiązanie znacznie się upraszcza. Wtedy $f(q.2\sqrt{At}+x) = f(q.2\sqrt{At}-x) = V_0$, i także.:

$$\int_{-\frac{x}{2\sqrt{At}}}^{\infty} e^{-q_1^2}dq_1 - \int_{+\frac{x}{2\sqrt{At}}}^{\infty} e^{-q_2^2}dq_2 = \int_{-\frac{x}{2\sqrt{At}}}^{\frac{x}{2\sqrt{At}}} e^{-q^2}dq\,.$$

Digitized by Google

Wtedy:

$$V = \frac{V_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{At}}}^{+\frac{x}{2\sqrt{At}}} e^{-q^2} dq. \tag{24}$$

Lecz ponieważ e^{-q^2} jest funkcyą parzystą, więc:

$$\int_{-\frac{x}{2\sqrt{At}}}^{+\frac{x}{2\sqrt{At}}} e^{-q^2} dq = 2 \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{At}}} e^{-q^2} dq,$$

i ostatecznie całka nasza:

$$V = \frac{2V_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{At}}} e^{-q^2} dq. \tag{25}$$

Wyrażenie (25) jest ostatecznem rozwiązaniem równania Fouriera w naszym przypadku.

Nie trudno sprawdzić, iż odpowiada ono warunkom zadania:

przy $x=0$ jest $V=0$, t. j. w płaszczyźnie YZ niema żadnego zakłócenia, wskaźnik daje zero.

przy $t=0$, dla każdego $x \neq 0$, t. j. dla wszystkich punktów rozpatrywanej masy oprócz płaszczyzny YZ, całka przechodzi na całą $\int_0^\infty e^{-q^2} dq$, która, jak już wyżej wskazano, równa się $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. W obec tego dla $t=0$, $V=V_0$, t. j. i drugi warunek fizyczny jest spełniony.

Całka określona $\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{At}}} e^{-q^2} dq$ może być obliczona przez rozkład na szereg nieskończony. Obliczanie to wszakże jest bardzo zmudne. Ponieważ jednak ma ona duże znaczenie i w teoryi prawdopodobieństwa, więc obrachowano tablice jej wartości zależnie od

Digitized by Google

wartości górnego krańca. Tablice te, obrachowane przez Morgana, znajdzie czytelnik u Mellora[1] i u Thomsona[2].

Dają one wyrażenie całki $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^q e^{-q^2}dq$ w zależności od q.

Przytaczamy tu z nich parę wyjątków:

Dla $q=0{\cdot}0$	funkcya $=0{\cdot}0$			Dla $q=0{\cdot}73$	funkcya $=0{\cdot}70$		
„ „ 0·09	„ „ 0·10			„ „ 0·91	„ „ 0·80		
„ „ 0·18	„ „ 0·20			„ „ 1·16	„ „ 0·90		
„ „ 0·27	„ „ 0·30			„ „ 1·39	„ „ 0·95		
„ „ 0·37	„ „ 0·40			„ „ 1·83	„ „ 0.99		
„ „ 0·48	„ „ 0·50			„ „ 2·32	„ „ 0·999		
„ „ 0·59	„ „ 0·60			„ „ ∞	„ „ 1		

Tablice u Thomsona są 7-cyfrowe, ale tylko do argumentu $q=2$, co każdą setną; u Mellora 4-o cyfrowe, lecz do argumentu 2,19. Posługiwanie się tablicami jest konieczne przy rozwiązaniu zadań fizycznych.

III. Zastosowania fizyczne.

Przeprowadzone po długim szeregu wywodów rozwiązanie równania Fouriera w tych warunkach fizycznych, jakieśmy założyli, pozwala nam dać rozwiązanie liczebne w całym szeregu bardzo ważnych zagadnień praktycznych. W ogóle zatem, jeżeli rozpatrywana masa materyi, której stan fizyczny zmienia się w określony wyżej sposób, w czasie $t=0$ posiada w całej objętości jednakowy wskaźnik V_0, lecz przy $x=0$, t. j. w płaszczyźnie YZ, utrzymywany jest stale wskaźnik $V=0$ (przy każdym czasie), to rozwiązanie (25) przedstawia nam wartości wskaźnika w każdym punkcie i w każdym czasie.

---

[1]) Loc. cit. w dodatku. U Mellora są dwie tablice rzeczonej całki. Tylko pierwsza odpowiada jej rzeczywistym wartościom, druga zaś jest z błędnym nagłówkiem.

[2]) Papers, T. III, wydanie londyńskie 1890 r. Obecnie w świeżo wydanych „Zasadach Rachunku Prawdopodobieństwa“ Wł. Gosiewskiego mamy także tablice naszej całki, od 0 do 4.8, dziewięciocyfrowe, z Bertranda.

Digitized by Google

Jeżeli przez P oznaczymy wartość całki określonej:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{At}}} e^{-q^2}\,dq,$$

której wartość dla każdej wartości wyrażenia $\frac{x}{2\sqrt{At}}$ znajdziemy w tablicach, to rozwiązanie nasze będzie:

(26) $$V = V_0 P,$$

przytem:

(27) $$P = f\left(\frac{x}{2\sqrt{At}}\right).$$

Nietrudno z rozwiązania (26) otrzymać nowe rozwiązania w nieco zmienionych warunkach pierwotnych, gdy płaszczyzna YZ (przy $x=0$) jest stale utrzymywaną przy wskaźniku V_0, cała zaś masa ciała dla $t=0$ posiada wskaźnik równy zeru. Wtedy zamiast wpływu stanu fizycznego będziemy mieli jego wypływanie z ciała. Rzecz oczywista, iż w tym przypadku będziemy mieli:

(28) $$V' = V_0 - V_0 P = V_0(1-P).$$

Zgodnie z otrzymanemi rezultatami porównamy obecnie prędkość przenoszenia się zmiany stanu fizycznego dla pięciu rozpatrzonych przez nas poprzednio kategoryi zjawisk. Zauważymy jeszcze, iż rozwiązanie nasze pozwala wyznaczyć: a) dla dowolnego czasu rozkład wskaźnika w masie ciała, lub b) dla danego punktu w ciele zmianę wskaźnika z biegiem czasu. Dla wszelkich rozwiązań liczbowych musimy przedewszystkiem znać wartość $\sqrt{A}$ dla różnych ciał i różnych kategoryi zjawisk. Wyrachowaliśmy tę wartość podług danych W. Thomsona [1]) dla niektórych najwięcej charakterystycznych ciał i stanów.

---

[1]) Papers t. III. str. 433, wyd. londyńskie 1890 r. Sir W. Thomson wskazuje tylko numera krzywych, lecz wyrachowanie z nich wartości stałych nie przedstawia trudności,

Digitized by Google

TABLICA I.

$\sqrt{A}$ w CGS.	Zmiana stanu.
$\frac{1}{524}$	Dyfuzya cukru w wodzie.
$\frac{1}{8,7}$	Przenikanie ruchu przez wodę przy 10°C.
$\frac{1}{2,1}$	Ciepło przez żelazo (przewodnictwo).
$1,_{61}$	Przenikanie energii elektrycznej w głąb' przewodnika żelaznego przy spółczynniku magnetycznym 300 i elektrycznym (opór) 9800.
$11,_{8}$	Przenikanie energii elektrycznej w przewodniku miedzianym.
$1,_{7}.10^{6}$	Przenikanie potencyału elektrycznego w kablu atlantyckim.

Na podstawie tych cyfr, które nam daje doświadczenie, i tablic dla całki P możemy rozwiązywać dowolne zagadnienia liczbowe. Wyznaczymy dla przykładu wszystkich sześciu zjawisk, ile czasu upłynie, by na głębokości np. 1 metra, t. j. 100 centymetrów, wskaźnik V_0 otrzymał połowę swej pierwotnej wartości. W przypadku np. przewodnictwa cieplnego znaczy to, kiedy na odległości metra od powierzchni, której temperatura jest stała V_0, temperatura będzie $\frac{V_0}{2}$. Dla przypadku rozpuszczania się cukru w wodzie będzie to określenie czasu, kiedy w słupie czystej wody opartym o drugi słup z nasyconym 100% roztworem cukru, na odległości metra od wspólnej podstawy, nasycenie będzie 50% i t. d.

Dla rozwiązania zadania należy przedewszystkiem z tablic odnaleźć wartości argumentu $\frac{x}{2\sqrt{At}}$ gdy P równa się danej wartości. Niech szukany argument będzie p, wtedy $\frac{x}{2\sqrt{At}} = p$ i stąd

(29) $$t = \frac{x^2}{4p^2A}.$$

Digitized by Google

Dla $P = \frac{1}{2}$ tablice dają $p = 0{\cdot}48$. Podstawiając A z poprzedzającej tablicy, mamy dla $x = 100$ centymetrów.:

TABLICA II.

Czas w sekundach.

3.10^9 sek. $= 13{,}_2$ lat.	Cukier przez wodę.
$8{,}_{26}.10^5$ sek. $= 230$ godzin.	Ruch przez wodę.
$4{,}_{98}.10^4$ sek. $= 13{,}_3$ godzin.	Ciepło przez żelazo.
$4{,}_2.10^3$ sek. $= 1{,}_{17}$ godz.	Energia elektryczna przez żelazo.
86 sekund.	Energia elektryczna przez miedź.
$5{,}_7.10^{-13}$ sekundy.	Potencyał elektryczny przez kabel atlantycki.

Kończąc przytoczone przez nas przykłady, nie możemy pominąć jeszcze jednego, który Sir W. Thomson rozwinął w szeregu artykułów [1] — a mianowicie o wieku Ziemi. Stosując równanie Fouriera dla przewodnictwa cieplnego do Ziemi i uważając tę ostatnią jako ciało, które w początku czasów przy powstaniu z pierwotnej mgławicy, czy też skutkiem uderzenia się dwóch ciał, posiadało stan płynny przy temperaturze skał płynnych, t.j. około 7000° Fahrenheita nad zerem bezwględnem, czyli około 3600°C nad zerem Celsyusza, mógł Thomson, przyjmując $V_0 = 7000$ i $V_{x=0} = 0$, t. j. temperaturze między-planetarnej przestrzeni, określić prawo zmienności temperatury w głębi Ziemi w zależności od przyjętego przez się czasu „stygnięcia", t. j. wieku Ziemi.

Sprawdzianem doświadczalnym mogły tu być tylko cyfry t. zw. gradientu termicznego, t. j. spadku temperatury w pobliżu powierzchni, o ile są one przez nas znane. Teorya Thomsona, z powodu trudności matematycznej zrozumienia równań

[1]) On the secular cooling of the Earth, najprzód w Transactions Edynburskich 1862, a potem przedrukowane wielokrotnie w Papers, w dodatku do Thomsona i Taita i t. d. Nadzwyczaj interesującą metodę określenia wieku Ziemi, opierając się pośrednio na równaniu Fouriera podał także M. P. Rudzki (Rozpr. wydz. mat.-przyr. Ak. Um. t. 41 i „Wiad. mat." 1891, str. 158—178). Wyniki tej pracy są w związku z obserwowanem kurczeniem się pokładów geologicznych w miarę stygnięcia Ziemi.

Digitized by Google

Fouriera, mało była dostępna dla geologów; z powodu zaś swych rezultatów cyfrowych, dających dla wieku Ziemi nie więcej jak 400 milionów lat (najprawdopodobniejsza cyfra 100 milionów lat) wywoływała silną krytykę biologów, wskazujących na niemożebność wytworzenia się w tak krótkim przeciągu czasu tyle skomplikowanych rodzajów biologicznych, jak tego wymaga teorya Darwina. Obecnie powstaje krytyka przeciw samym podstawom teoryi Thomsona ze strony Strutta i innych fizyków angielskich, którzy uważają wewnętrzne ciepło Ziemi nie jako zabytek jej dawnej historyi termo-geologicznej, lecz jako rezultat radu, znajdującego się stosunkowo w wielkiej ilości w bazaltach, granitach i innych skałach [1].

Nie dotykając tych najnowszych krytyk, zakończymy naszą pracę możliwie zwięzłym wykładem hypotezy Thomsona.

By, mając rozkład temperatury V we wnętrzu Ziemi, otrzymać gradient termometryczny, powinniśmy różniczkować V względem x (t. j. wzdłuż promienia Ziemi). Wtedy:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = V_0 \frac{\partial P}{\partial x}, \text{ gdzie } P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{At}}} e^{-q^2} dq.$$

Wiadomo, iż jeżeli:

$$R = \int_0^a f(x)\,dx, \text{ to } \frac{\partial R}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}(\Phi a) = f(a),$$

więc:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = V_0 \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{At}} e^{-\frac{x^2}{4At}} = \frac{V_0}{\sqrt{\pi A t}} e^{-\frac{x^2}{4At}}. \tag{30}$$

Na podstawie doświadczeń nad przewodnictwem cieplnem i pojemnością cieplną skał około Edynburga i Greenwich, przyszedł Sir W. Thomson do rezultatu, iż w systemacie: rok, stopa angielska, stopień Fahrenheita, A dla skał Ziemię składających może być przyjęte równem 400. Wtedy zatem dla Ziemi równanie (30) da nam:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_0}{35{\cdot}4} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{1600\,t}}. \tag{31}$$

---

[1]) Cfr. Strutt, Proceedings of the Royal Society, za Maj 1906.

Digitized by Google

Doświadczenie pokazuje, iż wartość gradientu termometrycznego, jak już wspomniano, wynosi około 30 metrów na stopień Celsyusza, czyli ok. $^1/_{50}{}^0$ Fahrenheita na stopę angielską, i że w dostępnych dla nas miejscach skorupy ziemskiej—2000 metrów głębokości, t. j. ok. 6000 stóp—gradient ten nie zmienia się. (Zauważone zmiany objaśniają się warunkami miejscowemi).

Jeżeli we wzorze (31) za x przyjmiemy nawet grubość warstwy nie 6000′, lecz 10000′, na której gradient pozostaje niezmienny $\left(\frac{1}{50}\text{ Fahr.}\right)$; to mnożnik z potęgą liczby e będzie około $e^{-\frac{60000}{t}}$. Jeżeliby więc t stanowiło tylko 600000 lat, to już mnożnik ten będzie bardzo blizki jedności; w rzeczywistości zaś oczywiście t będzie znacznie większe. W obec tego dla określenia wieku Ziemi mamy równanie [1]:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_0}{35 \cdot 4} \frac{1}{\sqrt{t}}, \text{ albo } t = \frac{V_0^2}{(35,_4)^2} \cdot \overline{50}^2. \qquad (32)$$

jeżeli zamiast $\frac{\partial V}{\partial x}$ podstawimy $\frac{1}{50}$.

Pamiętając, że $V = 7000^0$, mamy ostatecznie na $t = 10^8$ t. j. 100 milionów lat. Jeżeli otrzymaną tą drogą wartość wieku Ziemi spożytkujemy dla określenia jej stanu w głębiach więcej znanych, to przekonamy się, że gradient $\frac{1}{50}$ zachowuje się jeszcze na głębokości 100000 stóp. Zmiana gradientu znaczniejsza, jak pokazuje wzór (31), powstaje dopiero (przy przyjętym wieku Ziemi 100 milionów lat) na większych głębiach i zmniejsza się przytem stale (czynnik $e^{-\frac{x^2}{1000t}}$ zmniejsza się we wzorze (31) z powiększeniem głębokości x, a zatem i $\frac{\partial V}{\partial x}$). Na głębokości 400000

[1]) Elementarny ten rachunek, w tej formie jak wyłożono w tekście, nie jest jednak przytoczony u Thomsona. Sądzimy, iż dla zrozumienia jego wywodów wzór nasz (32) nie będzie zupełnie bezużyteczny.

Digitized by Google

stóp wynosi gradient już tylko trzecią część tego, co na powierzchni Ziemi, t. j. ok. $^1/_{141}{}^0$ Fahrenheita na stopę.

Thomson uważa, w obec niepewności danych doświadczalnych dla A i V_0, 400 miljonów za wyższą, a 20 miljonów lat za niższą granicę określonej wartości wieku Ziemi. W każdym razie wartości stałego gradientu na przestrzeni dostępnej obecnemu doświadczeniu około $x = 10000'$ są w zgodzie z wzorem (31) w przybliżeniu przy $t = 100$ milionów lat.

Tym sposobem widzimy, iż całkowanie równania Fouriera doprowadziło nas do rozwiązania całego szeregu kwestyj fizycznych, które mają najgłębsze znaczenie filozoficzne.

I stanęliśmy u brzegu wielkiego Oceanu Prawdy, który, podług słów Newtona, odkrywa nam tylko niektóre barwne muszelki.

Petersburg w grudniu 1906 r.

---

[1]) Najnowsze określenia temperatury krzepnięcia skał płynnych przez Barusa i Roberts-Austena okazały (Kelvin, On the Age of the Earth as an Abode fitted for Life; Ph. Magaz., v. 47, p. 66). iż V_0 leży niżej, niż pierwotnie Kelvin przypuszczał. V_0 w stopniach Celsyusza wynosi tylko 880° (bazalt) i 1775° (kwarc). Przy tych nowych cyfrach oczywiście wyniki rachunku będą mniejsze, w obec czego Kelvin ogranicza obecnie swój powyższy rezultat do 25 mil. lat.

Digitized by Google

Digitized by Google

W. SMOSARSKI.

PRACE M. MARGULESA
o wahaniach peryodycznych ciśnienia barometrycznego.

REFERAT. [1])

ROZDZIAŁ III.

Drgania swobodne warstwy sferoidalnej powietrza, wirującej dla jakiegokolwiek rozkładu ciśnień i prędkości w chwili początkowej.

---

§ 7. Klasyfikacya ruchów powietrza w atmosferze.

W rozdziale poprzedzającym widzieliśmy, że dla warunków strefowych w chwili początkowej, t. j. gdy ciśnienie i prędkości różnią się tylko zależnie od szerokości geograficznej, wszelkie ruchy swobodne, mogące powstać w atmosferze sferoidalnej wirującej, wolnej od tarcia, składają się z fal stojących i z ruchów statecznych wzdłuż równoleżników.

W przypadku ogólnym, gdy ciśnienie i prędkości zależą nietylko od szerokości, lecz i od długości geograficznej ruchy stają się bardzo skomplikowane i wytworzenie sobie o nich pojęcia

---

[1]) Dokończenie. Patrz „Wiadomości matem.“ Tom X, str. 181—207.

Digitized by Google

byłoby w tym razie rzeczą nadzwyczajnie trudną. Margules ułatwił oryentacyę przez rozłożenie tych ruchów na prostsze elementy czyli klasy, rozpatrywane oddzielnie.

Każdą funkcyę można rozwinąć w ogóle na szereg funkcyj trygonometrycznych. Podobnież i drgania swobodne atmosfery dają się wyrazić przez sumę nieskończoną wstaw i dostaw argumentu

$$h\lambda + nt,$$

gdzie λ oznacza długość geograficzną, a h jest liczbą całkowitą 1, 2, 3 i t. d. Pojedyńcze wyrazy tej sumy przedstawiają oddzielne klasy fal i są całkami szczególnemi równań ruchu względnego powietrza, a ponieważ równania te obejmują tylko wyrazy liniowe, przeto całkę ogólną otrzymamy, biorąc sumę tych całek szczególnych. Liczba h charakteryzuje klasę fal. Gdy $h = 0$, będzie to klasa strefowa, którą rozpatrzyliśmy w rozdziale poprzedzającym. Klasa pierwsza ($h=1$) obejmuje ruchy powietrza, dla których punkty równoleżników średnicowo przeciwległe, posiadają prędkości równe, lecz skierowane wprost przeciwnie; ciśnienie w jednym jest wyższe, a w drugim o tyleż niższe od wartości średniej. W klasie drugiej ($h=2$) to samo stosuje się do każdych dwóch punktów równoleżnika, odległych o 90^0 od siebie; w punktach zaś średnicowo-przeciwległych, prędkości są równe i jednakowo skierowane, ciśnienia zaś są też równe i t. d.

Bardzo ważną rzeczą jest wykazanie wszelkich ruchów swobodnych, mogących powstać na kuli wirującej. Jednak rachunek jest tak zawiły, że niema prawie możności osiągnięcia tego celu bezpośrednio z równań różniczkowych. Metoda Margulesa polega na tem, że naprzód znajdujemy wszystkie możliwe rodzaje ruchów na kuli nieruchomej; ponieważ każdy ruch w atmosferze wirującej, jeżeli będziemy stopniowo zmniejszali prędkość obrotu, musi się sprowadzać do jednego z ruchów na kuli nieruchomej, więc naodwrót z ruchów na kuli nieruchomej obliczymy ruchy początkowo dla bardzo wolno obracającej się kuli, potem stopniowo dla coraz większej prędkości obrotu i w ten sposób znajdziemy wszystkie rodzaje ruchów swobodnych, możliwe w atmosferze wirującej z daną prędkością obrotową.

Digitized by Google

W atmosferze nieruchomej możliwe są fale, postępujące na zachód i na wschód, które się łączą w jednę falę stojącą; możliwe są także ruchy stateczne. Z pierwszych otrzymuje się w atmosferze wirującej fale postępowe, rozchodzące się bardzo prędko na zachód i wolniej na wschód: ruchy zaś stateczne prowadzą do fal postępowych, rozchodzących się na zachód bardzo powoli (drugiego rodzaju). Te trzy rodzaje fal postępowych wyczerpują wszelkie ruchy na kuli wirującej. Fale stojące i ruchy stateczne nie są możliwe, z wyjątkiem klasy strefowej.

§ 8. Drgania swobodne powietrza w warstwie kulistej nieruchomej, wolnej od tarcia.

Ciśnienie i prędkość są funkcyami nietylko szerokości, lecz i długości geograficznej. Oznaczając, jak poprzednio: ciśnienie $p = p_0(1+\varepsilon)$, gdzie p_0 oznacza wartość średnią ciśnienia; b — składową prędkości wzdłuż południka z kierunkiem dodatnim z północy na południe; c — składową prędkości równoleżnikową z kierunkiem dodatnim z zachodu na wschód; T — temperaturę bezwzględną powietrza (stałą): S — promień kuli (stały); ω — odległość kątową punktu od bieguna; λ — długość geograficzną; t — czas, wreszcie R — stałą; — będziemy mieli dla bardzo cienkiej warstwy powietrza nieruchomej, bez tarcia, o temperaturze stałej, z pominięciem ruchów pionowych, po odrzuceniu wyrazów drugiego rzędu, następujący układ równań różniczkowych:

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{RT}{S}\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} &= \frac{\partial b}{\partial t}, \\ -\frac{RT}{S}\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\sin\omega\,\partial\lambda} &= \frac{\partial c}{\partial t}. \\ -\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} &= \frac{1}{S\sin\omega}\left(\frac{\partial(b\sin\omega)}{\partial\omega} + \frac{\partial c}{\partial\lambda}\right). \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

Po wyrugowaniu b i c będzie:

$$(2) \quad \frac{1}{S\sin\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}\sin\omega\right)+\frac{1}{\sin^2\omega}\cdot\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\lambda^2}-\frac{S^2}{RT}\cdot\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}=0.$$

Rozwiązań tego równania szukamy w postaci:

$$(3) \qquad \varepsilon = E(\omega).\sin(h\lambda \pm nt): \quad , \qquad h=1,2,3...$$

przyczem trzeba wyznaczyć wielkość stałą n oraz funkcyę $E(\omega)$. Jeżeli w wyrażeniu powyższem weźmiemy znak $+$, będzie to fala rozchodząca się na zachód, jeżeli znak $-$, będzie to taka sama fala, ale rozchodząca się na wschód. Obie te fale łączą się w jednę falę stojącą:

$$\varepsilon = E(\omega)\sin h\lambda\,.\sin nt.$$

Podstawiając wyrażenie (3) w równanie (2), otrzymamy, kładąc: $\frac{n^2S^2}{RT}=j(j+1)$, po skróceniu:

$$(4) \qquad \frac{1}{\sin\omega}\cdot\frac{d}{d\omega}\left(\frac{d\varepsilon}{d\omega}\sin\omega\right)-\frac{h^2E}{\sin^2\omega}+j(j+1)E=0.$$

t. j. równanie funkcyj kulistych. Biorąc na j liczbę całkowitą dodatnią, znajdujemy dla każdego h, nieskończenie wiele rozwiązań dla $E(\omega)$ oraz odpowiednich wartości na n, przedstawiających pojedyńcze typy fal w każdej klasie. Równania (1) dadzą nam:

$$b=\frac{dE}{d\omega}\cos(h\lambda+nt), \quad c=-\frac{hE}{\sin\omega}\sin(h\lambda+nt).$$

Okres drgania jest:

$$\theta=\frac{2\pi}{n}=\frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}\cdot\frac{2\pi S}{\sqrt{RT}}.$$

Poniżej przytaczamy niektóre rozwiązania. Fale klasy pierwszej ($h=1$):

Digitized by Google

$$
(5)\quad \begin{cases}
j=1,\ \varepsilon=A_1\sin\omega.\sin(\lambda+nt), & nS=\sqrt{1.2RT},\\
j=3,\ \varepsilon=A_1(\sin\omega-\frac{5}{4}\sin^3\omega)\sin(\lambda+nt), & nS=\sqrt{3.4RT},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
j=2,\ \varepsilon=\mathfrak{A}_1\cos\omega\sin\omega\sin(\lambda+nt), & nS=\sqrt{2.3RT},\\
j=4,\ \varepsilon=\mathfrak{A}_1\cos\omega(\sin\omega-\frac{7}{4}\sin_3\omega)\sin(\lambda+nt), & nS=\sqrt{4.5RT},
\end{cases}
$$

Fale klasy drugiej $h=2$):

$$
(6)\quad \begin{cases}
j=2,\ \varepsilon=A_2\sin^2\omega\sin(2\lambda+nt), & nS=\sqrt{2.3RT},\\
j=4,\ \varepsilon=A_2(\sin^2\omega-\frac{7}{6}\sin^4\omega)\sin(2\lambda+nt), & nS=\sqrt{4.5RT},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
j=3,\ \varepsilon=\mathfrak{A}_2\cos\omega\sin^2\omega\sin(2\lambda+nt), & nS=\sqrt{3.4RT},\\
j=5,\ \varepsilon=\mathfrak{A}_2\cos\omega(\sin^2\omega)-\frac{3}{2}\sin^4\omega\sin(2\lambda+nt), & nS=\sqrt{5.6RT},
\end{cases}
$$

i t. d., gdzie A_1, $\mathfrak{A}_1$, A_2, $\mathfrak{A}_2$ i t. d. są stałe dowolne.

Powyższe rozwiązania nie wyczerpują wszystkich możliwych rozwiązań układu (1). Można mu również uczynić zadość, kładąc:

$$(7)\qquad \varepsilon=0,\quad b=\Phi(\omega,\lambda),\quad c=\Psi(\omega,\lambda)$$

gdzie funkcye Φ i Ψ są związane równaniem ciągłości:

$$(8)\qquad \frac{\partial(\Phi\sin\omega)}{\partial\omega}+\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda}=0,$$

tak że jedna z nich jest dowolną. Ponieważ funkcye te nie zawierają czasu, więc rozwiązanie to przedstawia ruchy stateczne powietrza dla wartości stałej ciśnienia. Całkę ogólną otrzymamy, biorąc sumę wszystkich całek szczególnych. Ponieważ odnośne wzory nie będą nam potrzebne w dalszym ciągu, więc je pomijamy.

Digitized by Google

§ 9. Fale postępowe w warstwie wirującej, bez tarcia.

Równania ruchu względnego powietrza w cienkiej warstwie, wirującej z prędkością kątową ν, bez tarcia, są następujące:

$$(9)\quad \begin{cases} -\dfrac{RT}{S}\cdot\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} = \dfrac{\partial b}{\partial t} - 2\nu\cos\omega\,.\,c, \\[2ex] -\dfrac{RT}{S}\cdot\dfrac{\partial\varepsilon}{\sin\omega\,.\,\partial\lambda} = \dfrac{\partial c}{\partial t} + 2\nu\cos\omega\,.\,b, \\[2ex] -\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t} = \dfrac{1}{S\sin\omega}\left(\dfrac{\partial(b\sin\omega)}{\partial\omega} + \dfrac{\partial c}{\partial\lambda}\right). \end{cases}$$

Rozwiązań domniemywać się można w postaci:

$$(10)\quad \begin{cases} b = \varphi(\omega)\cos(h\lambda + nt), \qquad c = \psi(\omega)\sin(h\lambda + nt), \\ \varepsilon = E(\omega)\sin(h\lambda + nt), \end{cases}$$

gdzie h jest liczbą całkowitą dodatnią; wyznaczyć tu należy funkcye $\varphi(\omega)$, $\psi(\omega)$ i $E(\omega)$ oraz stałą n.

Wprowadźmy dla skrócenia następujące oznaczenia:

$$(11)\qquad q = \frac{2\nu}{n}, \qquad z = \frac{n^2S^2}{RT}. \qquad q^2z = \frac{4\nu^2S^2}{RT} = \varkappa.$$

Po podstawieniu wzorów (10) w równania (9) i po wyrugowaniu funkcyi $\psi(\omega)$, otrzymamy następujące dwa równania rożniczkowe, służące do wyznaczenia funkcyj $E(\omega)$ i $\varphi(\omega)$:

$$(12)\quad \begin{cases} E = \dfrac{nS}{RT}\cdot\dfrac{\sin\omega}{h^2 - z\sin^2\omega}\left(\dfrac{d(\varphi\sin\omega)}{d\omega} - hq\cos\omega\,.\,\varphi\right), \\[2ex] \varphi = \dfrac{RT}{nS}\cdot\dfrac{\dfrac{dE}{d\omega} + q\cos\omega\,\dfrac{h\,.\,E}{\sin\omega}}{1 - q^2\cos^2\omega}. \end{cases}$$

Równania (12) rozwiązuje Margules za pomocą metody Laplace'a ułamków ciągłych. Metoda ta polega na przedstawieniu szuka-

Digitized by Google

nych funkcyj za pomocą szeregów, rozwiniętych według potęg wielkości $\sin\omega$, i na obliczeniu spółczynników tych szeregów. Rozwinięć tych w danym przypadku może być dwa:

$$(13) \qquad \varphi = \cos\omega \,.\, \sum_0^\infty a_j \sin^j\omega\,, \qquad E = \frac{nS}{RT} \,.\, \sum_0^\infty A_j \sin^j\omega\,,$$

albo

$$(14) \qquad \varphi = \sum_0^\infty \mathfrak{a}_j \sin^j\omega\,, \qquad E = \frac{nS}{RT} \cos\omega \,.\, \sum_0^\infty \mathfrak{A}_j \sin^j\omega\,.$$

Pierwsze założenie prowadzi do rozwiązań „parzystych" (z równikiem jako płaszczyzną symetryi), drugie zaś do rozwiązań „nieparzystych" (ruchy powietrza odbywają się poprzez równik). Podstawiając szeregi (13) i (14) w równania (12) przekonamy się, że dla h nieparzystego znikają spółczynniki a_j i $\mathfrak{a}_j$ ze skaźnikami nieparzystemi i spółczynniki A_j i $\mathfrak{A}_j$ ze skaźnikami parzystemi; w razie przeciwnym znikają parzyste a_j, $\mathfrak{a}_j$ i nieparzyste A_j, $\mathfrak{A}_j$.

Wobec wielkiej zawiłości rachunku konieczne jest podzielenie zagadnienia na poszczególne przypadki Stosownie do dwóch postaci rozwinięć (13) i (14) i wzmiankowanego zachowania się ich spółczynników w klasach parzystych i nieparzystych, rozróżnimy 4 przypadki, a mianowicie: rozwiązania parzyste i nieparzyste klas nieparzystych oraz rozwiązania parzyste i nieparzyste klas parzystych.

a) Rozwiązania parzyste klas nieparzystych ($h = 1, 3, 5 \ldots$). Ponieważ, jak wyżej wzmiankowano, dla h nieparzystego w rozwinięciu (13) znikają nieparzyste a_j i parzyste A_j, kładziemy więc odrazu:

$$\varphi = \cos\omega\,(a_0 + a_2 \sin^2\omega + a_4 \sin^4\omega + \ldots\ldots),$$

$$E = \frac{nS}{RT}\,(A_1 \sin\omega + A_3 \sin^3\omega + \ldots\ldots)$$

Po podstawieniu w równania (12) i przyrównaniu spółczynników przy jednakowych potęgach wielkości $\sin\omega$, otrzymamy z dwu równań (12) dwa układy związków pomiędzy mającemi się wyznaczyć spółczynnikami a_j i A_j:

Digitized by Google

$$
\begin{array}{l|l}
h^2A_1 = (1-hq)\,a_0 & (1+hq)A_1 = (h-q^2)\,a_0 \\
h^2A_3 - zA_1 = (3-hq)a_2 - (2-hq)\,a_0 & (3+hq)A_3 = (1-q^2)\,a_2 + q^2a_0 \\
h^2A_5 - zA_3 = (5-hq)a_4 - (4-hq)\,a_2 & (5+hq)A_5 = (1-q^2)\,a_4 + q^2a_2 \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

Ze związków tych rugujemy A_h i znajdujemy:

$$
(15)\qquad
\begin{aligned}
&h^2\,\frac{(1-q^2)\,a_0}{1+hq} = (1-hq)\,a_0\,,\\
&h^2\,\frac{1-q^2)\,a_2+q^2a_0}{3+hq} - z\,\frac{(1-q^2)\,a_0}{1+hq} = (3-hq)a_2-(2-hq)\,a_0\,,
\end{aligned}
$$

a w ogóle:

$$
\begin{aligned}
&h^2\,\frac{(1-q^2)\,a_{j+2}+q^2a_j}{j+3+hq} - z\,\frac{(1-q^2)\,a_j+q^2a_{j-2}}{j+1+hq}\\
&= (j+3-hq)\,a_{j+2} - (j+2-hq)\,a_j\,. \qquad (j=2,4,6,\dots)
\end{aligned}
$$

Dla $h=1$ pierwsze z tych równań jest tożsamościowe i a_0 pozostaje nieoznaczone; dlę $h=3$ jest $a_0=0$, a_2 nieoznaczone i t. d., wogóle $a_0=a_2=\dots=0$, a_{h-1} jest nieoznaczone. Pierwszy związek nietożsamościowy daje zależność pomiędzy a_{h-1} i a_{h+1}:

$$
(16)\qquad
\begin{aligned}
\frac{a_{h+1}}{a_{h-1}} &= \frac{(h+hq)\,[(h+1)\,(h+2)-hq] - (2+h+hq)\,(1-q^2)\,z}{2\,(2+2h)\,(h+hq)}\\
&= \frac{N_h}{2\,(2+2h)\,(h+hq)}\,.
\end{aligned}
$$

Równanie następne i pozostałe układu (15) zawierają już po trzy spółczynniki szukane; przedstawimy je w kształcie następującym:

$$
(17)\qquad \frac{a_j}{a_{j-2}} = \frac{(j+3+hq)\,q^2z}{N_{j+1}-(j+1+hq)\,(j+3-h)\,(j+3+h)\,\dfrac{a_{j+2}}{a_j}}\,,
$$

gdzie

$$
N_{j+1} = (j+1+hq)\,[(j+2)\,(j+3)-hq] - (j+3+hq)\,(1-q^2)z.
$$

Podstawiając w równaniu powyższem zamiast a_{j+2}/a_j wyrażenie analogiczne z następującego z kolei równania (15) i t. d.,

Digitized by Google

otrzymamy ułamek łańcuchowy nieskończony z drugiego i następnych równań nietożsamościowych układu (15):

$$\frac{a_{h+1}}{a_{h-1}} = \frac{(h+4+hq)\,q^2 z}{N_{h+2} - \dfrac{Z_{h+4}}{N_{h+4} - \dots}};$$

$$Z_{j+3} = (j+3-h)(j+3+h)(j+1+hq)(j-5+hq)\,q^2 z.$$

Przyrównywając to wyrażenie do (16), otrzymanego wyżej z pierwszego nietożsamościowego równania (15), znajdziemy wreszcie:

$$\text{(P)} \qquad 0 = N_h - \frac{Z_{h+2}}{N_{h+2} - \dfrac{Z_{h+4}}{N_{h+4} - \dots}}$$

Dla klasy pierwszej $h = 1$ będzie:

$$(\mathrm{P}_1)\quad \left\{\begin{array}{l} N_1 = (1+q)(2.3-q) - (3+q)(1-q^2)\,z, \\ N_3 = (3+q)(4.5-q) - (5+q)(1-q^2)\,z, \\ N_5 = (5+q)(6.7-q) - (7+q)(1-q^2)\,z, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Z_3 = 2.4(1+q)(5+q)\,q^2 z, \\ Z_5 = 4.6(3+q)(7+q)\,q^2 z, \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Dla klasy trzeciej $h = 3$:

$$(\mathrm{P}_3)\quad \left\{\begin{array}{l} N_3 = (3+3q)(4.5-3q) - (5+3q)(1-q^2)\,z, \\ N_5 = (5+3q)(6.7-3q) - (7+3q)(1-q^2)\,z, \\ N_7 = (7+3q)(8.9-3q) - (9+3q)(1-q^2)\,z, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Z_5 = 2.8(3+3q)(7+3q)\,q^2 z, \\ Z_7 = 4.10(5+3q)(9+3q)\,q^2 z, \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

i t. d.

Digitized by Google

Ponieważ $z = \varkappa q^{-2}$, gdzie $\varkappa$ jest stałą, zależną od rozmiarów kuli, więc równanie (P) zawiera tylko jedną niewiadomą q. Znalazłszy jakikolwiek pierwiastek tego równania, obliczymy przedewszystkiem okres fali $\theta = \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{\nu} q$, a następnie z wzoru (17), naprzykład dla $h = 1$, wartości stosunków a_2 / a_0, a_4 / a_2 i t. d. i spółczynników $a_2 = a_0\, a_2/a_0$, $a_4 = a_0 \,.\, a_2/a_0 \,.\, a_4/a_2$ i t. d.; będziemy więc mieli funkcye φ, ψ i E, t. j. jedno rozwiązanie szczególne równań różniczkowych (9). Takich pierwiastków q dla danego h jest nieskończenie wiele, odpowiadają im pojedyńcze typy fal w danej klasie.

b) Rozwiązania parzyste klas parzystych. Kładąc:

$$\varphi = \cos\omega\,(a_1 \sin\omega + a_3 \sin^3\omega + \ldots),$$

$$E = nS / RT\,(A_0 + A_2 \sin^2\omega + \ldots)$$

dojdziemy w ten sam sposób, co w przypadku poprzednim, do równań kształtu podobnego do (P) z tą różnicą, że h otrzymuje wartości parzyste 2, 4, 6, ...

c) Rozwiązania nieparzyste klas nieparzystych. Zakładając podług wzoru (14):

$$\varphi = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_2 \sin^2\omega + \mathfrak{a}_4 \sin^4\omega + \ldots,$$

$$E = nS / RT \cos\omega\,(\mathfrak{A}_1 \sin\omega + \mathfrak{A}_3 \sin^3\omega + \ldots),$$

otrzymamy następujące związki pomiędzy spółczynnikami:

$h^2\mathfrak{A}_1 = (1-hq)\,\mathfrak{a}_0$	$(1+hq)\,\mathfrak{A}_1 = (1-q^2)\mathfrak{a}_0$
$h^2\mathfrak{A}_3 - z\mathfrak{A}_1 = (3-hq)\,\mathfrak{a}_2$	$(3+hq)\,\mathfrak{A}_3 - (2+hq)\,\mathfrak{A}_1 = (1-q_2)\,\mathfrak{a}_2 + q^2\mathfrak{a}_0$
$h^2\mathfrak{A}_5 - z\mathfrak{A}_3 = (5-hq)\,\mathfrak{a}_4$	$(5+hq)\,\mathfrak{A}_5 - (4+hq)\,\mathfrak{A}_3 = (1-q^2)\,\mathfrak{a}_4 + q^2\mathfrak{a}_2$
. . . . .	. . . . .

Po wyrugowaniu ilości $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_4$ . . ., będzie:

Digitized by Google

$$(1+hq)\mathfrak{A}_1 = (1-q^2)\frac{h^2\mathfrak{A}_1}{1-hq}$$

$$(3+hq)\mathfrak{A}_3-(2+hq)\mathfrak{A}_1 = (1-q^2)\frac{h^2\mathfrak{A}_3-z\mathfrak{A}_1}{3-hq}+q^2\frac{h^2\mathfrak{A}_1}{1-hq},$$

$$(j+2hq+)\mathfrak{A}_{j+2}-(j+1-hq)\mathfrak{A}_j=(1-q^2)\frac{h^2\mathfrak{A}_{j+2}-z\mathfrak{A}_j}{j+2-hq}+q^2\frac{h^2\mathfrak{A}_j-z\mathfrak{A}_{j-2}}{j-hq},$$
$$(j=3,5,7...)$$

Dla $h=1$ jest $\mathfrak{A}_1$ nieoznaczone, dla $h=3$ jest $\mathfrak{A}_1=0$, $\mathfrak{A}_3$ — nieoznaczone i t. d. Z pierwszego nietożsamościowego związku, zawierającego $\mathfrak{A}_{h+2}$ i $\mathfrak{A}_h$ znajdziemy:

$$(18)\qquad \frac{\mathfrak{A}_{h+2}}{\mathfrak{A}_h}=\frac{(h+2-hq)[h(h+1)-hq]-(h-hq)(1-q^2)z}{2(2+h)(h-hq)}.$$

Następnie oznaczywszy dla skrócenia:

$$\mathfrak{N}_j=(j+2-hq)[j(j+1)-hq]-(j-hq)(1-q^2)z,$$
$$\mathfrak{Z}_{j+2}=(j+2-h)(j+2+h)(j-hq)(j-4-hq)q^2z,$$

znajdziemy z pozostałych związków ułamek łańcuchowy:

$$(19)\qquad \frac{\mathfrak{A}_{h+2}}{\mathfrak{A}_h}=\frac{(h+4-hq)q^2z}{\mathfrak{N}_{h+2}-\dfrac{\mathfrak{Z}_{h+4}}{\mathfrak{N}_{h+4}-\dots}}$$

Przyrównywając to wyrażenie do (18), otrzymanego z pierwszego nietożsamościowego związku, będziemy mieli dla wyznaczenia q równanie następujące:

$$(J)\qquad 0=\mathfrak{N}_h-\frac{\mathfrak{Z}_{h+2}}{\mathfrak{N}_{h+2}-\dfrac{\mathfrak{Z}_{h+4}}{\mathfrak{N}_{h+4}-\dots}}\qquad (h=1,3,5...)$$

d) Rozwiązania nieparzyste klas parzystych. Kładziemy:

Digitized by Google

$$\varphi = \mathfrak{a}_1 \sin\omega + \mathfrak{a}_3 \sin_3\omega + \ldots\ldots,$$

$$E = nS / RT \cos\omega \, (\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_2 \sin^2\omega \ldots\ldots)$$

i postępujemy, jak w przypadku poprzedzającym

§ 10. Sposób obliczenia pierwiastków. Trzy rodzaje fal postępowych w warstwie wirującej.

Za punkt wyjścia przy obliczeniu pierwiastków q równań (P) (J) i dwóch podobnych dla przypadków pozostałych, służą podane w § 8 rozwiązania (5) i (6) równania (2) dla warstwy nieruchomej. Mieliśmy tam dla $\nu = 0$, a więc i dla $q = 0$, w klasie pierwszej $h = 1$, dla typu pierwszego parzystego $z = n^2S^2 / RT = 1.2$, dla typu drugiego $z = 3 . 4$. Przejdziemy teraz do kuli wirującej bardzo wolno i nadamy ν pewną bardzo małą wartość; wówczas q będzie tylko niewiele różniło się od zera, a z musi być bliskie 2 dla typu pierwszego, a 12 dla typu drugiego. Podstawiając te wartości w równanie (P), znajdziemy drogą przybliżeń kolejnych wartości q i z, czyniące zadość równaniu. Te wartości posłużą do znalezienia tą samą drogą nowych wartości q i z dla ν nieco większego. Powiększając w ten sposób stopniowo ν, dojdziemy do warstwy, dokonywającej obrotu w 24 godzin. Liczba pierwiastków q dla każdego h jest nieskończenie wielka. Są one dodatnie i ujemne. Pierwsze dają fale postępowe, rozchodzące się na zachód, drugie—fale postępujące na wschód.

Dla typu pierwszego parzystego jest $q = 1{,}156$ i $q = -3{,}047$; odpowiednie zaś wartości dla typu drugiego, trzeciego i t. d. powinny być coraz mniejsze co do wartości bezwzględnej, ponieważ iloczyn $zq^2 = \varkappa$ jest stały, a z dla wyższych typów jest coraz większe, jak to widać już z rozwiązań dla kuli nieruchomej. Istotnie, pierwiastki ujemne równania (P) są coraz mniejsze co do wartości bezwzględnej. Inaczej rzecz się ma z pierwiastkami dodatniemi: oprócz szeregu pierwiastków malejących, odpowiadają-

Digitized by Google

cych rozwiązaniom (5) i (6) dla kuli nieruchomej, istnieje drugi szereg pierwiastków, wzrastających do nieskończoności. Ponieważ odpowiednie wartości z, a zatem i n, dążą do zera, więc rzecz jasna, że ta druga kategorya pierwiastków odpowiada, ruchom statecznym na kuli nieruchomej. Fale postępowe, odpowiadające tym ostatnim pierwiastkom, nazwał Margules zachodniemi drugiego rodzaju. Odznaczają się one szczególnie długim czasem obiegu. Dochodzimy więc do następującego wyniku: fale stojące w warstwie kulistej nieruchomej przechodzą w warstwie wirującej bez tarcia na fale postępowe zachodnie i wschodnie, ruchy zaś stateczne na fale postępowe zachodnie drugiego rodzaju. Te trzy rodzaje fal postępowych wyczerpują wszystkie ruchy swobodne możliwe w atmosferze wirującej bez tarcia. Poniżej przytaczamy z pracy Margulesa przykłady fal klasy pierwszej i drugiej. Założone dane liczbowe są:

$$2\pi S = 4.10^7 \text{m}. \qquad RT = 287.273\,\text{m}^2\,\text{sec}^{-2}.$$

Czas obrotu dookoła osi 24 godzin:

$$\varkappa = \frac{4\nu^2 S^2}{RT} = 10{,}94.$$

Margules obliczył tylko trzy typy fal parzystych klasy pierwszej i jeden typ klasy drugiej. Rozwiązania nieparzyste dla $\varkappa = 10{,}94$ nie są podane. Najbardziej interesującym jest czas obiegu fal dookoła atmosfery. W klasie pierwszej równa się on okresowi drgania, w klasie drugiej jest dwa razy większy niż okres drgania, ponieważ na każdym równoleżniku mieszczą się dwie fale i t. d. Okres drgania oblicza się w bardzo prosty sposób z pierwiastka q. Naprz. w klasie pierwszej:

$$\theta = \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi . q}{\nu}, \text{ a ponieważ } \nu = 2\pi / 24.60.60,$$

więc θ wyrażone w godzinach $= 12\,q$.

Digitized by Google

Fale parzyste klasy pierwszej:

A) Fale postępujące na zachód (pierwszego rodzaju)		B) Fale postępujące na wschód		C) Fale postępujące na zachód (drugiego rodzaju)	
$q = \frac{2\nu}{n}$	Czas obiegu fali (godziny)	q	Czas obiegu fali (godziny)	q	Czas obiegu fali (godziny)
Typ I.					
1,156	13,87	— 3,047	36,57	10,89	130,7
Typ II.					
0,7686	9,22	— 0,8518	10,22	25,79	309,5
Typ III.					
0,553	6,63	— 0,564	6,77	47,68	572,2

Fale parzyste klasy drugiej. Typ I.

A) Fale postępujące na na zachód (pierwszego rodzaju)			B) Fale postępujące na wschód			C) Fale postępujące na zachód (drugiego rodzaju)		
q	Okres fali	Czas obiegu fali	q	Okres fali	Czas obiegu fali	q	Okres fali	Czas obiegu fali
	Godziny			Godziny			Godziny	
0,9944	11,94	23,9	— 1,535	18,42	36,8	7,811	93,74	187,5

Z rozwiązań nieparzystych (równanie J) podaje Margules tylko jeden typ i to dla warstwy, obracającej się bardzo powoli. Dla $\varkappa = 0{,}1$ klasy pierwszej, typu pierwszego, będzie: fala zachodnia pierwszego rodzaju: $q = 0{,}1273$, czas obiegu 15,98 godzin; fala wschodnia: $q = -0{,}13012$, czas obiegu 16,33 godzin; fala zachodnia drugiego rodzaju: $q = 2{,}007$, czas obiegu 251, 9 godzin.

Digitized by Google

Dla uzupełnienia powyższych rozwiązań należałoby jeszcze wypisać wzory na φ, ψ i E. Ograniczymy się do fal parzystych klasy pierwszej. Mamy:

$$\varphi = \cos\omega\,(a_0 + a_2 \sin^2\omega + \ldots), \quad \psi = a_0 + a_2 \sin^2\omega + \ldots$$

$$E = \frac{nS}{RT}\,(A_1 \sin\omega + A_3 \sin_3\omega + \ldots); \quad a_0 \text{ dowolne,}$$

$$(\mathrm{P}_1)\begin{cases} \dfrac{a_2}{a_0} = \dfrac{(5+q)\,\varkappa}{N_3 - \dfrac{Z_5}{N_5 - \ldots}}, \qquad \dfrac{a_4}{a_0} = \dfrac{(7+q)\,\varkappa}{N_5 - \dfrac{Z_7}{N_7 - \ldots}}, \quad [N, Z \text{ z równań } (\mathrm{P}_1)] \\[2ex] a_0 = -a_0, \quad a_2 = -\dfrac{3q(a_2 - a_0) + a_2}{3+q}, \quad a_4 = -\dfrac{5q(a_4 - a_2) + a_4}{5+q}, \ldots, \\[2ex] A_1 = \dfrac{(1-q_2)\,a_0}{1+q}, \quad A_3 = \dfrac{(1-q^2)\,a_2 + q^2 a_0}{3+q}, \quad A_5 = \dfrac{(1-q^2)\,a_4 + q^2 a_2}{5+q}. \end{cases}$$

Za pomocą tych wzorów można obliczyć, gdy q jest wiadome, rozkład ciśnień i system wiatrów. Margules przedstawia je graficznie dla wyżej przytoczonych fal. Wynika z nich, że ruchy powietrza w falach zachodnich pierwszego rodzaju są przeciwne t. zw. regule Buys-Ballota, podczas gdy fale wschodnie i zachodnie drugiego rodzaju na ogół zgadzają się z nią. Różnią się one też swojem zachowaniem się względem tarcia.

§ 11. Tarcie. Fale postępowe, zanikające w warstwie wirującej.

Zakładając tarcie jako proporcyonalne do prędkości ruchu powietrza (o spółczynniku l), będziemy mieli następujący układ równań ruchu względnego powietrza w warstwie wirującej cienkiej o temperaturze stałej:

Digitized by Google

$$(20)\quad \begin{cases} -\dfrac{RT}{S}\cdot\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}=\dfrac{\partial b}{\partial t}+lb-2\nu\,.\cos\omega\,.\,c, \\ -\dfrac{RT}{S}\cdot\dfrac{\partial\varepsilon}{\sin\omega\,.\partial\lambda}=\dfrac{\partial c}{\partial t}+lc+2\nu\,.\cos\omega\,.\,b, \\ -\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t}=\dfrac{1}{S\sin\omega}\left(\dfrac{\partial(b\sin\omega)}{\partial\omega}+\dfrac{\partial c}{\partial\lambda}\right). \end{cases}$$

Rozwiązań możnaby szukać w postaci:

$$\varepsilon=e^{-at}\left[E_1(\omega)\sin(h\lambda+nt)+E_2(\omega)\cos(h\lambda+nt)\right],$$

oraz w wyrażeniach analogicznych na φ i ψ. Prościej jest jednak posiłkować się funkcyami zespolonemi, podobnie jak w rozdziale II. Oznaczamy: $\sqrt{-1}=i$, $n-li=r$, $\dfrac{2\nu}{r}=q$, $nrS^2/RT=z$ w ten sposób, że q i z otrzymują dla $l=0$ te same wartości, co w układzie bez tarcia; kładziemy dalej:

$$(21)\quad b=ie^{i(h\lambda+nt)}\varphi(\omega),\quad c=e^{i(h\lambda+nt)}\psi(\omega),\quad \varepsilon=e^{i(h\lambda+nt)}E(\omega).$$

Wielkości szukane n, φ, ψ, E będą wogóle zespolone. Mamy naprzód:

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{RT}{rS}\cdot\dfrac{\partial E}{\partial\omega}=\varphi+q\cos\omega\,.\,\psi;\quad -\dfrac{RT}{rS}\cdot\dfrac{hE}{\sin\omega}=q\cos\omega\,.\,\varphi+\psi, \\ nS\sin\omega\,.\,E+\dfrac{d(\varphi\sin\omega)}{d\omega}+h\psi=0, \end{cases}$$

a po wyrugowaniu ψ:

$$(23)\quad \begin{cases} E=\dfrac{rS}{RT}\cdot\dfrac{\sin\omega}{h^2-z\sin^2\omega}\left(\dfrac{d(\varphi\sin\omega)}{d\omega}-hq\cos\omega\,.\,\varphi\right), \\ (1-q^2\cos^2\omega)\varphi=\dfrac{RT}{rS}\left(\dfrac{dE}{\partial\omega}+hq\,E\cot\omega\right). \end{cases}$$

Równania te są zupełnie podobne do równań (12), dla przypadku bez tarcia z tą tylko różnicą, że zamiast n występuje r. Dalej po-

Digitized by Google

postępujemy w sposób podobny, jak w § 9. Kładąc więc w celu znalezienia rozwiązań parzystych klas nieparzystych:

$$\varphi = \cos\omega\,(a_0 + a_2 \sin^2\omega + \ldots), \quad E = \frac{rS}{RT}(A_1 \sin\omega + A_3 \sin^3\omega + \ldots),$$

dojdziemy do równania (P) z niewiadomą q. Dopiero przy rozwiązywaniu tego równania występuje różnica w porównaniu z przypadkiem bez tarcia, gdyż nie można szukać bezpośrednio pierwiastków q dla danej prędkości obrotu i danego spółczynnika tarcia. Margules postępuje w sposób odwrotny, szukając drogą prób przypadkowych wielkości zespolonych q i z, czyniących zadość równaniu (P) i zbliżonych modułami do wartości, znalezionych w przypadku bez tarcia. Prędkość obrotu z nich obliczona wogóle nie odpowiada 24 godzinom. Ułożywszy tablice z obliczonych wartości, można znaleść bezpośrednio lub przez interpolacyę wartości q i z, odpowiadające obrotowi, odbywającemu się w okresie 24-godzinnym. Z tych samych wartości q i z wyznacza się spółczynnik tarcia l, którego wielkość będzie wobec tego zupełnie przypadkowa. Nie wdając się w bliższe szczegóły rachunku Margulesa, podajemy wyniki przez niego otrzymane. Posiłkując się oznaczeniami:

$$q = Xe^{\xi i}, \quad z = Ze^{\zeta i}, \quad \frac{n}{2\nu} = \frac{\beta + \alpha i}{2\nu} = Ne^{\gamma i},$$

gdzie X, Z, N, ξ, ζ i γ są liczbami rzeczywistemi, otrzymamy:

$$\frac{r}{2\nu} = \frac{1}{q} = X^{-1} e^{-\xi i} = \frac{\beta + (\alpha - l) i}{2\nu},$$

$$\frac{4\nu^2 S^2}{hT} = \varkappa = \frac{2\nu}{n} qz = \frac{XZ}{N} e^{(\xi + \zeta - \gamma) i},$$

Ponieważ wyrażenie $\varkappa$ jest rzeczywiste, więc musi być $\xi + \zeta - \gamma = 0$. Dalej mamy jeszcze:

$$X^{-1} \cos\xi = N \cos\gamma = \frac{\beta}{2\nu}, \quad X^{-1} \sin\xi = \frac{l - \alpha}{2\nu}, \quad N \sin\gamma = \frac{\alpha}{2\nu}.$$

Digitized by Google

Po uwzględnieniu powyższych związków będziemy mieli dla wyznaczenia a, β, ν i l następujące równania:

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{4\nu^2 S^2}{RT} = X^2 Z \dfrac{\cos(\xi+\zeta)}{\cos\xi}, \quad \dfrac{l}{2\nu} = X^{-1} \dfrac{\sin(2\xi+\zeta)}{\cos(\xi+\zeta)}, \\ \dfrac{\beta}{2\nu} = X^{-1}\cos\xi, \quad \dfrac{a}{2\nu} = X^{-1}\cos\xi \operatorname{tg}(\xi+\zeta). \end{cases}$$

Znalazłszy odpowiednią wartość q, obliczymy spółczynniki rozwinięć φ, ψ i E w sposób podobny jak dla pierwiastków rzeczywistych. Będą one wogóle zespolone. Części rzeczywiste wzorów (21) na b, c i ε i spółczynniki przy $i = \sqrt{-1}$ przedstawiają dwa oddzielne rozwiązania szczególne równań ruchu, różniące się od siebie tylko fazą. Kładąc:

$$\varphi = \varphi_1(\omega) + i\varphi_2(\omega), \quad \psi = \psi_1(\omega) + i\psi_2(\omega), \quad E = E_1(\omega) + i E_2(\omega),$$

i biorąc czynnik przy i we wzorach (21) jako rozwiązanie, będziemy mieli:

$$(21')\quad \begin{cases} b = e^{-at}[\varphi_1\cos(h\lambda+\beta t) - \varphi_2\sin(h\lambda+\beta t)], \\ c = e^{-at}[\psi_1\sin(h\lambda+\beta t) + \psi_2\cos(h\lambda+\beta t)], \\ \varepsilon = e^{-at}[E_1\sin(h\lambda+\beta t) + E_2\cos(h\lambda+\beta t)]. \end{cases}$$

Otrzymujemy tedy, jako rozwiazanie szczególne równań ruchu względnego, fale zanikające. Wszelki ruch powietrza, powstający w atmosferze wirującej z tarciem proporcyonalnem do prędkości, składa się tylko z takich fal. W każdej z klas $h = 1, 2, 3...$ istnieje znowu nieskończenie wiele typów; jeżeli $\beta < 0$, to będziemy mieli falę zanikającą, rozchodzącą się na wschód; jeżeli $\beta > 0$, to otrzymujemy fale zanikające, postępujące na zachód. Te ostatnie dzielą się podobnież jak w przypadku bez tarcia, na fale zachodnie rodzaju pierwszego, rozchodzące się szybko, i na fale rodzaju drugiego, rozchodzące się bardzo wolno. Oto przykłady tych fal, podane przez Margulesa dla czasu obrotu kuli bardzo blizkiego 24 godzin.

Digitized by Google

Fale zanikające parzyste klasy pierwszej, typu I. (T—czas obiegu fali, θ—czas obrotu kuli.)

$q = Xe^{\xi i}$		l	α	β	T	θ
X	ξ	(godziny^{-1})			godziny	
A) Fala postępująca na zachód rodzaju pierwszego:						
1,2	8°30′	0,352	0,287	0,430	14,60	24,07
B) Fala postępująca na wschód:						
1,0	93°27′	0,593	0,069	—0,032	197,0	23,93
C) Fala postępująca na zachód rodzaju drugiego:						
7	65°50′	0,153	0,085	0,030	204,3	24,12

Najbardziej zasługują ua uwagę czas obiegu T i spółczynnik α; przytaczamy je jeszcze w osobnej tabelce w zestawieniu z czasem obiegu fal bez tarcia; zamiast α podana jest wielkość $e^{-\alpha t}$ dla $t = 24$ godzin, wskazująca do jakiego ułamku swej wielkości początkowej maleje amplituda fali po upływie 24 godzin.

Tarcie	Czas obiegu	Ubytek w 24 godzin
Fala zachodnia rodzaju pierwszego, typ I.		
$l = 0$	13,9 godzin	
$l = 0{,}352$ godziny^{-1}	14,6	$\frac{1}{983}$
Fala wschodnia, typ I.		
$l = 0$	36,6 godzin	
$l = 0{,}593$ godziny^{-1}	197,0 „	$\frac{1}{5{,}2}$
Fala zachodnia rodzaju drugiego, typ I.		
$l = 0$	130,7 godzin	
$l = 0{,}153$ godziny^{-1}	204,0 „	$\frac{1}{7{,}7}$

Digitized by Google

Jakkolwiek spółczynnik tarcia wypadł rozmaity, i dla ścisłości trzebaby jeszcze zbadać, o ile dane przytoczone zmieniają się w zależności od tarcia, jednak już odrazu stają się widoczne dwa wyniki: 1° czas obiegu fali zachodniej rodzaju pierwszego wzrasta bardzo wolno z tarciem, zaś w fali wschodniej i zachodniej rodzaju drugiego rośnie w wysokim stopniu. 2° Fala zachodnia rodzaju pierwszego zanika nader szybko w porównaniu z pozostałemi falami. Przekonywamy się więc, że fale, niezgodne z regułą Buys-Ballota, zanikają daleko szybciej pod wpływem tarcia niż te, w których ruchy stosują się do wspomnianej reguły.

Streszczając wyniki, osiągnięte z badania fal swobodnych, widzimy, iż z pośród fal swobodnych klasy pierwszej najbardziej zbliżonym okresem do 24 godzin (dla temperatury bezwzględnej 273°) jest okres fali zachodniej rodzaju pierwszego, typu I, wynoszący 13,87 godzin bez tarcia, i powiększający się do 14,6 godzin przy tarciu. W falach zaś klasy drugiej znajdujemy okres bardzo blizki 12 godzin, wynoszący dla fali zachodniej rodzaju pierwszego typu I 11,94 godzin. Mimo braku obliczeń, o ile okres ten powiększa się wskutek tarcia, można jednak przypuszczać, że powiększenie jest również nieznaczne, jak w klasie pierwszej. Okoliczność ta, zależna jedynie od rozmiarów i własności atmosfery, jest powodem, że amplituda półdziennej fali wymuszonej ciśnienia jest stosunkowo bardzo znaczna.

ROZDZIAŁ IV.

Ruchy powietrza peryodycznie ogrzewanego.

§ 12. Całodzienna i półdzienna fala ciśnienia.

Otrzymany z obserwacyj średni przebieg dzienny ciśnienia barometrycznego dla jakiegokolwiek miejsca daje się przedstawić dość wiernie, jako suma dwóch fal, całodziennej i półdziennej:

$$C_1 \sin(\nu\vartheta + \delta_1) + C_2 \sin(2\nu\vartheta + \delta_2).$$

C_1, C_2, δ_1, δ_2 są funkcyami czasu rocznego, $2\pi/\nu$ równa się jednej dobie, ϑ oznacza czas prawdziwy miejscowy

Digitized by Google

Zadaniem rachunku jest wykazać, jakie fale powstają w atmosferze pod działaniem zmian peryodycznych temperatury. Temperaturę jako funkcyę czasu możemy również przedstawić za pomocą sumy nieskończonej fal o okresach 24, 12, 6 i t. d. godzin. Rozwiązanie zagadnienia w całej ogólności byłoby rzeczą zbyt zawiłą. Ponieważ w równaniach aerodynamicznych ograniczyliśmy się tylko do wyrazów liniowych, więc można rozpatrywać oddzielnie wpływ pojedyńczych fal z wspomnianego szeregu. Będziemy więc rozpatrywali w dalszym ciągu falę wymuszoną, wywołaną przez falę całodzienną temperatury, i falę wymuszoną, powstającą przez falę półdzienną temperatury.

Uprzednio jednak zajmiemy się drganiami powietrza w rurze nieskończonej.

§ 13. Fale ciśnienia w rurze.

Oś rury niechaj służy za oś x, temperatura bezwzględna $T = T_0(1+\tau)$, ciśnienie $p = p_0(1+\varepsilon)$, prędkość u, spółczynnik tarcia—l. Wielkości τ, ε i u uważamy jako wartości niewielkie. Równania ruchu są podług wzorów (3), § 1:

$$(1) \qquad -RT\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + lu, \qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial\tau}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Kładziemy $\tau = A \sin(mx+nt)$.

Dla m i n dodatnich będzie to fala temperatury, rozchodząca się w kierunku $-x$. $L = \frac{2\pi}{m}$ — długość fali, $\theta = 2\pi/n$ — okres fali, $L/\theta = n/m = V$ — prędkość rozchodzenia się fali.

Rozpatrzymy naprzód ruch bez tarcia ($l=0$). Rozwiązanie będzie miało postać:

$$(2) \quad \varepsilon = A \cdot \frac{V^2}{V^2 - c^2} \sin(mx+nt), \quad u = -A \cdot \frac{Vc^2}{V^2 - c^2} \sin(mx+nt),$$

gdzie $c = \sqrt{RT}$ oznacza prędkość rozchodzenia się fali izotermicz-

Digitized by Google

nej, a więc swobodnej [1]. Widoczne są dwa przypadki: 1° Jeżeli prędkość rozchodzenia się fali wymuszonej jest większa niż fali swobodnej ($V > c$), to maximum ciśnienia przypada jednocześnie z maximum temperatury i w miejscu tego maximum panuje największa prędkość powietrza (u) w kierunku rozchodzenia się ($-x$). 2° Jeżeli fala wymuszona biegnie wolniej niż fala swobodna ($V < c$), wówczas maximum ciśnienia wypada jednocześnie z minimum temperatury, i towarzyszy im najsilniejszy wiatr w kierunku rozchodzenia się fali ($-x$).

Przy uwzględnieniu tarcia, równania (1) prowadzą do rozwiązań:

$$\varepsilon = KA \sin(mx + nt + \eta), \quad u = MA \sin(mx + nt + \zeta),$$

$$(3) \quad \begin{cases} K = \dfrac{nn'}{b^2}, \quad \cos\eta = \dfrac{n}{n'} \cdot \dfrac{a^2 + l^2}{b^2}, \quad \sin\eta = \dfrac{l}{n'} \dfrac{RTm^2}{b^2}, \\ M = \dfrac{RTmn}{b^2}, \quad \cos\zeta = -\dfrac{a^2}{b^2}, \quad \sin\zeta = -\dfrac{nl}{b^2}, \end{cases}$$

$$\pm a^2 = n^2 - RTm^2, \quad b^2 = \sqrt{a^4 + n^2 l^2}, \quad n' = \sqrt{n^2 + l^2}.$$

W przypadku pierwszym $V > c$ maximum ciśnienia wyprzedza maximum temperatury; najsilniejszy wiatr następuje jeszcze wcześniej i dla bardzo wielkiego tarcia zbliża się ku miejscu ciśnienia średniego ($\varepsilon = 0$). Gdy $V < c$, wówczas maximum ciśnienia pozostaje w tyle za maximum temperatury; miejsca najsilniejszych wiatrów przypadają również w pobliżu ciśnienia średniego.

Wyniki, otrzymane dla rury, nie są bez znaczenia dla atmosfery ziemskiej, gdyż mogą być zastosowane z pewnemi ograniczeniami do powietrza, zamkniętego w pierścieniu kołowym.

---

[1]) Zakładając w równaniach (1) $\tau = 0$, $l = 0$, otrzymamy równania ruchu swobodnego powietrza w rurce bez tarcia, z których z łatwością sprawdzimy podaną prędkość rozchodzenia się fali swobodnej. Dla $T = 273°$, jest $c = 279{,}9$ m / sek.

Digitized by Google

§ 14. Powietrze na kuli nieruchomej, bez tarcia.

Kładąc w równaniach (8) § 2 $\nu = 0$ i rugując b i c, otrzymamy:

$$(4) \qquad \frac{S^2}{RT_0}\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}\right) + \frac{1}{\sin\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}\sin\omega\right) + \frac{\partial^2\varepsilon}{\sin^2\omega\,\partial\lambda^2} = 0.$$

Całodzienna fala temperatury $\tau = A\sin\omega\sin(\lambda + nt)$ wywołuje falę ciśnienia:

$$(5) \qquad \varepsilon = B\sin\omega\,.\sin(\lambda + nt); \quad B\left(\frac{n^2S^2}{RT_0} - 2\right) = A\frac{n^2S^2}{RT_0}.$$

Dla $T_0 = 273^0$, $n = 2\pi/24.60.60$, S—promienia ziemi i $p_0 = 760$mm. — wahanie temperatury na równiku o 1^0C wywołuje wahanie ciśnienia o 10,4 mm.

Pod wpływem fali temperatury $\tau = A\sin^2\omega\,.\sin(2\lambda + 2nt)$ powstaje fala ciśnienia:

$$(6) \qquad \varepsilon = B\sin^2\omega\,.\sin(2\lambda + 2nt); \quad B\left(\frac{4n^2S^2}{RT_0} - 6\right) = A\frac{4n^2S^2}{RT_0}.$$

Wzór ten daje dla półdziennej fali temperatury o amplitudzie 1^0C wahanie ciśnienia 6,2mm. na równiku.

Widzimy, iż na kuli nieruchomej półdzienna fala ciśnienia nie okazuje przewagi nad całodzienną. Wobec tego jest rzeczą ciekawą, w jakim stosunku znajdują się okresy fal swobodnych do 24 i 12 godzin.

Wzory (5) i (6) § 7 dają nam dla fal swobodnych na kuli nieruchomej okresy następujące:

klasa pierwsza:	28,07;	16,20 i t. d. godzin,
klasa druga:	16,20;	11,46 „ „

Widzimy, że w klasie drugiej istnieje fala o okresie dość blizkim 12 godzin: należy jednak przypomnieć, iż na kuli nieruchomej niema fal postępowych, a tylko stojące. Dla kuli wirującej okres ten jeszcze bardziej zbliża się do 12 godzin, i fala półdzienna ciśnienia ma widoczną przewagę.

Digitized by Google

§ 15. Kula wirująca. Fala całodzienna bez tarcia.

Równania ruchu względnego powietrza dla atmosfery bardzo cienkiej, z uwzględnieniem jedynie ruchów poziomych (r = stałej = S; $a = 0$), są według wzorów (8), § 2:

$$(7)\quad \begin{cases} -\dfrac{RT_0}{S}\cdot\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} = \dfrac{\partial b}{\partial t} - 2\nu\cos\omega\,.\,c\,, \\[2ex] -\dfrac{RT_0}{S}\cdot\dfrac{\partial\varepsilon}{\sin\omega\,.\,\partial\lambda} = \dfrac{\partial c}{\partial t} + 2\nu\cos\omega\,.\,b\,, \\[2ex] S\left(\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \dfrac{\partial\tau}{\partial t}\right) + \dfrac{1}{\sin\omega}\left\{\dfrac{\partial(b\sin\omega)}{\partial\omega} + \dfrac{\partial c}{\partial\lambda}\right\} = 0\,. \end{cases}$$

Kładziemy: $\tau = A(\omega)\sin(\lambda+\nu t)$. Rozwiązań równań (7) szukamy w postaci następującej:

$$\varepsilon = E(\omega)\,.\sin(\lambda+\nu t),\quad b = \varphi(\omega)\,.\cos(\lambda+\nu t),\quad c = \psi(\omega)\,.\sin(\lambda+\nu t).$$

po podstawieniu w równania (7) znajdziemy:

$$\varphi = \frac{RT_0}{\nu S}\cdot\frac{\dfrac{dE}{d\omega} + E\dfrac{2\cos\omega}{\sin\omega}}{1-4\cos^2\omega},\quad \psi = -\frac{RT_0}{\nu S}\,\frac{\dfrac{dE}{a\omega}2\cos\omega + \dfrac{E}{\sin\omega}}{1-4\cos^2\omega},$$

$$\nu S(E-A) + \frac{1}{\sin\omega}\left\{\frac{d(\varphi\sin\omega)}{d\omega} + \psi\right\} = 0.$$

Dla wyrugowania φ i ψ wprowadzimy funkcyę pomocniczą $\Phi(\omega)$:

$$\Phi(\omega = \frac{\nu S}{RT_0}\varphi(\omega)\,.\sin\omega,\quad (1-4\cos^2\omega)\,\Phi = \frac{1}{\sin\omega}\cdot\frac{d(E\sin^2\omega)}{d\omega},$$

$$(8)\quad \begin{cases} E = \dfrac{1}{\sin^2\omega}\displaystyle\int\Phi(\omega)\,.\sin\omega\,.(4\sin^2\omega-3)\,d\omega\,, \\[2ex] \dfrac{\nu^2S^2}{RT_0}(E-A) + \dfrac{1}{\sin\omega}\left\{\dfrac{d\Phi}{d\omega} - \Phi\dfrac{2\cos\omega}{\sin\omega} - \dfrac{E}{\sin\omega}\right\} = 0. \end{cases}$$

Digitized by Google

Z ostatniego równania można znaleść $E(\omega)$, jeżeli jest znana funkcya $A(\omega)$, t. j. zależność amplitudy temperatury od szerokości geograficznej. W tym celu przedstawimy Φ zapomocą szeregu:

$$(9) \qquad \Phi(\omega) = \cos\omega\,(a_1 \sin\omega + a_3 \sin^3\omega + a_5 \sin^5\omega + \ldots$$

wówczas otrzymamy :

$$(10) \quad \begin{cases} E(\omega) = b_1 \sin\omega + b_3 \sin^3\omega + b_5 \sin^5\omega + \ldots \\ b_1 = -a_1, \quad b_2 = \dfrac{4a_1 - 3a_3}{5}, \quad b_5 = \dfrac{4a_3 - 3a_5}{7} \ldots \end{cases}$$

Przypuszczamy, że amplituda temperatury maleje z dostawą szerokości geograficznej, t. j. kładziemy :

$$A(\omega) = C \sin\omega\,; \quad \tau = C \sin\omega \,.\, \sin(\lambda + \nu t).$$

Oznaczywszy dla skrócenia $\nu^2 S^2 / RT_0 = k$, podstawiamy szeregi (9) i (10) w równanie (8) i, przyrównywując do siebie spółczynniki przy jednakowych potęgach wielkości $\sin\omega$ i $\cos\omega$, znajdziemy następujące związki dla wyznaczenia spółczynników $a_1, a_3, a_5 \ldots$

$$\left(1 + \frac{3}{5}\right) a_3 - \left(k + \frac{4}{5}\right) a_1 - k\,C = 0\,,$$

$$\left(3 + \frac{3}{7}\right) a_5 - \left(\frac{3}{5} k + \frac{4}{7} + 2\right) a_3 + \frac{4}{5} k a_1 = 0\,,$$

$$\left(j - 2 + \frac{3}{j+2}\right) a_j - \left(\frac{3}{j} k + \frac{4}{j+2} + j - 3\right) a_{j-2} + \frac{4}{j} k a_{j-4} = 0.$$

$$(11) \qquad j = 5, 7, 9, \ldots$$

Zdawałoby się, że spółczynnik a_1 jest nieoznaczony. Jednak tak nie jest. Równania (11) rozwiązujemy według metody Laplace'a; napiszemy równanie ogólne w postaci:

$$(12) \quad \frac{a_{j-2}}{a_{j-4}} = \frac{4k(j+2)}{3k(j+2) + (j-2)j(j+2) - (j-1)j(j+1)\dfrac{a_j}{a_{j-2}}}.$$

Z następującego z kolei równania wyrazimy podobnież a_j / a_{j-2},

Digitized by Google

podstawimy w (12) i t. d. Otrzymamy ułamek łańcuhowy nieskończony, począwszy od drugiego z równań (11):

$$(13) \qquad \frac{a_3}{a_1} = \cfrac{4k.7}{N_1 - \cfrac{Z_3}{N_3 - \cfrac{Z_5}{N_5 - \dots}}}$$

$$N_1 = 3k.7 + 3.5.6; \quad N_3 = 3k.9 + 5.7.8; \quad N_5 = 3k.11 + 7.9.10; \dots$$

$$Z_3 = 4k.4.5.6.9; \quad Z_5 = 4k.6.7.8.11; \dots$$

Równanie (13) i pierwsze z równań (11) dają nam wartości a_1 i a_3. Następne spółczynniki obliczają się z łatwością. Są one proporcyonalne do amplitudy temperatury C. Podstawiamy we wzorze (10) $b_1 = C\beta_1$, $b_2 = C\beta_2$ i t. d., t. j. kładziemy:

$$(14) \qquad \varepsilon = C \sin(\lambda + \nu t)\ [\beta_1 \sin\omega + \beta_3 \sin^3\omega + \beta_5 \sin^5\omega + \dots],$$

Margules podaje wartości spółczynników β dla dwóch temperatur 25°,7C i 0°C [promień ziemi $S = 4.10^7/2\pi$ m, $R = 287$].

	β_1	β_3	β_5	β_7	β_9
$T_0 = 298^0,7$	1,119	— 0,448	— 0,326	— 0,090	— 0,013
$T_0 = 273^0$	1,146	— 0,423	— 0,370	— 0,106	— 0,018

Największe zmiany ciśnienia zachodzą w pobliżu równoleżnika 45°. Wahania temperatury o amplitudzie 1° (2C=1/273) dają w temperaturze $T_0 = 273^0$ na równiku 0,64 mm, różnicy ciśnienia barometrycznego, a na 45° szerokości 1.6 mm.

§ 16. Kula wirująca. Fala półdzienna, bez tarcia.

Kładąc w równaniach (7) $\tau = A(\omega)\sin(2\lambda + 2\nu t)$, będziemy mieli:

$$\varepsilon = E(\omega)\sin(2\lambda + 2\nu t), \quad b = \varphi(\omega)\cos(2\lambda + 2\nu t), \quad c = \psi(\omega)\sin(2\lambda + 2\nu t)$$

Digitized by Google

dalej:

$$\sin^2\omega \,.\, \varphi = \frac{RT_0}{2\nu S}\left(\frac{dE}{d\omega} + E\frac{2\cos\omega}{\sin\omega}\right), \quad \sin^2\omega \,.\, \psi = -\frac{RT_0}{2\nu S}\left(\frac{dE}{d\omega}\cos\omega + \frac{2E}{\sin\omega}\right),$$

$$2\nu S\,(E-A) + \frac{1}{\sin\omega}\left\{\frac{d\,(\varphi\sin\omega)}{d\omega} + 2\psi\right\} = 0.$$

Po wyrugowaniu φ i ψ będzie:

$$\frac{d^2E}{d\omega^2}\sin^2\omega - \frac{dE}{d\omega}\sin\omega\cos\omega + E\,(4k\sin^4\omega + 2\sin^2\omega - 8) = 4k\,.\,A\,(\omega)\,.\,\sin^4\omega. \tag{15}$$

Przyjmujemy $\tau = C\sin^2\omega\,.\,\sin(2\lambda+2\nu t)$, t. j. $A = C\sin^2\omega$ i przedstawiamy $E(\omega)$ za pomocą szeregu:

$$E(\omega) = C\,(a_0 + a_2\sin^2\omega + a_4\sin^4\omega + \ldots) \tag{16}$$

Podstawiając w równanie (15) i przyrównywując do siebie spółczynniki przy jednakowych potęgach wielkości $\sin\omega$ i $\cos\omega$, przekonamy się, iż $a_0=0$, $a_2=0$, pozostałe zaś spółczynniki rozwinięcia (16) czynią zadość warunkom:

$$\left\{\begin{array}{l} (4\,.\,6-8)\,a_6 - (3\,.\,4-2)\,a_4 - 4kC = 0, \\ (j^2+6i)\,a_{j+4} - (j^2+3j)\,a_{j+2} + 4ka_j = 0, \quad j = 4, 6, 8\ldots \end{array}\right. \tag{17}$$

z których obliczymy je, jak poprzednio, za pomocą ułamków łańcuchowych. Poniżej zamieszczamy wartości spółczynników α dla temperatur 25°,7C; 0°C; — 3°9C i — 6°,3C.

$$\varepsilon = C\sin(2\lambda+2\nu t)\,[a_4\sin^4\omega + a_6\sin^6\omega + a_8\sin^8\omega + \ldots]$$

	a_4	a_6	a_8	a_{10}	a_{12}
$T_0 = 298°,7$	— 6,196	— 3,247	— 0,724	— 0,092	— 0,008
$T_0 = 273°$	— 37,99	— 23,06	— 5,75	— 0,81	— 0,07
$T_0 = 269°,1$	— 247,8	— 154,2	— 39,2	— 5,6	— 0,5
$T_0 = 266°,7$	+ 101,8	+ 64,3	+ 16,5	+ 2,4	+ 0,2

Liczby te wypadły znacznie większe, niż analogiczne spółczynniki β rozwinięcia dla fali całodziennej; prócz tego wykazują one

Digitized by Google

wybitną zależność od temperatury, podczas gdy spółczynniki β zmieniają się bardzo nieznacznie wraz z temperaturą.

Dla temperatury blizkiej -5^0C ($T=268^0$) spółczynnik α_4 zmienia się od $-\infty$ do $+\infty$, co następuje na skutek tego, iż w pobliżu tej temperatury okres drgania swobodnego atmosfery (klasy drugiej, typu I) staje się dokładnie równym 12 godzinom.

Powyzej tej temperatury faza fali ciśnienia jest wprost przeciwna fazie temperatury, poniżej zaś jest z nią zgodna. Tłómaczy się to tem, że w pierwszym przypadku fala wymuszona ciśnienia rozchodzi się wolniej niż fala swobodna, której okres, jak widzieliśmy w § 10, wynosi w temperaturze 0^0C 11,94 godzin: w przypadku drugim fala ta rozchodzi się szybciej.

W temperaturze $T_0 = 298^0,7$ mamy na równiku:

$$\varepsilon = -10.26 \,.\, C \sin(2\lambda + 2\nu t).$$

Amplituda półdziennej fali temperatury $0,038^0$ już wystarczyłaby do wytworzenia 1mm różnicy ciśnienia.

Margules obliczył też zmiany ciśnienia pod wpływem przypływów i odpływów atmosfery z równań podobnych do (7) z tą tylko różnicą, że $\tau = 0$ i zamiast $-RT_0\varepsilon$ występuje $V - RT_0\varepsilon$, gdzie V oznacza potencyał Słońca lub Księżyca. Od Słońca powstałoby na równiku wahanie półdzienne ciśnienia o amplitudzie 0,24mm, od Księżyca zaś około 0,7mm. Liczby te są daleko większe niż te, które daje obserwacya.

§ 17. Fale wymuszone w atmosferze wirującej z uwzględnieniem tarcia.

Równania ruchu względnego dla takich samych założeń jak poprzednio, dla spółczynnika tarcia l, są:

$$(10)\quad \begin{cases} -\dfrac{RT_0}{S}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} = \dfrac{\partial b}{\partial t} + lb - 2\nu\cos\omega \,.\, c, \\[2ex] -\dfrac{RT_0}{S}\,.\,\dfrac{\partial\varepsilon}{\sin\omega\,.\,\partial\lambda} = \dfrac{\partial c}{\partial t} + lc + 2\nu \,.\, \cos\omega \,.\, b, \\[2ex] \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \dfrac{\partial\tau}{\partial t} + \dfrac{1}{S\sin\omega}\left(\dfrac{\partial(b\sin\omega)}{\partial\omega} + \dfrac{\partial c}{\partial\lambda}\right) = 0. \end{cases}$$

Digitized by Google

Szukamy fali wymuszonej ciśnienia pod wpływem fali temperatury $\tau = F(\omega)\sin(h\lambda + nt)$. Jeżeli $h = 1$, $n = \nu$, będzie to fala całodzienna; jeżeli zaś $h = 2$, $n = 2\nu$, to będzie to fala półdzienna i t. d. Atoli dla dogodności rachunku przedstawimy τ jako funkcyę wykładniczą z wykładnikiem urojonym:

$$\tau = F(\omega)\, e^{i(h\lambda + nt)}. \tag{19}$$

Rachunek prowadzimy w sposób zupełnie analogiczny, jak w § 11. Rozwiązań szukamy w postaciach:

$$b = i\varphi(\omega)\, e^{i(h\lambda + nt)}, \quad c = \psi(\omega)\, e^{i(h\lambda + nt)}, \quad s = E(\omega)\, e^{i(h\lambda + nt)}. \tag{20}$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$n - li = r, \quad \frac{2\nu}{r} = q, \quad \frac{nrS^2}{RT_0} = z.$$

o wyrugowaniu ψ z równań (18) będzie:

$$\left\{\begin{aligned} &(h^2 - z\sin^2\omega)\, E = \frac{rS}{RT_0}\sin\omega \cdot \left(\frac{d(\varphi\sin\omega)}{d\omega} - hq\cos\omega \cdot \varphi\right) - z\sin^2\omega \cdot I, \\ &\frac{hq}{\sin\omega} \cdot E + \frac{dE}{d\omega} = \frac{rS}{RT_0}\,(1 - q^2 + q^2\sin^2\omega)\,\varphi. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Ograniczymy się do przypadku, gdy temperatury i ciśnienia są symetryczne względem równika (rozwiązania parzystej). Rachunek łatwo sprowadza się do przypadku fal swobodnych (§ 11), o ile przedstawimy funkcyę $F(\omega)$ przez szereg skończony potęg nieparzystych wielkości $\sin\omega$ dla h nieparzystych, i potęg parzystych wielkości $\sin\omega$ dla h parzystych i jeżeli pierwszym wyrazem szeregu jest $\sin^h\omega$ lub potęga wyższa.

F a l a c a ł o d z i e n n a. Dane jest:

$$F(\omega) = \frac{1}{nS}\,(C_1\sin\omega + C_3\sin^3\omega + \ldots)$$

i mamy wyznaczyć spółczynniki rozwinięć:

$$\varphi(\omega) = \cos\omega\,(a_0 + a_2\sin^2\omega + a_4\sin^4\omega + \ldots),$$

$$E(\omega) = \frac{rS}{RT_0}\,(A_1\sin\omega + A_3\sin^3\omega + \ldots).$$

Digitized by Google

Po podstawieniu tych rozwinięć w równania (21) otrzymamy dwa szeregi warunków, którym muszą czynić zadość spółczynniki a_j i A_i. Po wyrugowaniu spółczynników A_1, A_3 ... znajdziemy szereg zależności pomiędzy szukanemi a_0, a_2 ... i danemi C_1, C_3 ...:

$$(22)\begin{cases} h^2 \dfrac{(1-q^2)\,a_0}{1+hq} = (1-hq)\,a_0\,, \\ h^2 \dfrac{(1-q^2)a_2+q^2a_0}{3+hq} - z\,\dfrac{(1-q^2)\,a_0}{1+hq} = (3-hq)a_2-(2-hq)a_0-C_1, \\ h^2 \dfrac{(1-q^2)a_4+q^2a_2}{5+hq} - z\,\dfrac{(1-q^2)a_2+q^2a_0}{3+hq} = (5-hq)a_4-(4-hq)\,a_2-C_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

W powyższych wzorach $h=1$. Jeżeli założymy jeszcze, że zacząwszy od C_3 wszystkie spółczynniki szeregu F są zerami, t. j.

$$\tau = \frac{C_1}{nS}\sin\omega\,.\,e^{t(\lambda+nt)}\,;$$

to trzecie i wszystkie następne z równań (22) będą identyczne z równaniami (15), § 9 dla fal swobodnych. Znaleźliśmy wówczas:

$$\frac{a_j}{a_{j-2}} = \frac{(j+3+q)\,q^2z}{N_{j+1}-\dfrac{Z_{j+3}}{N_{j+3}-\cdots}}\,,\quad \text{a w szczególności}\quad \frac{a_2}{a_0} = \frac{(5+q)\,q^2z}{N_3-\dfrac{Z_5}{N_5-\cdots}}$$

Pierwsze z równań (22) dla $h=1$ jest tożsamością, z drugiego oraz z napisanego dopiero co stosunku a_2/a_0 znajdziemy:

$$a_0 = -\frac{(1+q)\,(3+q)\,C_1}{N_1-\dfrac{Z_3}{N_3\cdots}}$$

Dalej obliczymy:

$$a_2 = \frac{a_2}{a_0}\,a_0\,,\quad a_4 = \frac{a_4}{a_2}\,.\,\frac{a_2}{a_0}\,.\,a_0 \text{ i t. d.}$$

$$A_1 = \frac{(1-q^2)\,a_0}{(1+q)}\,,\quad A_3 = \frac{(1-q^2)\,a_2+q^2a_0}{3+q}\,,\quad A_5 = \frac{(1-q^2)a_4+q^2a_2}{5+q}\,,\text{itd}$$

Digitized by Google

W ten sposób obliczymy funkcye φ i E, a następnie ψ, i zadanie nasze jest rozwiązane.

Tak samo postępowalibyśmy, gdyby C_3 i więcej wyrazów szeregu F były różne od zera. Spółczynniki a_0, a_2, a_4... i A_1, A_3, A_5... są zespolone, wskutek tego będziemy mieli:

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + i\varphi_2(\omega), \qquad E(\omega) = E_1(\omega) + iE_2(\omega),$$

$$\psi(\omega) = \psi_1(\omega) + i\psi_2(\omega).$$

Podstawiając w wyrażenia (20) i biorąc jak w § 11 za rozwiązanie czynniki przy i, otrzymamy:

$$\tau = C\sin\omega \,.\, \sin(\lambda + \nu t),$$

$$b = \varphi_1\cos(\lambda+\nu t) - \varphi_2\sin(\lambda+\nu t), \quad c = \psi_1\sin(\lambda+\nu t) + \psi_2\cos(\lambda+\nu t),$$

$$\varepsilon = E_1\sin(\lambda+\nu t) + E_2\cos(\lambda+\nu t)$$

czyli:

$$b = \Phi\,.\cos(\lambda+\nu t+\delta), \quad c = \Psi\sin(\lambda+\nu t+\eta) \quad \varepsilon = E\sin(\lambda+\nu t+\zeta$$

Wielkości Φ, Ψ, E, δ, η, ζ są funkcyami szerokości geograficznej i tarcia, δ, η, ζ wyrażają przesunięcie fazy względem temperatury. Margules podaje tabelkę wartości b, c i ε co 15^0 szerokości geograficznej dla $C = {}^1/_{273}$, $T_0 = 273^0$, $l = \nu = 0{,}262$ godziny^{-1} oraz rysunki, przedstawiające graficznie rozkład ciśnień i prędkości. We wstępie przytoczyliśmy szczególnie nas interesujące liczby, dotyczące fali ciśnienia ε w zestawieniu z przypadkiem bez tarcia. Przypominamy, że wskutek tarcia amplitudy ciśnienia przeważnie powiększyły się. Największe wahanie ciśnienia otrzymuje się około 20^0 szerokości ($\omega = 70^0$). Maximum ciśnienia wyprzedza maximum temperatury, najwięcej na równiku o 2,2 godziny.

Fala półdzienna. Daną jest: $\tau = F(\omega)e^{i(2\lambda+2\nu t)}$,

$$F(\omega) = \frac{1}{nS}\,(C_2\sin^2\omega + C_4\sin^4\omega \ldots + C_{2m}\sin^{2m}\omega),$$

szukamy spółczynników rozwinięć:

Digitized by Google

$$\varphi = \cos\omega\,(a_1 \sin\omega + a_3 \sin^3\omega + \ldots),$$

$$E = \frac{rS}{RT_0}\,(A_0 + A_2 \sin^2\omega + \ldots).$$

Po podstawieniu powyższych szeregów w równania (21) przekonamy się, iż musi być $A_0 = 0$; po wyrugowaniu A_2, A_3 i t. d. otrzymamy następujące związki:

$$(23)\quad \begin{cases} h^2 \dfrac{(1-q^2)\,a_3 + q^2 a_1}{4+hq} - z\,\dfrac{(1-q^2)\,a_1}{2+hq} = (4-hq)\,a_3 - (3-hq)\,a_1 - C_2, \\ h^2 \dfrac{(1-q^2)a_5 + q^2 a_3}{6+hq} - z\,\dfrac{(1-q^2)\,a_3 + q^2 a_1}{4+hq} = (6-hq)a_5 - (5-hq)a_3 - C_4. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Dla fali półdziennej jest $h = 2$. Bierzemy najprostszy przypadek, gdy prócz C_2 wszystkie pozostałe spółczynniki szeregu F są zerami. Wówczas z drugiego i następnych równań (23) obliczymy:

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{(6+2q)\,q^2 z}{N_4 - \dfrac{Z_6}{N_6 - \ldots}}.$$

Po podstawieniu a_3/a_1 w pierwsze z równań (23) znajdziemy:

$$(24)\qquad a_1 = -\frac{(2+2q)\,(4+2q)\,C_2}{N_2 - \dfrac{Z}{N_4 - \ldots}}$$

Następne spółczynniki rozwinięcia φ obliczymy z ułamków łańcuchowych nieskończonych:

$$(25)\qquad \frac{a_j}{a_{j-2}} = \frac{(j+3+2q)\,q^2 z}{N_{j+1} - \dfrac{Z_{j+3}}{N_{j+3} - \ldots}}, \qquad j = 3, 5, 7 \ldots$$

Dla szeregu $E(\omega)$ będziemy mieli:

$$A_0 = 0, \quad A_2 = \frac{(1-q)\,a_1}{2+2q}, \quad A_4 = \frac{(1-q)\,a_3 + q^2 a_1}{4+2q}, \ldots$$

Digitized by Google

Margules podaje wartości liczebne b, c i ε dla:

$$\tau = \frac{1}{273} \sin^2\omega \,.\, \sin(2\lambda + 2\nu t).$$

$T_0 = 273^0$, l=0,262, jak dla fali całodziennej, z których przytoczyliśmy już we wstępie liczby, dotyczące fali ciśnienia. Uderzająca jest znaczna redukcya amplitudy, np. na równiku (ω=90°) amplituda ε jest największa i wynosi bez tarcia —0,247, pod wpływem tarcia zaś redukuje się do +0,0057. Faza podlega również znacznemu przesunięciu, wynoszącemu 4,4 godziny, t. j. więcej niż 1/3 okresu.

System wiatrów jest w fali wymienionej półdziennej przeciwny regule Buys-Ballota, w fali zaś całodziennej jest z nią zgodny. Mówiąc o falach swobodnych, wykazaliśmy, iż w atmosferze istnieje fala klasy drugiej (o długości równej połowie równoleżnika) o okresie 11,94 godzin. Była to fala zachodnia pierwszego rodzaju, w której ruchy też nie są zgodne z regułą Buys-Ballota. Co do fal swobodnych klasy pierwszej (o długości całego równoleżnika), to mieliśmy tam falę zachodnią pierwszego rodzaju o okresie 13.87 godzin i drugiego rodzaju o okresie 130,7 godzin. Ponieważ fala wymuszona całodzienna (bez tarcia) posiada tę samą fazę co temperatura, więc nie może się znajdować pod wpływem pierwszej z wspomnianych fal swobodnych, gdyż ta, jako szybciej rozchodząca się, wytwarzałaby w całodziennej fali wymuszonej ciśnienia fazę przeciwną względem temperatury, jak w przykładzie powietrza w rurze (obacz § 13). Pozostaje więc fala swobodna zachodnia rodzaju drugiego o okresie 130,7 godzin, do której przyłącza się fala całodzienna ciśnienia. Ponieważ w obu ruchy są zgodne z regułą Buys-Ballota, więc okoliczność ta stwierdza wniosek uczyniony.

§ 18. Dane z obserwacyj. Wahania stojące temperatury. Zakończenie.

Według badań Hanna i Angota maximum ciśnienia w fali całodziennej przypada na powierzchni ziemi niemal po-

Digitized by Google

wszechnie o godz. 6 rano. Sądząc z obserwacyj w górach, amplituda ciśnienia na wysokościach naprzód maleje, około 1500 m. staje się zerem, wyżej znów wzrasta, lecz faza różni się o połowę okresu, czyli maximum ciśnienia przypada o godz. 6 wieczorem. Co do temperatury, to jej maximum następuje na powierzchni ziemi o godz. 3 po południu, w górach w pierwszych godzinach po południu, lecz w wolnej przestrzeni na wysokości prawdopodobnie o godz. 6 wieczorem.

Obliczona przez Margulesa fala całodzienna ciśnienia, posiadająca maximum jednocześnie z temperaturą, nie przedstawia przeto dokładnie przebiegu ciśnienia w naturze. Wynika stąd, że założenie fali temperatury o amplitudzie zależnej jedynie od szerokości geograficznej z pominięciem ruchów pionowych powietrza jest niedostateczne. Amplitudę tę należy uważać też za funkcyę wysokości i długości geograficznej, przyczem, skutkiem wielkich różnic lokalnych na ziemi, funkcya ta otrzymuje bardzo odmienne wartości w miejscowościach blizko położonych. Wahania temperatury mają charakter niezależnych od siebie drgań stojących, odbywających się na niewielkich obszarach.

Zakładając:

$$\tau = Ae^{-\gamma z} \sin(\nu t + \eta),$$

przyczem A na granicach niewielkiego odstępu długości geograficznych szybko zdąża do zera, Margules wyprowadził z równań (1) § 1 wzór przybliżony:

$$\varepsilon = A\left[-\varrho\frac{a}{\gamma+a} + \frac{a}{\gamma}(1-e^{-\gamma z})\right]\sin(\nu t+\eta),$$

gdzie z oznacza wysokość, $a = g/RT$, ϱ jest pewną funkcyą długości geograficznej, mało różną od 1, η stała, tak wybrana, że maximum temperatury wypada o godz. 6 wieczorem.

Jeżeli wziąć $T_0 = 273^0$, $A = 3/273$, $a = 1/8000$, $\gamma = 10a = 1/800$, to dla $\varrho = 1$ wyrażenie ε zmienia swój znak z ujemnego na dodatni na wysokości 1916 m., dla $\varrho = 0{,}9$ na wysokości 1365 m.

Digitized by Google

Z rachunków tych wyprowadza Margules wniosek, iż objawy i charakter wahań całodziennych ciśnienia barometrycznego dają się wyprowadzić z założenia następującego:

W obszarach niewielkich zachodzą niezależne między sobą wahania całodzienne temperatury, których amplituda szybko maleje z wysokością i których maximum przypada na godz. 6 wieczorem.

SPROSTOWANIA.

W tomie X.

Str.	184	*wiersz*	4	od dołu	*zamiast:*	wzrastającej	*powinno być:*	wirującej
„	195	„	11	„	„	pozostające	„	pozostając
„	197	„	4	„	„	we wzorze (4) $\cos^2\omega$	„	$\cos^2\omega$

Digitized by Google

Digitized by Google

E. CESÀRO.

Nowa metoda wyprowadzenia wzorów Trygonometryi kulistej.[1]

W metodzie niniejszej nie robimy żadnych założeń o wielkości ścian a, b, c kąta trójściennego, daje więc ona wzory ogólne—i co najważniejsza—pozwala wyprowadzić je bezpośrednio z dwóch trójkątów prostoliniowych, których boki i kąty są funkcyami elementów kąta trójściennego; innemi słowy, przy pomocy wzorów Trygonometryi płaskiej dostajemy bezpośrednio wzory Trygonometryi kulistej, nie posiłkując się przy wyprowadzaniu wzorów jednych wzorami innemi. Analogie Nepera i wzory Delambre'a odczytujemy wprost, że tak powiem, na samym kącie trójściennym, wzory zaś Eulera i Lhuiliera otrzymujemy, stosując do jednego z rzeczonych trójkątów wzory Trygonometryi płaskiej, dające dostawę kąta lub styczną połowy kąta trójkąta w funkcyi boków.

Trójkąt elementów.

Na krawędziach kąta trójściennego, od jego wierzchołka S począwszy, odmierzamy odległości (rys: 1):

$$SD = SE = SH = 1;$$

boki otrzymanego w ten sposób trójkąta są: $2\sin\frac{a}{2}$, $2\sin\frac{b}{2}$, $2\sin\frac{c}{2}$.

[1]) Z Buletynów Akademii belgijskiej 1905 r., przełożył za upoważnieniem autora W. Bóbr.

Digitized by Google

W punkcie K budujemy kąt płaski kąta dwuściennego A; proste KL i KM, prostopadłe do krawędzi SD, zawsze spotykają podstawy trójkątów równoramiennych SDH, SDE, bez względu na wielkość ścian kąta bryłowego.

1°. Prosta ML jest przeciwrównoległa do prostej EH, o czem przekonywamy się z łatwością, wykreśliwszy linie Sh i Se środkowe trójkątów SDE, SDH. Otrzymane czworokąty $SKLh$, $SKMe$, dają się wpisać w koło, mamy więc: $Dh.DL = DS.DK = De.DM$, a zatem: $DH.DL = DE.DM$.

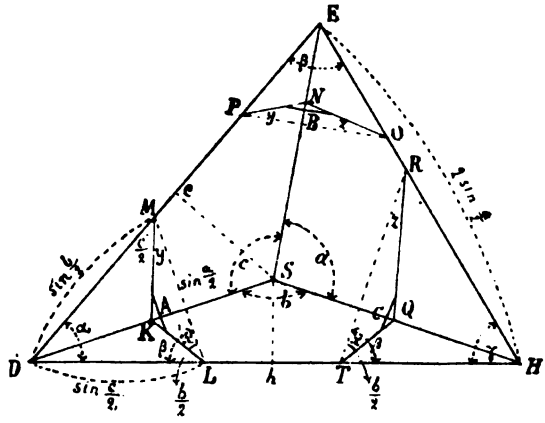


Fig. 1.

Jeżeli więc przyjmiemy, że $ML = \sin\frac{a}{2}$, na zasadzie wyprowadzonej równości będzie: $DL = \sin\frac{c}{2}$, $DM = \sin\frac{b}{2}$.

2°. Kąty L, M trójkąta LKM są prostemi funkcyami kątów dwuściennych kąta trójściennego. Rzeczywiście, zbudujmy w punkcie Q (fig. 1) kąt płaski kąta dwuściennego C i łącząc R z T, otrzymujemy prostą RT, przeciwrównoległą do prostej DE; kąty trójścienne $LMKD$, $TRQH$ mają dwie ściany (β i $KLD = QTH = \frac{b}{2}$), zawierające jeden i ten sam kąt dwuścienny (utworzony przez ścianę SDL z płaszczyzną EDH), przeto i pozostałe ich ściany są sobie równe. Budując płaski kąt dwuściennego B w punkcie N, z łatwością się przekonamy, w tenże sam sposób, że kąty y i z, są też sobie równe.

Digitized by Google

Z tego wnioskujemy, że:

$$x + y = 180^0 - A,$$
$$y + z = 180^0 - B,$$
$$x + z = 180^0 - C;$$

skąd, kładąc jak zwykle:

$$x + y + z - 180^0 = 2E,$$

dostajemy:

$$x = B - E;$$
$$y = C - E;$$
$$z = A - E.$$

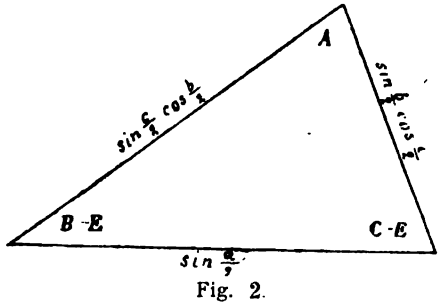


Fig. 2.

Widzimy więc, że trójkąt KML zawiera wszystkie elementy kąta trójściennego, kąty jego są: A, $B-E$, $C-E$, co zaś do boków; to $KL = \sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}$; $KM = \sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$; $LM = \sin\frac{a}{2}$. Trójkąt ten (przedstawiony na fig. 2) nazywać będziemy trójkątem elementów. Stosując do mego wzory Trygonometryi płaskiej, otrzymamy wzory Trygonometryi kulistej. A zatem:

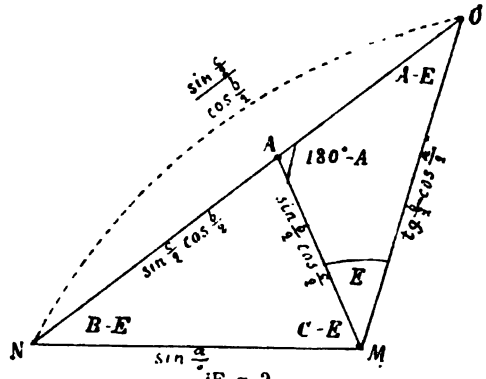
Jeżeli zbudujemy trójkąt płaski, którego kątami są kąty dwuścienne kąta trójściennego, z których dwa są zmniejszone o połowę nadmiaru kulistego, t. j. kąty A, $B-E$, $C-E$, to boki im przeciwległe będą proporcyonalne odpowiednio do $\sin\frac{a}{2}$ $\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$; $\sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}$.

Digitized by Google

Trójkąt pochodny.

Zestawienie dwóch trójkątów elementów da nam nowy trójkąt płaski, którego jednym z kątów będzie połowa nadmiaru kulistego.

Przez wierzchołek M (fig. 3) trójkąta elementów NAM, odpowiadającego kątowi dwuściennemu A, poprowadźmy prostą MO, tworzącą kąt E z prostą AM. Trójkąt NMO jest trójkątem elementów, odpowiadających kątowi dwuściennemu C, gdyż kąty jego są: C, $A-E$, $B-E$; boki więc przeciwległe są proporcyonalne odpowiednio do $\sin\frac{c}{2}$, $\sin\frac{a}{2}.\cos\frac{b}{2}$, $\sin\frac{b}{2}\cos\frac{a}{2}$, a ponieważ bok NM prze-



iF g. 3.

ciwległy kątowi $A-E$ jest równy $\sin\frac{a}{2}$, dzielimy więc pozostałe boki przez $\cos\frac{b}{2}$ i będzie $NO = \frac{\sin\frac{c}{2}}{\cos\frac{b}{2}}$; $MO = \operatorname{tg}\frac{b}{2}\cos\frac{a}{2}$. Trzeci bok trójkąta MAO, który nazwiemy t r ó j k ą t e m p o c h o d n y m, jest: $AO = \frac{\sin\frac{c}{2}}{\sin\frac{b}{2}} - \sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2} = \sin\frac{c}{2}\sin\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}$. Podzieliwszy boki trójkąta pochodnego przez $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$, otrzymamy wynik, przedstawiony na fig. 4. A zatem:

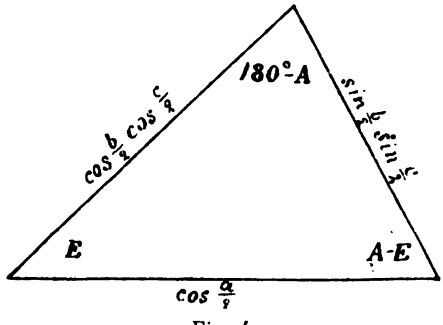
Digitized by Google

Jeśli zbudujemy trójkąt płaski, mający jako kąty: 1° spełnienie kąta dwuściennego kąta trójścienego; 2° tenże kąt dwuścienny, zmniejszony o połowę nadmiaru kulistego; 3° nadmiar kulisty, t. j. kąty 180^0-A, $A-E$, E,—to boki przeciwległe będą proporcyonalne odpowiednio do $\cos\frac{a}{2}$; $\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$; $\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$.

Z tych oto dwóch trójkątów plaskich wyprowadzimy bezpośrednio wszystkie wzory Trygonometryi kulistej [3].

Analogie Nepera.

Wziąwszy pod uwagę, że różnica kątów przy podstawie trójkąta elementów (fig. 2) jest $B-C$ i że w trójkącie płaskim stosunek stycznej



Fig, 4.

połowy różnicy dwóch kątów do stycznej ich sumy (lub do dotycznej połowy trzeciego kąta) równa się stosunkowi różnicy boków do ich sumy, mamy:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}} = \frac{\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}-\sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}}{\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}+\sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}} = \frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}}.$$

[3]) Tu moglibyśmy dodać jeszcze dwa trójkąty, odpowiadające trójkątowi kulistemu biegunowemu, jest to jednak zbyteczne, gdyż łatwo możemy zastąpić a przez 180^0-A i odwrotnie, we wzorach, otrzymanych przy pomocy dwóch pierwszych trójkątów.

Digitized by Google

Taż sama własność trójkąta płaskiego w zastosowaniu do trójkąta pochodnego daje:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}} = \frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}}.$$

Stosując te wzory do kąta kulistego biegunowego, otrzymamy pozostałe dwie analogie.

Wzory Delambre'a.

Proporcyonalność boków do wstaw kątów przeciwległych daje nam w trójkącie elomentów:

$$\frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin A} = \frac{\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}{\sin(B-E)} = \frac{\sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}}{\sin(C-E)}$$

$$= \frac{\sin\frac{b+c}{2}}{\sin(B-E)+\sin(C-E)} = \frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin(B-E)-\sin(C-E)},$$

czyli:

$$\frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin A} = \frac{\sin\frac{b+c}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{\sin\frac{b-c}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}},$$

stąd mamy:

$$\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{\sin\frac{b+c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}; \quad \frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$$

Tym samym sposobem z trójkąta pochodnego możemy wyprowadzić pozostałe wzory D e l a m b r e'a.

Wzór Eulera.

$$\cos E = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

Digitized by Google

By go otrzymać, dość obliczyć w trójkącie pochodnym (fig 4) dostawę kąta E w zależności od boków. Mamy więc:

$$\sin^2\frac{b}{2}\,.\,\sin^2\frac{c}{2}=\cos^2\frac{b}{2}\,.\,\cos\frac{c}{2}+\cos^2\frac{a}{2}-2\cos\frac{a}{2}\,.\,\cos\frac{b}{2}\,.\,\cos\frac{c}{2}\,.\,\cos E;$$

$$4\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{b}{2}.\cos\frac{c}{2}.\cos E=2\cos^2\frac{a}{2}+2\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2}$$

$$=1+\cos a+\cos b+\cos c.$$

Wzór Lhuiliera.

$$\operatorname{tg}^2\frac{E}{2}=\operatorname{tg}\frac{p}{2}\,.\,\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\,.\,\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\,.\,\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}\,.$$

W trójkącie pochodnym obliczamy styczną połowy kąta E w zależności od boków. W tym celu możemy albo postąpić jak wyżej i obliczyć $\sin^2\frac{E}{2}$ i $\cos^2\frac{E}{2}$ w funkcyi boków, albo też bezpośrednio użyć wzoru:

$$\operatorname{tg}^2\frac{A'}{2}=\frac{(p'-b')(p'-c')}{p'(p'-a)};$$

dającego kąt A' trójkąta płaskiego, którego boki są: a'. b', c' i obwód $2p'$. W naszym przypadku jest:

$$2p'=\cos\frac{a}{2}+\cos\frac{b-c}{2};\quad 2p'-2a'=\cos\frac{a}{2}+\cos\frac{b+c}{2};$$

$$2p'-2b'=\cos\frac{b-c}{2}-\cos\frac{a}{2};\quad 2p'-2c'=\cos\frac{a}{2}-\cos\frac{b+c}{2};$$

a zatem:

$$\operatorname{tg}^2\frac{E}{2}=\frac{\cos\frac{b-c}{2}-\cos\frac{a}{2}}{\cos\frac{b-c}{2}+\cos\frac{a}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{a}{2}-\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{a}{2}+\cos\frac{b+c}{2}};$$

a ponieważ:

$$\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\,.\,\operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2},$$

Digitized by Google

mamy więc:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{E}{2} = \operatorname{tg} \frac{a+b-c}{2} . \operatorname{tg} \frac{c-b+a}{2} . \operatorname{tg} \frac{a+b+c}{2} . \operatorname{tg} \frac{b+c-a}{2} \text{ i t. d.}$$

Związki między czterema elementami trójkąta.

a) Związek miedzy trzema bokami trójkąta i jednym z jego kątów.

Związek między trzema bokami i kątem A w trójkącie płaskim elementów jest:

$$\sin^2 \frac{a}{2} = \sin^2 \frac{b}{2} . \sin^2 \frac{c}{2} + \sin^2 \frac{c}{2} \cos^2 \frac{b}{2} - \frac{1}{2} \sin b . \sin . c \cos A .$$

co, po pomnożeniu przez 2, daje:

$$1 - \cos a = (1 + \cos c) \sin^2 \frac{b}{2} + (1 - \cos c) \cos^2 \frac{b}{2} - \sin b . \sin c \cos A,$$

$$= 1 - \cos c . \cos b - \sin b . \sin c . \cos A ,$$

$$\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos A .$$

Uwaga. Gdy chodzi nam o obliczenie kąta w funkcyi boków, możemy zastosować bezpośrednio do trójkąta elementów który bądź ze wzorów, dających połowę kąta w zależności od boków, jak np.:

$$\cos^2 \frac{A'}{2} = \frac{p'(p'-a')}{b'c'} .$$

W naszym przypadku mamy:

$$2p' = \sin \frac{b+c}{2} + \sin \frac{a}{2} = 2 \sin \frac{p}{2} \cos \frac{p-a}{2},$$

$$2p'-2a' = \sin \frac{b+c}{2} - \sin \frac{a}{2} = 2 \sin \frac{p-a}{2} . \cos \frac{p}{2} ,$$

skąd:

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin p \sin (p-a)}{\sin b . \sin c} .$$

Digitized by Google

b) Związek między dwoma bokami i kątami przeciwległemi:

W trójkącie elementów (A) mamy:

$$\frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin A} = \frac{\sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}}{\sin(C-E)};$$

w trójkącie zaś (B):

$$\frac{\sin\frac{b}{2}}{\sin B} = \frac{\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a}{2}}{\sin(C-E)}\ ^{1)};$$

podzieliwszy te równości jednę przez drugą stronami odpowiedniemi otrzymamy:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}.$$

c) Związek między trzema kątami i jednym z boków.

We wzorze

$$\frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin A} = \frac{\sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}}{\sin(C-E)}$$

zastąpmy c przez a i naodwrót:

$$\frac{\sin\frac{c}{2}}{\sin C} = \frac{\sin\frac{a}{2}\,.\,\cos\frac{b}{2}}{\sin(C-E)};$$

następnie, pomnożywszy przez siebie te równości stronami odpowiedniemi, dostaniemy wzór:

$$\cos^2\frac{b}{2} = \frac{\sin(A-E)\sin(C-E)}{\sin A\,.\,\sin C}.$$

---

[1]) To jest—zastępując a przez b i naodwrót.

Digitized by Google

Dla nadania mu postaci zwykłej, znieśmy mianownik, pomnóżmy obie strony przez 2 i zastąpmy podwójny iloczyn wstaw po drugiej stronie różnicą dostaw; będzie:

$$(1+\cos b)\sin A\,.\,\sin C = \cos(A-C) + \cos B,$$
$$\cos C = -\cos A\,.\,\cos C + \sin B\,.\,\sin C\,.\,\cos b.$$

d) Związek między dwoma bokami, kątem między niemi zawartym i kątem jednemu z boków przeciwległym.

Najprostszym sposobem otrzymania wzoru

$$\operatorname{cotg} a\,.\,\sin b = \cos b\,.\,\cos C + \sin C\,.\,\operatorname{cotg} A$$

jest wyrugowanie kąta B z dwóch analogij Nepera (wyprowadzonych z trójkąta elementów i trojkąta pochodnego),

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}, \quad \frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}},$$

co uskuteczniamy z łatwością, wychodząc z równości:

$$A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2},$$

zatem:

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\,.\,\frac{\dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} + \dfrac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}}{1-\operatorname{cotg}^2\frac{C}{2}\,.\,\dfrac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}};$$

$$\operatorname{tg} A = \sin C\,.\,\frac{\sin a}{\sin(a+b)\,.\,\sin^2\frac{C}{2} - \sin(a-b)\cos^2\frac{C}{2}};$$

$$= \sin C\,.\,\frac{\sin a}{\cos a\,.\,\sin b - \sin a\,.\,\cos b\,.\,\cos C};$$

$$\operatorname{cotg} a\,.\,\sin b = \cos b\,.\,\cos C + \sin C\,.\,\operatorname{cotg} A.$$

Digitized by Google

U w a g a. Związek b) między dwoma bokami i kątami przeciwległemi możemy też otrzymać następującemi dwiema drogami.

a) Trójkąt pochodny (fig. 4) daje:

$$\frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin A} = \frac{\sin\frac{b}{2}\,.\,\sin\frac{c}{2}}{\sin E};$$

mnożąc obydwie strony równości przez $2\sin\frac{a}{2}$, dostaniemy:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{2\sin\frac{a}{2}\,.\,\sin\frac{b}{2}\,.\,\sin\frac{c}{2}}{\sin E}.$$

β) Wyrugowawszy C z dwóch analogij N e p e r a, dających zwiazek między A, B, C, a, b, mamy:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}};$$

skąd, na zasadzie, iż

$$\frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}\beta} = \frac{\sin(a+\beta)}{\sin(a-\beta)},$$

będzie:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin b}.$$

Metoda powyższa daje nam też możność otrzymania bezpośrednio, to jest bez uciekania się do wzorów Trygonometryi kulistej, wzorów na promienie kół stycznych wewnętrznie i zewnętrznie do trójkąta kulistego i opisanego na trójkącie kulistym, gdyż wysokości płaskich trójkątów elementów i pola ich są prostemi funkcyami tych promieni.

Pole trójkątów elementów i trójkątów pochodnych.

Z łatwością przekonać się możemy, iż 6 zbudowanych przez nas trójkątów płaskich mają pola równe. Rzeczywiście, każdy z trójkątów elementów jest równoważny ze swym pochodnym.

Digitized by Google

(1) $$S = \frac{1}{8} \sin b \,.\, \sin c \,.\, \sin A\,,$$

około wierzchołków A i $180^0 - A$. Prócz tego trzy trójkąty pochodne mają około wierzchołka E pole jednakie:

(2) $$S = \frac{1}{2} \cos \frac{a}{2} \,.\, \cos \frac{b}{2} \,.\, \cos \frac{c}{2} \sin E$$ [1].

Pole to obliczone dla jednego z sześciu trójkątów płaskich w funkcyi boków, jest:

(3) $$S = \frac{1}{4} \sqrt{\sin p \,.\, \sin(p-a) \,.\, \sin(p-b) \,.\, \sin(p-c)}\,.$$

By otrzymać S w funkcyi kątów, możemy w równaniu (2) zastąpić iloczyn $\cos \frac{a}{2} \,.\, \cos \frac{b}{2} \,.\, \cos \frac{c}{2}$ odpowiedniem wyrażeniem w funkcyi kątów; z trójkąta pochodnego mamy:

$$\frac{\cos \frac{b}{2} \,.\, \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a}{2}} = \frac{\sin (A-E)}{\sin A}\,.$$

Pomnożenie odpowiednich stron wzorów, analogicznych ostatniemu da nam iloczyn szukany i będzie:

$$S = \frac{\sin E \,.\, \sin(A-E) \,.\, \sin(B-E) \,.\, \sin(C-E)}{2 \sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C}\,.$$

Promień koła opisanego na trójkącie kulistym.

Od wierzchołka O kąta bryłowego począwszy, odcinamy na krawędziach jego odległości $OA = OB = OC = 1$ i budujemy w punkcie K

[1]) Pole każdego z sześciu trójkątów płaskich kąta bryłowego spełniającego jest: $S_p = \frac{1}{8} \sin B \,.\, \sin C \,.\, \sin a = \frac{\sin A}{\sin a} \,.\, S$.

Digitized by Google

(fig. 5) trójkąt elementów, którego podstawa $LM = \sin\frac{a}{2}$. Linia OI, prostopadła do płaszczyzny ABC, jest nachylona do wszystkich trzech krawędzi kąta trójściennego pod jednakowym kątem ϱ, odpowiadającym promieniowi kulistemu koła małego na kuli o środku O, promieniu 1 i przechodzącego przez punkty A, B, C.

Płaszczyzna AOI, określona przez linie prostopadłe do płaszczyzn ABC, KLM, jest również prostopadła do linii ML przecięcia tych dwóch płaszczyzn L, prosta zaś KN jest wysokością trójkąta elementów. Mamy więc $KN = AK \operatorname{cotg}\varrho$ i $AK = \sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$.

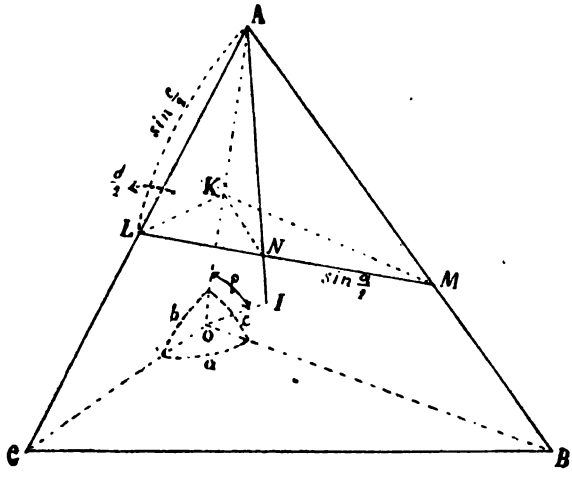


Fig. 5.

A zatem wysokość trójkąta elementów, wychodząca z wierzchołka A (fig. 6), ma długość:

$$h_a = \sin\frac{b}{2} \cdot \sin\frac{c}{2} \operatorname{cotg}\varrho. \tag{4}$$

Możemy więc w trójkącie elementów, posiłkując się wyłącznie wzorami Trygonometryi płaskiej, obliczyć promień kulisty koła, opisanego na trójkącie kulistym.

Pomnożywszy obydwie strony równania (4) przez $\sin\frac{a}{2}$, może-

Digitized by Google

my napisać:

$$2S = \sin\frac{a}{2} \,.\, \sin\frac{b}{2} \,.\, \sin\frac{c}{2} \,.\, \operatorname{cotg}\varrho. \tag{5}$$

Przyrównywając prawą stronę tego równania do iloczynu dwóch jakichkolwiek boków jednego z sześciu trójkątów płaskich przez wstawę kąta między niemi zawartego, otrzymamy rozmaite wzory na ϱ.

A zatem: a) obliczając $2S$ naokoło kąta E jednego z trójkątów pochodnych, mamy:

$$\operatorname{cotg}\varrho = \operatorname{ctg}\frac{a}{2} \,.\, \operatorname{cotg}\frac{b}{2} \,.\, \operatorname{cotg}\frac{c}{2} \,.\, \sin E, \tag{6}$$

b) otrzymamy ϱ w funkcyi boków, zastępując w równaniu (5) pole

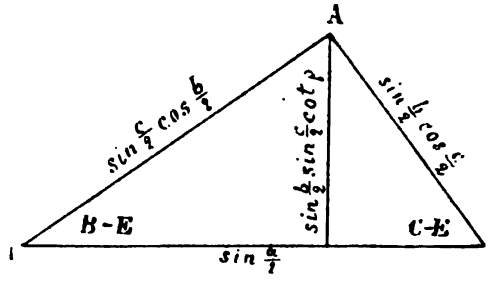


Fig. 6.

trójkąta elementów przez wzór (3); wyrażamy je wtedy w funkcyi boków, a więc:

$$\operatorname{cotg}\varrho = \frac{\sqrt{\sin p \,.\, \sin(p-a) \,.\, \sin(p-b) \,.\, \sin(p-c)}}{2\sin\frac{a}{2} \,.\, \sin\frac{b}{2} \,.\, \sin\frac{c}{2}}; \tag{7}$$

c) aby wyrazić ϱ w funkcyi kątów, możemy, dajmy na to, zastąpić w równaniu (6) iloczyn $\operatorname{cotg}\frac{a}{2}.\operatorname{cotg}\frac{b}{2}.\operatorname{cotg}\frac{c}{2}$ odpowiednim stosunkiem; obliczonym w trójkącie pochodnym bezpośrednio w funkcyi kątów, mamy zatem:

$$\operatorname{cotg}\varrho = \frac{1}{\sin E}\sqrt{\sin E.\sin(A-E).\sin(B-E).\sin(C-E)} \text{ i t. d.} \tag{8}$$

Digitized by Google

Promień r koła wpisanego.

Moglibyśmy łatwo dowieść, że pole S trójkąta elementów jest również funkcyą prostą promienia koła wpisanego [1], co jest jednak zbyteczne wobec tego, że r z łatwością wyprowadzić możemy z ϱ.

Od ϱ do r przechodzimy na zasadzie następującego, prawie oczywistego twierdzenia:

Twierdzenie. Środek koła stycznego, wpisanego w trójkąt kulisty, jest jednocześnie środkiem koła, opisanego na trójkącie biegunowym. promienie zaś tych kół wzajemnie się dopełniają.

Stąd wnioskujemy, że dla przejścia od ϱ do r winniśmy zastąpić ϱ przez 90^0-r, zaś a, b, c, A, B, C odpowiednio przez 180^0-A, 180^0-B, 180^0-C, 180^0-a, 180^0-b, 180^0-c [2].

W ten sposób z wzorów (6), (7) i (8) otrzymujemy:

$$(9)\quad \begin{cases} \operatorname{tg} r = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\,.\,\operatorname{tg}\frac{B}{2}\,.\,\operatorname{tg}\frac{C}{2}\,; \\[2ex] \operatorname{tg} r = \dfrac{\sqrt{\sin E\,.\,\sin(A-B)\,.\,\sin(B-E)\,.\,\sin(C-E)}}{2\cos\frac{A}{2}\,.\,\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\,; \\[2ex] \operatorname{tg} r = \dfrac{1}{\sin p}\sqrt{\sin p\,.\,\sin(p-a)\,.\,\sin(p-b)\,.\,\sin(p-c)}\,. \end{cases}$$

Promienie kół stycznych zewnętrznie.

Przedłużywszy boki trójkąta kulistego aż do ponownego ich przecięcia się, dostaniemy trzy nowe trójkąty; oznaczmy przez ρ_a i r_a promienie kół, opisanego na trójkącie i wpisanego w trójkąt, które otrzymujemy, przedłużając boki b i c. Ten trójkąt różni się od pierwotnego tem, iż b i c są zastąpione odpowiednio przez $\pi-b$ i $\pi-c$, B i C zaś przez $\pi-B$ i $\pi-C$.

---

[1]) $S=\frac{1}{4}\,.\,\sin p\,\operatorname{tg} r$.

[2]) E zastępujemy przez 180^0-p, $A-E$ przez $p-a$ i t. d.

Digitized by Google

Mamy więc wzory ogólne:

$$\varrho = f(a, b, c, A, B, C);$$

$$\frac{\pi}{2} - r = f(\pi - A, \pi - B, \pi - C, \pi - a, \pi - b, \pi - c);$$

$$\varrho_a = f(a, \pi - b, \pi - c, A, \pi - B, \pi - C);$$

$$\frac{\pi}{2} - r_a = f(\pi - A, B, C, \pi - a, b, c).$$

W ten sposób wzór (6) daje wzór (9), jako też:

$$\operatorname{cotg} \varrho_a = \operatorname{cotg} \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{b}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{c}{2} \cdot \sin(A - E);$$

$$\operatorname{tg} r_a = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{C}{2} \cdot \sin(p - a), \text{ i t. d.}$$

Uwaga. Trójkąt, nazwany przez nas pochodnym, możemy otrzymać drogą, zupełnie odmienną od powyżej wskazanej, mianowicie:

Trójkąt pochodny jest trójkątem elementów kąta trójściennego, mającego jednę ścianę wspólną z rozpatrywanym przez nas trójkątem trójściennym, a którego krawędź jest przedłużeniem trzeciej krawędzi tego kąta trójściennego.

Istotnie, dajmy na to, że b jest ścianą wspólną, elementy więc nowego kąta trójściennego są:

$$180^0 - a,\ b,\ 180^0 - c,\ 180^0 - A, B,\ 180^0 - C,$$

nadmiar zaś kulisty (czyli przepełnienie) jest:

$$2E' = 2[B - E]\ ^{1)}.$$

Jeden więc z trójkątów elementów tego kąta trójściennego będzie miał kąty:

$$180^0 - A,\ B - (B - E) = E;\quad 180^0 - C - (B - E) = A - E.$$

co zaś do boków, to te otrzymamy, zastępując w trójkącie elementów (A) pierwszego kąta trójściennego a i c przez ich spełnienia, dostaniemy więc:

$$\cos \frac{a}{2};\ \sin \frac{b}{2} \cdot \sin \frac{c}{2};\ \cos \frac{c}{2} \cdot \cos \frac{b}{2}.$$

[1]) Widać to odrazu, bez rachunku, na kuli, gdyż dwa trójkąty kuliste, określające nasze kąty bryłowe, tworzą ze sobą taśmę kulistą B, której pole jest równe $2B$.

Digitized by Google

W. SIERPIŃSKI.

O pewnym przypadku błędnego stosowania zasady mnożenia prawdopodobieństw.

W 96-tym tomie „Comptes Rendus“ (z roku 1883) J. J. Sylvester z Baltimore, członek korespondent Akademii, w artykule „Sur les nombres de fractions ordinaires inégales qu'on peut exprimer en se servant de chiffres qui n'excèdent pas un nombre donné“, posługując się metodą analogiczną do tej, której użył Czebyszew w „Mémoire sur les nombres premiers“, oblicza wartość przybliżoną funkcyi

$$J(x) = \sum_{n>0}^{n \leqslant x} T(n),$$

oznaczając przez $T(n)$ liczbę liczb pierwszych względem n i nie większych od n.

Autor wykazuje, iż:

$$\lim_{x=\infty} \frac{J(x)}{x^2} = \frac{3}{\pi^2}.$$

i wyprowadza stąd wniosek, iż prawdopodobieństwo, że dwie liczby, których górna granica jest liczbą bardzo wielką, będą względnie pierwszemi, jest $\frac{6}{\pi^2}$. Sylvester przytacza następnie uwagę Franklina, „że wniosek ten może być conajmniej potwierdzony, może nawet w zupełności udowodniony, w sposób następujący:

Digitized by Google

Skoro x jest bardzo wielkie, prawdopodobieństwo, że dwie liczby, mniejsze od x, wzięte na chybił trafił, nie będą jednocześnie podzielne przez liczbę pierwszą p, będzie $1 + \frac{1}{p^2}$ (oczywista pomyłka w druku, powinno być: $1 - \frac{1}{p^2}$). Stąd, szukane prawdopodobieństwo będzie:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\left(1 - \frac{1}{7^2}\right) \cdots\cdots;$$

co jest odwrotnością liczby:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\cdots,$$

zatem jest ono równe $\frac{6}{\pi^2}$. "

Wzór w postaci iloczynu, podany na prawdopodobieństwo, jest rzeczywiście prawdziwy asymptotycznie, ale tylko asymptotycznie, gdyż przy skończonem x ani prawdopodobieństwo, że dwie liczby mniejsze od x nie posiadają wspólnego dzielnika p, nie jest dokładnie $1 - \frac{1}{p^2}$, ani też nie możemy stosować zasady mnożenia prawdopodobieństw, gdyż zjawiska niepodzielności przez kilka liczb danych nie są od siebie niezależne.

Czy na ostatnią okoliczność zwrócił Franklin uwagę, z przytoczonego ustępu wywnioskować niepodobna; w każdym razie przeoczył ją Bachmann, podając w swej „Analitycznej Teoryi liczb" rozumowanie Franklina, ale już w postaci skończonej [1]:

„Szukajmy prawdopodobieństwa, iż dwie liczby $x, y \leqslant n$ są względnie pierwsze. Ponieważ zarówno x jak y może oznaczać każdą z n liczb $1, 2, 3, \ldots, n$, liczba wszystkich możliwych przypadków jest n^2. Pomiędzy niemi jest $\left[\frac{n}{p}\right]^2$ przypadków, w których x, y jednocześnie podzielne są przez liczbę pierwszą $p \leqslant n$, a więc $n^2 - \left[\frac{n}{p}\right]^2$ będzie liczbą przypadków, w których okoliczność ta nie zachodzi; odpo-

[1]) Zahlentheorie II, Leipzig 1894, str. 430.

Digitized by Google

wiednie prawdopodobieństwo będzie zatem $1 - \left[\frac{n}{p}\right]^2 . \frac{1}{n^2}$. Jeżeli teraz $2, 3, 5, \ldots, q$ są wszystkie liczby pierwsze $\leqslant n$, to prawdopodobieństwo, że x, y są liczby względnie pierwsze, będzie prawdopodobieństwem złożonem, że liczby owe nie są o b i e podzielne przez ż a d n ą z tych liczb pierwszych, i na mocy prawideł Rachunku prawdopodobieństwa jest:

$$W = \prod_{p=2}^{q} \left(1 - \left[\frac{n}{p}\right]^2 \frac{1}{n^2}\right).$$

Otóż wzór ten jest błędny, powinno być:

$$W = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mu(k) \left[\frac{n}{x}\right]^2.$$

gdzie $\mu(k)$ oznacza znaną funkcyę M e r t e n s a, równą jedności dodatniej lub ujemnej, stosownie do tego, czy k składa się z liczby parzystej lub nieparzystej czynników pierwszych różnych, oraz równą zeru dla przypadków, kiedy k posiada dzielnik kwadratowy, większy od jedności [1].

---

[1]) Wzór ten wyprowadzić można z łatwością ze wzoru:

$$W = \frac{2\Phi(n) - 1}{n^2}.$$

podanego przez B a c h m a n n a na tejże 430-ej stronicy, biorąc pod uwagę, iż na $\Phi(n)$ na str. 427 mamy wzór:

$$\Phi(n) = \tfrac{1}{2} \sum_{1}^{n} \mu(k) \left(\left[\frac{n}{k}\right]^2 + \left[\frac{n}{k}\right]\right),$$

oraz że:

$$\sum_{1}^{n} \mu(k) \left[\frac{n}{k}\right] = 1,$$

patrz tamże, str. 321. (Obliczając na str. 427 wartość asymptotyczną funkcyi $\Phi(n)$, B a c h m a n n zupełnie niepotrzebnie oblicza wartość przybliżoną szeregu $\sum_{1}^{n} \mu(k) \left[\frac{n}{k}\right]$, której znamy wartość dokładną).

Digitized by Google

Błędność wzoru wykażę na przykładzie $n=3$. Mamy tu 9 przypadków:

$$(1,1);\ (1,2);\ (1,3)$$
$$(2,1);\ (2,2);\ (2,3)$$
$$(3,1);\ (3,2);\ (3,3);$$

w 8-miu z nich (mianowicie we wszystkich oprócz przypadku (2,2), liczby x, y nie dzielą się obie jednocześnie przez liczbę pierwszą 2; w 8-miu również (we wszystkich oprócz (3,3)) liczby x, y nie dzielą się jednocześnie przez 3; prawdopodobieństwo każdego z tych zjawisk jest więc $\frac{8}{9}$, lecz wyliczone dla jednego któregokolwiek z tych zjawisk w przypuszczeniu, że drugie zachodzi, jest tylko $\frac{7}{8}$; zjawiska nie są od siebie niezależne. Wzór Bachmanna na W da nam wartość $\frac{64}{81}$, gdy tymczasem w rzeczywistości jest $W=\frac{7}{9}$.

Digitized by Google

KRÓTKI RYS DZIEJÓW
OBSERWATORYUM WARSZAWSKIEGO
od r. 1820—1900.

O założeniu Obserwatoryum astronomicznego w Warszawie i działalności tegoż aż do roku 1870 włącznie pisał Feliks Kucharzewski w monografii p. t. „O Astronomii w Polsce. Materyały do dziejów nauki tej w kraju naszym", ogłoszonej w tomie I „Pamiętnika Towarzystwa Nauk ścisłych w Paryżu" (Paryż. nakładem Biblioteki Kórnickiej, 1871). Przedmiotowi temu poświęcił on Rozdział XIII-tej tej pracy (str. 191—202) p. t. „Franciszek Armiński i założenie Obserwatoryum Warszawskiego, Prażmowski, Baranowski" i oparł go na artykule J. Bełzy „Opis biegu życia Franciszka Armińskiego, założyciela i dyrektora Obserwatoryum Astronomicznego w Warszawie" (Biblioteka Warszawska, kwiecień 1848); na artykule „Franciszek Armiński, założyciel Obserwatoryum astronomicznego warszawskiego" z Kalendarza, wydawanego przy Gazecie Rolniczej za r. 1864, a przeważnie na licznych notatkach i wyciągach, udzielonych autorowi przez Jana Baranowskiego, dyrektora Obserwatoryum. W tomie I-m naszego pisma (str. 106—114, Warszawa 1897) Jan Kowalczyk, starszy astronom-obserwator, autor niniejszej pracy, ogłosił artykuł p. t. „Obserwatoryum astronomiczne w Warszawie", w którym treściwie zebrał najważniejsze wiadomości o powstaniu Obserwatoryum, o jego kierownikach i pracownikach, o pracach w niem dokonanych aż do r. 1897. W będącym obecnie na ukończeniu tomie I dzieła p. t. „Uniwersytet Warszawski" (1816 — 1830 r.) Józef Bieliński poświęca osobny paragraf tego tomu (str. 476—515) szczegółowemu przedstawieniu dziejów budowy, urządzenia i pierwszych prac naukowych Obserwatoryum, opartemu na źródłach dotychczas nie wyzyskanych z Archiwum Okręgu Naukowego Warszawskiego. Praca niniejsza wielce zasłużonego astronoma, który lat przeszło czterdzieści spędził w murach tej dostrzegalni, oddany nauce i obserwacyom astronomicznym, posiada dla nas wielką wartość, jako żywe świadectwo męża, który, wśród częstych zmian w składzie osobistym Obserwatoryum, pozostał sam jeden na stanowisku aż do chwili obecnej, uosabiając w sobie tradycyę dawnej nauki polskiej w instytucyi, która, po przekształceniu Szkoły Głównej na Uniwersytet, stała się

Digitized by Google

instytucyą naukową rosyjską. Mamy nadzieję, że z chwilą, gdy krajowi przywrócone będą wyższe zakłady naukowe polskie, Obserwatoryum astronomiczne stanie się instytucyą swojską, która służąc nauce, otworzy zarazem podwoje swoje młodzieży krajowej, dla której praca i stanowiska naukowe w Obserwatoryum były przez długie lata prawie zamknięte. *Redakcya.*

1. Założenie Obserwatoryum warszawskiego.[1]

Postanowieniem Cesarza Aleksandra I założono w listopadzie r. 1816 królewski uniwersytet w Warszawie z pięciu wydziałami: teologicznym, prawnym, medycznym, filozoficznym oraz nauk i sztuk pięknych (artium liberalium). Na wydziale filozoficznym, który obejmował nauki matematyczno-przyrodnicze i historyczno-filozoficzne, była także katedra Astronomii, nie było jednakże obserwatoryum astronomicznego, gdyż istniejące w zamku królewskim za Stanisława Augusta obserwatoryum pod zarządem Fryderyka Bystrzyckiego, po wyjeździe króla do Petersburga, zostało zniesione i zbiór narzędzi fizycznych i astronomicznych rozproszył się po świecie.

Profesor Astronomii Franciszek Armiński pragnął wyjednać u władz pozwolenie na założenie obserwatoryum, ale nie odrazu mogło to nastąpić z powodu braku funduszów, które na inne katedry Uniwersytetowi były potrzebne. Zabiegi Armińskiego miały jednak ten skutek, że władze naukowe pozwoliły zamówić w Monachium najniezbędniejsze narzędzia i wybrać odpowiednie miejsce pod budowę obserwatoryum w samem mieście, albo w jego blizkości. Armiński obrał na ten cel miejsce za rogatką mokotowską, na otwartem polu wprost Mokotowa, gdzie projektował pobudować obserwatoryum na samej ziemi, bez pięter, dla narzędzi; były już w tym celu zdjęte plany i wytknięte miejsce na fundamenta. Z powodu jednak znacznej odległości od miasta nie przyjęto tego projektu, wskazano natomiast miejsce w blizkości Uniwersytetu, na tak zwanych Górach denasowskich. Ponieważ władze naukowe zamierzały oprócz obserwatoryum założyć także ogród botaniczny, a na Denasach nie było odpowiednio rozległego placu, przeto i ten drugi wybór został porzucony.

[1]) Feliks Kucharzewski. „O Astronomii w Polsce", Pamiętnik Towarzystwa Nauk ścisłych w Paryżu, tom I i II, str. 191.

Digitized by Google

Dopiero trzeci projekt założenia obserwatoryum i ogrodu botanicznego na jednem miejscu wspólnem, blizko Łazienek królewskich, został przyjęty.

Miejscowość, zwana Łazienkami królewskiemi, obejmowała powierzchnię od Alei ujazdowskiej aż prawie po brzeg Wisły i od ulicy Pięknej aż do Sielc i rogatki belwederskiej. Cała ta przestrzeń była własnością Stanisława Augusta, a po nim przeszła pod cesarski zarząd dóbr pałacowych. Z tej to przestrzeni pozwolił cesarz Aleksander I oddzielić część na cel użyteczności publicznej, mianowicie na założenie obserwatoryum astronomicznego i ogrodu botanicznego; w dniu 15-m grudnia 1818 r. nastąpiło urzędowe oddanie wspomnianej części władzom naukowym Królestwa.

Kiedy już wybór miejsca na obserwatoryum był ostatecznie rozstrzygnięty, zajął się Armiński z budowniczym Szpilowskim sporządzeniem planów, przyczem musiano stosować się do warunków miejsca, na którem miał stanąć nowy zakład. Miejsce to było nader ograniczone i wzdłuż nie mogło się daleko rozciągać, musiano zatem obmyśleć budynek o trzech piętrach i jego ściany zastosować do istniejącej murowanej altany królewskiej na południowej stronie, oraz do oranżeryj, z obu stron tej altany rozciągających się na wschód i na zachód.

Ta okoliczność pociągnęła za sobą ten skutek, że przecięcia dachów w kierunku południka wypadły niesymetrycznie do ścian całego Obserwatoryum.

Pomimo gotowych planów i usilnych starań Armińskiego, ażeby jak najrychlej rozpocząć budowę, sprawa nie dała się prędko przeprowadzić dla braku funduszów, które w ówczesnej monecie przeszło sto tysięcy rubli miały wynosić.

Pragnąc przyśpieszyć budowę Obserwatoryum, Armiński skorzystał z pobytu Cesarza w Warszawie i szukał sposobności złożenia samemu Monarsze prośby o upragniony zakład. Jakoż Cesarz wezwał profesorów Uniwersytetu do pałacu w Łazienkach i, przyjąwszy ich łaskawie, raczył z nimi rozmawiać o sprawach nauki; przy tej sposobności podał Armiński prośbę i w krótkości opowiedział, o co rzecz idzie. Cesarz dał zezwolenie i już z początkiem maja 1820 r. rozpoczęto budowę.

W ciągu dwóch lat była ona co do murów i słupów pod narzędzia ukończona; ale roboty wewnętrzne, różne przeróbki, które wy-

Digitized by Google

dały się potrzebnemi, opóźniły znacznie ostateczną budowę, przeciągając ją do końca r. 1823. W następnym roku wykończono wewnętrzne urządzenia i rozpoczęto ustawianie narzędzi, sprowadzonych od Reichenbacha i Ertela w Monachium.

Wygląd zewnętrzny Obserwatoryum był okazały, wewnętrzne jednak części nie zupełnie odpowiadały życzeniom Armińskiego, który za granicą widział lepsze w nich urządzenia. W każdym razie gmach już był gotowy, narzędzia znalazły się na miejscach swojego przeznaczenia, a Armiński czynił starania o sporządzenie protokółu odbiorczego i spisanie inwentarza. Ociągano się jednak z tą formalnością aż do nastąpić mającego przyjazdu Cesarza, który z ówczesnym ministrem oświecenia St. Grabowskim raczył zwiedzić Obserwatoryum dnia 8 czerwca 1825 r. i wyrazić swoje zadowolenie oraz pochwałę Armińskiemu za jego starania i urządzenie zakładu.

Ta chwila przyśpieszyła rozpoczęcie prawidłowych zajęć na Obserwatoryum, które od listopada 1825 r. bez przerwy były prowadzone.

2. Budynek Obserwatoryum.

Przy budowie zwracano baczną uwagę na gruntową wytrzymałość murów w ścianach i filarach pod narzędzia, dla których był przeznaczony środek całego budynku. W tym środku wzniesiono znacznych rozmiarów słup murowany z cegły i wyprowadzony z fundamentów do wysokości trzeciego piętra; górna powierzchnia słupa została pokryta płytą kamienną, na której ustawiono oddzielne filary dla pojedyńczych narzędzi. Wspomniany słup jest odosobniony (izolowany) i nie styka się z otaczającemi go ścianami. Zajmuje on środkową część sali południkowej, w której były ustawione: koło południkowe, koło wierzchołkowe i luneta południkowa (Passageninstrument), na filarach z polerowanego marmuru chęcińskiego, z którego także były wyciosane stojące blizko każdego ze wspomnianych narzędzi filary pod zegary. Wszystkie pojedyńcze filary mieściły się na wspólnej podstawie środkowego (centralnego) słupa.

Takie umieszczenie trzech narzędzi w jednej wspólnej, nawet obszernej sali, nie byłoby dogodne, gdyby równocześnie trzech obserwa-

Digitized by Google

torów pracować miało. Ta okoliczność była atoli wyłączona, gdyż początkowo tylko jeden obserwator był do tego powołany.

Ze środkową częścią budynku łączyły się pawilony jednakowej wielkości na szerokość i długość, ale daleko wyżej nad salę południpołudnikową sięgające; obą były nazewnątrz jednakowego kształtu. W zachodnim pawilonie wzniesiono z fundamentów murowany izolowany słup pod ekwatoreał (narzędzie paralaktyczne), a na wschodnim pawilonie wymurowano sklepienie, na którem ustawiony był niewielki filar pod heliometr. Tak dla ekwatoreału jak i heliometru pobudowano kopuły ruchome przy pomocy kół zębatych, a oprócz tego małe gabineciki dla symetryi całego budynku. We wschodnim pawilonie na dole i pierwszem piętrze urządzono mieszkania dla astronomów, a nad temi mieszkaniami bibliotekę, przylegającą do sali południkowej. Zachodni pawilon obejmował główne schody, mieszkanie dla woźnych i inne małe pomieszczenia, nie świadczące o trafnym rozkładzie i celu.

Na wysokości drugiego piętra przybudowano balkony z południowej i północnej strony, naprzeciw sali południkowej; podobne balkony znajdują się przy pawilonie wschodnim i zachodnim. Wszystkie dachy były pokryte blachą miedzianą, a balkony otoczone kamiennemi balustradami.

Blizkie sąsiedztwo oranżeryj, oddzielonych tylko wązkim korytarzem od południowej ściany Obserwatoryum, było pod wielu względami bardzo niewygodne, sprowadzało znaczną wilgotność na dolne części budynku, a w zimowych miesiącach przynosiło niemałą ilość dymu z blizkich kominów.

3. Narzędzia.

Wszystkie narzędzia astronomiczne pochodziły z fabryki Reichenbacha i Ertela w Monachium, dokąd kilkakrotnie udawał się Armiński, ażeby je na miejscu obejrzeć i do Warszawy sprowadzić. Były to narzędzia, na ów czas wcale wystarczające i mogące jeszcze dziś służyć do celów naukowych, a mianowicie: koło południkowe i wierzchołkowe, każde o średnicy blizko jednego metra, z podziałem trzechminutowym i noniuszami dwusekundowemi łuku, z szkłami przedmioto-

Digitized by Google

wemi (objektywami) około 11 centymetrów; luneta południkowa (Passageninstrument) nieco większych rozmiarów, aniżeli przy kole południkowem; heliometr z szkłami 8 cetuymetrów; ekwatoreał rozmiaru koła wierzchołkowego w przybliżeniu; luneta do szukania komet; luneta przenośna; para małych instrumentów; zegary wahadłowe do każdego narzędzia w sali południkowej i chronometr miejscowego zegarmistrza Gugenmussa; później przybył jeszcze chronometr Denta.

Takie niezbędne do pracy środki świadczyły o zabiegach Armińskiego, jak również o hojności władz, które nie skąpiły funduszów dla postawienia zakładu na wysokości wymagań ówczesnej nauki astronomicznej.

Ponieważ nowo wzniesiony zakład miał być równocześnie stacyą meteorologiczną, przeto sprowadzono z fabryki Fortina w Paryżu trzy barometry naczyńkowe, kilka termometrów i hygrometry naczyńkowe, kilka termometrów i hygrometry włoskowe. Anemoskop z różą wiatrów, umieszczoną u sufitu nad głównemi schodami, wyprowadzono nad dach zachodniego pawilonu. Później umieszczono w gabineciku tego pawilonu, obok kopuły ekwatoreału, meteorograf pomysłu Girarda do samozapisywania (regestrowania) wszystkich czynników meteorologicznych, a przy wschodniej kopule przyrząd do obserwacyj elektryczności powietrza.

Oprócz celu astronomicznego i meteorologicznego miało Obserwatoryum jeszcze trzecie zadanie, a mianowicie pedagogiczne dla studentów Uniwersytetu, którzy dla słuchania lekcyj Astronomii mieli urządzone odpowiednie audytoryum w Obserwatoryum.

4. Astronomowie Obserwatoryum.

Franciszek Armiński urodził się w Tymbarku w Galicyi roku 1789. Nauki pobierał w Krakowie, przeniósł się potem do Warszawy, skąd w celu dalszych studyów matematycznych udał się do Niemiec i Francyi. Na Obserwatoryum w Paryżu zajmował się Astronomią praktyczną. Pod koniec r. 1815 powrócił do Warszawy i tu już pozostał jako dyrektor Obserwatoryum aż do swojej śmierci, która nastąpiła w d. 14 stycznia 1848 r. Był doktorem filozofii Uniwersytetu warszawskiego.

Digitized by Google

Zajęty wykładami w Uniwersytecie, ustawianiem i badaniem narzędzi, następnie spostrzeżeniami, zmierzającemi do wyznaczenia spółrzędnych geograficznych zakładu, nie wiele czasu mógł Armiński poświęcać na prace piśmienne. Drukiem ogłosił:

W „Rocznikach Warszawskiego Towarzystwa Przyjaciół nauk" tom 19 rok 1827: „Krótki rys historyczny, tyczący się umiejętności Astronomii, obejmującej trzy pierwsze części: 1) Domniemanie przyczyn, któremi pierwsze i następne ludy zmuszone były do trudnienia się Astronomią; 2) Krótki zbiór wiadomości astronomicznych u różnych narodów aż do założenia szkoły aleksandryjskiej; 3) Krótki rys prac astronomicznych od czasu założenia Szkoły aleksandryjskiej aż do czasów wskrzeszenia Astronomii w Europie".

W „Pamiętniku Sandomierskim czyli Starożytnościach Polski", wydawanych przez Tomasza Ujazdowskiego, w Warszawie 1830 r., tom 2: „Opis góry Ś-to Krzyskiej z uwiadomieniem o czynnościach astronomicznych, dotyczących się pomiarów powierzchni górniczo - fabrycznej, z polecenia Komisyi rządowej przychodów i skarbu, w letnich miesiącach r. 1828 i 1829 uskutecznionych".

Zasługuje na wspomnienie czytana przez Armińskiego na posiedzeniu Towarzystwa Przyjaciół nauk w roku 1830 rozprawa „O dwóch ważnych poprawach, na które należy mieć wzgląd w Astronomii praktycznej, to jest o aberacyi światła i nutacyi czyli ważeniu się osi ziemskiej oraz o paralaksie gwiazd stałych."

W „Connaissance des temps" année 1846: „Latitude de l'Observatoire astronomique de Varsovie, déterminée avec cercle méridien de Reichenbach de trois pieds de diamètre et le grand cercle répétiteur du même artiste par M. Armiński directeur, et par M. M. Baranowski et Prażmowski adjoints. Occultations d'étoiles observées à l'Observatoire de Varsovie calculées par la méthode de M. Bessel, exposée dans le № 152 des Astronomische Nachrichten."

Czasowym pomocnikiem Armińskiego był Józef Bełza, wkrótce zaś po nim Stanisław Janicki, który jednak w r. 1825 został mianowany profesorem Szkoły politechnicznej, a jego miejsce zajął jako adjunkt obserwatoryum Jan Baranowski.

Baranowski urodził się r. 1800 w Sławkowie, mieście położonem w gubernii kieleckiej, kształcił się w Krakowie, a potem w Uniwersytecie warszawskim, który ukończył ze stopniem magistra filozofii.

Digitized by Google

W r. 1835 wyjechał do Królewca, gdzie przy Besselu doskonalił się w swoim zawodzie; następnie udał się do Niemiec i tamże zwiedził różne obserwatorya. W r. 1836 powrócił do Warszawy i z niej potem tylko w r. 1845, w czasie ekspedycyi chronometrycznej W. Struvego, wyjechał do Pułkowa w celu wyznaczenia różnicy w długości geograficznej pomiędzy Pułkowem a Warszawą.

W czasie rocznej nieobecności Baranowskiego wykonywał spostrzeżenia meteorologiczne w Obserwatoryum Augustyn Frączkiewicz.

Po śmierci Armińskiego w r. 1848 został Baranowski mianowany dyrektorem Obserwatoryum i w tym charakterze pozostawał aż do r. 1869. Oprócz zajęć na Obserwatoryum pełnił Baranowski obowiązki nauczyciela na tak zwanych „Kursach dodatkowych“ [1] od r. 1838 do 1842, następnie od r. 1862 do 1869 był profesorem Astronomii w Szkole Głównej. Baranowski umarł w Lublinie w listopadzie r. 1879.

Z urzędowaniem Baranowskiego, ciągnącem się lat 44, są ściśle związane początkowe dzieje Obserwatoryum warszawskiego. Był on pilnym pomocnikiem Armińskiego, a potem dbałym kierownikiem zakładu. Z szczupłych funduszów rocznych [2] pomnożył znacznie bibliotekę zakładu; w r. 1859 wyjednał u władz naukowych fundusz na sprowadzenie z Monachium refraktora z sześciocalową objektywą, a w r. 1869 nowy fundusz na odnowienie Obserwatoryum, które po kilkudziesięciu latach istnienia wymagało naprawy.

---

[1]) Po zamknięciu Uniwersytetu w roku 1831 nie było żadnego wyższego zakładu naukowego, w którym mogliby kształcić się nauczyciele szkół w kraju. Założono więc w r. 1836 „Kursa dodatkowe czyli pedagogiczne“ o dwóch wydziałach: filozoficznym i matematyczno-fizycznym, które za główny cel miały przygotowywanie uczniów, kończących gimnazya, na nauczycieli szkół niższych, głównie powiatowych. W r. 1840 - 1841 dołączono do tych kursów nowy dwuletni wydział prawny dla przygotowywania kandydatów na urzędy sądowe. W r. 1842 zamknięto pomienione kursa.

[2]) Fundusze Obserwatoryum za J. Baranowskiego wynosiły rocznie 3000 rubli; z tego pobierał dyrektor 1050 rub., starszy adjunkt 800 rub., młodszy 500 rb., reszta była przeznaczona na potrzeby Obserwatoryum, na opał, na dwóch woźnych, na książki, materyały piśmienne, oświecenie i t. d.

Digitized by Google

W r. 1838 była utworzona posada młodszego pomocnika (asystenta) przy Obserwatoryum i tę posadę zajmował przez krótki czas Józef Falkowski. Przez ustanowienie takiej posady zostały czynności astronomiczne w pewnym stopniu oddzielone od meteorologicznych na Obserwatoryum. Baranowski, jako starszy adjunkt, wykonywał astronomiczne, a Falkowski meteorologiczne; gdy zaś ten wkrótce opuścił Obserwatoryum, został w r. 1839 na jego miejsce zamianowany Adam Prażmowski, o którym niżej będzie mowa.

Czas od zajęć urzędowych pozostający poświęcał Baranowski pracom piśmiennym. W „Bibliotoce Warszawskiej" od r. 1843, tudzież w „Przeglądzie naukowym", wydawanym w Warszawie przez Skimborowicza, w tomie I, II, IV mieszczą się jego recenzye dzieł naukowych oraz artykuły treści astronomicznej i meteorologicznej. W „Astronomische Nachrichten" w tomie VIII i XIV ogłosił rachunki, odnoszące się do biegu komety Bieli.

Oddzielnie ogłosił Baranowski w r. 1849 przekład „Kosmosu" Humboldta, dokonany wspólnie z Ludwikiem Zejszne-rem. W r. 1854 wydał dzieło Kopernika „De revolutionibus orbium coelestium" z przekładem na język polski i licznemi dodatkami, odnoszącemi się do stosunków, w których powstało dzieło pierwszego twórcy Astronomii nowoczesnej. Ta praca zajęła mu wiele czasu i była oparta na rękopisie Kopernika, znajdującym się w bibliotece hr. Nostitza w Pradze czeskiej. W r. 1858 przełożył z francuskiego i wydał w dwóch tomach w Warszawie „Meteorologię, czyli naukach o zjawiskach w powietrzu dostrzeganych, o ich związku i wpływie na królestwo organiczne, a głównie na człowieka" przez Foissaca. Książka zawiera wiele dodatków do historyi Meteorologii w Polsce.

W r. 1864 wydał „Wzory Trygonometryi prostokreślnej i kulistej". W latach 1857—1861 wydawał „Kalendarz astronomiczny obserwatoryum warszawskiego". Przełożył także z francuskiego na język polski „Kosmografię" Garceta, która wraz z dodatkiem traktatu „O kalendarzu" była litografowana w r. 1867.

Nareszcie na kilka miesięcy przed swoją śmiercią wydał „Tablice do układania kalendarzy".

Nadmienić jeszcze należy, że J. Baranowski obmyślił kompas walcowy, bardzo prosty i przydatny do szybkiego przybliżonego wyznaczania poprawki zegarowej. Jest to przenośny,

Digitized by Google

mały, prawdziwie kieszonkowy przyrząd, składający się z drewnianego walca o średnicy trzech centymetrów i wysokości 9½ centymetra, oraz wskazówki metalicznej, wsuwanej w walec i wysuwanej z niego w czasie obserwacyi. Dodany krótki opis użycia tego kompasu.

Adam Prażmowski urodził się w roku 1821 w Warszawie, gdzie ukończył swoje nauki na Kursach dodatkowych, o których wyżej była wzmianka. Po objęciu zarządu Obserwatoryum przez Baranowskiego w roku 1848 został Prażmowski posunięty na starszego pomocnika i pełnił ten urząd aż do r. 1863, w którym wyjechał do Paryża, gdzie umarł w lutym roku 1885. Posadę młodszego adjunkta zajmował od r. 1848—1851 Józef Mirowski, następnie Leopold Berkiewicz, który później był profesorem w Odesie, Feliks Muklanowicz i Bronisław Muklanowicz. Wszyscy zajmowali się przeważnie spostrzeżeniami meteorologicznemi, a Prażmowski astronomicznemi.

Zajęcia Prażmowskiego były przerywane pracami, które z polecenia władzy wykonywał zewnątrz Obserwatoryum. Już w r. 1846 i 1847 bawił dłuższy czas w Pułkowie i tam dał się poznać, według słów W. Struvego, jako „un talent rare pour l'Astronomie pratique". W czasie tryangulacyi Królestwa Polskiego przez generała Tennera wyznaczał szerokość geograficzną niektórych miejsc dla połączenia pomiarów z sieciami geodezyjnemi Prus i Austryi. W r. 1851 dnia 28 lipca obserwował w Wysokiem Mazowieckiem, w gubernii łomżyńskiej, całkowite zaćmienie słońca. W r. 1852 obrał go W. Struve naczelnikiem ekspedycyi, udającej się do Besarabii dla ostatecznego sprawdzenia niektórych punktów łuku południka, ciągnącego się od Dunaju do Morza lodowatego.

W r. 1859 wysłany był do Monachium w celu sprowadzenia nowego refraktora z sześciocalową objektywą, mechanizmem zegarowym i wszystkiemi dodatkami, potrzebnemi do obserwacyi. Jest to narzędzie pod względem rozmiarów dotąd największe na Obserwatoryum warszawskiem. Ten refraktor został ustawiony pod kopułą wschodnią na miejscu usuniętego heliometru.

W roku 1860 udał się Prażmowski z polecenia władzy do Hiszpanii, gdzie w d. 18 lipca 1860 r. było całkowite zaćmienie słońca; obserwował je w Briviesca i przekonał się, że światło korony po-

Digitized by Google

chodzi od słońca. Do tego samego wniosku doszedł Edlund, astronom szwedzki, który to zaćmienie na innem miejscu w Hiszpanii obserwował.

Po otwarciu Akademii medycznej w Warszawie w r. 1860 Prażmowski powołany został na profesora Fizyki doświadczalnej, którą także wykładał w Szkole Głównej, otwartej w r. 1862, aż do swojego wyjazdu za granicę 1863 r.

Prażmowski był dobrym obserwatorem astronomicznym, ale daleko bardziej zajmowała go Fizyka, w której śledził każdy postęp i starał się nadać mu praktyczne zastosowanie. W blizkich okolicach Obserwatoryum robił spostrzeżenia magnetyczne, w samem Obserwatoryum z wahadłem Foucaulta; tutaj też urządził pierwszy zegar elektryczny w Warszawie, umieszczony na dole w oknie Obserwatoryum, a przeznaczony dla publiczności.

Mieszkanie Prażmowskiego w Obserwatoryum było prawdziwą pracownią mechaniczno-fizyczną, w której warszawscy mechanicy znajdowali pomoc i naukę. Ta okoliczność ułatwiła mu później trudne stosunki za granicą i pozwoliła na utworzenie zakładu optyczno-mechanicznego w Paryżu, z którego wyszło nie jedno narzędzie naukowej użyteczności.

Mówiąc w ogólności, Prażmowski odznaczał się umysłem samodzielnym, bardziej skierowanym do praktycznych, aniżeli do ściśle teoretycznych zajęć naukowych. Jako bystry obserwator zadawalał się ujęciem zjawiska i krótką notatką o niem; praca gabinetowa nie mogła mu wystarczać on pragnął w nauce znaleść coś nowego, a przynajmniej ułatwić ją innym, dla tego też jego prace piśmienne są krótkiemi sprawozdaniami z tego, co widział, albo co podług swego pomysłu wykonał.

Drukiem ogłoszone prace Prażmowskiego są:

„Rapport fait à M. le directeur de l'Observatoire central sur les travaux de l'éxpedition de Bessarabie, entreprise en 1852 pour terminer les opérations de la mesure de l'arc du méridien“ (Mélanges mathématiques et astronomiques de l'Académie des sciences de St, Pétersbourg. T. I).

„Comparaisons barométriques faites en 1852 pour déterminer la relation entre les barométres normaux prussiens et le barométre normal de l'Observatoire de Poulkowa“ (Baeyer, Die Verbindungen der

Digitized by Google

preussischen und russischen Dreiecksketten bei Thorn und Tarnowitz. Berlin 1857).

„Sur les erreurs personnelles qui affectent les passages des astres, les distances zénithales et certaines mesures micromètriques; moyens de les éliminer". (Cosmos 1854, I sem. pag. 545; Comptes rendus T. 38, pag. 748).

O zaćmieniu słońca w Hiszpanii d. 18 lipca 1860 r. znajduje się streszczenie w Comptes rendus, t. 51, pag. 195. Opis pryzmatu polaryzującego pomysłu Prażmowskiego w „Annales de Chimie et de Physique", t. VII, sér. 4.

Prażmowski podawał także różne artykuły do pism miejscowych, osobliwie do miesięcznika „Biblioteka Warszawska" r. 1843, 1846, 1848; w tym ostatnim roku mieści się wiadomość o natężeniu siły magnetycznej w Warszawie (tom IV, 1848, str. 362).

Zastanawiając się nad pracami tych pierwszych obserwatorów, można powiedzieć, że one z wyjątkiem meteorologicznych nie miały systematycznego charakteru. Wprawdzie Armiński — sądząc z przygotowanych przez niego dzienników do zapisywania obserwacyj narzędziami południkowemi — zamierzał prowadzić uorganizowane roboty, ale trudno było jemu samemu podołać zajęciom profesora i obserwatora, a pomocnicy potrzebowali dłuższego czasu do nabycia wprawy astronomicznej, której tem mniej mogli się oddawać, im więcej czasu obracali na spostrzeżenia meteorologiczne. Te prowadzono od samego początku bez przerwy i regularnie obliczano. Za Baranowskiego stały się one szczegółowemi opisami codziennego stanu powietrza, obok terminowych spostrzeżeń, które przy pomocy odpowiednich narzędzi notowano. W każdym razie Meteorologia wydawała się ważniejszą aniżeli Astronómia, na nią też główna uwaga była zwrócona, a materyał meteorologiczny był pilnie opracowywany.

Na Baranowskim i Prażmowskim kończy się początkowy okres spraw Obserwatoryum warszawskiego; o ile następujący okres uległ zmianie, przekonamy się z dalszego opisu.

Opróżnione w r. 1863 miejsce po Prażmowskim objął w marcu roku 1865 Jan Kowalczyk, urodzony w Rzeszotarach w Galicyi zachodniej w październiku 1833 r. Początkowe nauki kończył w Wieliczce, gimnazyalne i uniwersyteckie w Krakowie, gdzie otrzymał stopień doktora filozofii. Od r. 1862 do końca lutego 1865

Digitized by Google

był adjunktem przy Obserwatoryum i prywat-docentem przy Uniwersytecie w Krakowie. Za przybyciem do Warszawy miał poruczone przez dyrektora Baranowskiego obserwacye astronomiczne.

W tym celu wypadało nasamprzód wszystkie główne narzędzia, nieczynne przez kilka lat, doprowadzić do stanu używalności naukowej, posprawdzać ich ustawienie, powyznaczać ilości do redukcyi obserwacyj potrzebne; słowem wypadało uruchomić narzędzia przed rozpoczęciem uporządkowanej pracy. Oprócz tego wymagały także zbiory biblioteczne uporządkowania, porównania z inwentarzem i uzupełnienia ich katalogu; uczyniono to w r. 1865, w którym systematyczne obserwacye rozpoczęto i już w dalszym ciągu prowadzono.

Pod koniec istnienia Szkoły Głównej był Kowalczyk prywat-docentem Astronomii praktycznej i Geodezyi.

W lecie r. 1866 objął posadę młodszego adjunkta Karol Deike, urodzony w r. 1845 w Warszawie, który po ukończeniu gimnazyum realnego odbywał studya w Szkole Głównej na wydziale fizyko-matematycznym i wyszedł ze stopniem magistra. Deike nie poprzestawał na samych zajęciach meteorologicznych, ale bardzo chętnie oddawał się także astronomicznym, w których w krótkim czasie nabył wprawy; a że do matematycznych prac był teoretycznie doskonale przygotowany i w rachunkach nader biegły i ścisły, przeto okazał się wielce pożądanym współpracownikiem na Obserwatoryum. Po pewnym czasie mógł on obserwować narzędziami południkowemi, a Kowalczyk zajął się sześciocalowym refraktorem, obserwując małe planety lub komety. Trwało to do ustąpienia Baranowskiego w r. 1869, w którym Szkoła Główna została zamknięta, a na jej miejsce otworzono Uniwersytet.

Po ustąpieniu Baranowskiego został dyrektorem Obserwatoryum i profesorem Uniwersytetu Jan Wostokow, urodzony w Jarosławlu r. 1840. Odbywał studya uniwersyteckie w Petersburgu i zaraz po ich ukończeniu w r. 1863 [1]) został nadetatowym astronomem w Pułkowie, a w r. 1865, po uzyskaniu stopnia magistra, wyjechał na dwa lata za granicę. Nie przebył tam jednakże całego dwuletniego czasu, gdyż otrzymał posadę astronoma w Kijowie, gdzie dokończył

[1]) W. Ehrenfeucht. Nekrolog I. A. Wostokowa.

Digitized by Google

swojej doktorskiej rozprawy, przyjętej w r. 1869 przez Uniwersytet petersburski. W listopadzie tegoż roku został naznaczony do Warszawy, dokąd niebawem przyjechał.

Wostokow był gorliwym pracownikiem w Obserwatoryum, o ile pozwalały na to obowiązki profesora i wątłe zdrowie, które niejednokrotnie wstrzymywało go po kilka miesięcy od zajęć i zmuszało dwukrotnie wyjeżdżać do Algieru, w r. 1873 i 1880, albo przykuwało do łóżka w r. 1892 i 1897. Rzadko też kiedy spędzał letnie wakacye w Warszawie, najczęściej wyjeżdżał do Szwajcaryi.

Wyżej była wzmianka o tem, że Baranowski w r. 1869 wyjednał fundusz na odnowienie Obserwatoryum. Rzecz odnosiła się głównie do przebudowy wiązań i dachu nad salą południkową belki bowiem okazały się nadpsutemi i zamiast poprzedniej budowy z drzewa, projektowano trwalsze z żelaza, z zachowaniem ścian murowanych. W tym celu był plan zrobiony, przez władzę Okręgu naukowego zatwierdzony i roboty miały rozpocząć się w roku 1870, Wostokow, biorąc przykład z Pułkowa, gdzie widział sale obserwacyjne pobudowane z drzewa, sądził, że w sali południkowej, w której mieściły się trzy główne narzędzia zakładu, łatwiej będzie uniknąć wpływu temperatury pomiędzy drewnianemi ścianami, aniżeli murowanemi, zażądał zmiany pierwotnego planu i kazał sporządzić inny, według swojego pomysłu.

W rzeczy samej, po usunięciu narzędzi, zburzono murowane ściany, zniesiono wszystko aż do podłogi w sierpniu r. 1870 i przystąpiono do nowej budowy. Oprócz tego zburzono także zachodnią kopułę, usunięto mały przy niej gabinet, w którym znajdował się meteorograf Girarda[1]) i postanowiono pobudować nieco większą kopułę dla pomieszczenia sześciocalowego refraktora, dla którego wschodnia kopuła w istocie była tak szczupła, iż objektywa stykała się prawie z klapami i przy słabym powiewie wiatru narzędzie nie mogło spokojnie ustać.

Rozpoczętą przebudowę ukończono w r. 1871, poczem zaczęło się ustawianie narzędzi i ich nowe regulowanie. Rozumie się samo przez

[1]) Meteorograf był bardzo złożonem narzędziem; zegar z ciężkiem wahadłem wprawiał w ruch cały mechanizm, który w zastosowaniu nie okazał się przydatnym.

Digitized by Google

się, że pierwotny kształt Obserwatoryum został zmieniony, gdy pomiędzy murowanemi pawilonami stanęły ściany z desek, które w kilka lat poźniej potrzeba było zastąpić znowu innemi, lepiej z sobą spojonemi i dotąd istniejącemi.

W r. 1871 Deike, nie mogąc spodziewać się żadnych widoków na przyszłość, opuścił Obserwatoryum i znalazł miejsce w Banku handlowym.[1] Po nim przez krótki czas był zastępcą Skołdycki, następnie, jako młodszy astronom A. S. Wierebriusow, powołany z Charkowa. Ten pozostawał do r. 1873, w którym Obserwatoryum zostało przyłączone do Uniwersytetu, a dotychczasowi adjunkci spadli z etatu, nie mając stopni magistra uniwersytetów Cesarstwa. Wierebriusow opuścił Warszawę, a Kowalczyk, pod warunkiem pozyskania takiego stopnia w ciągu dwóch lat, pozostał na Obserwatoryum, jako pełniący obowiązki starszegu astronoma-obserwatora; po złożeniu egzaminów otrzymał w r. 1875 stopień magistra w Uniwersytecie warszawskim.

Przyłączenie do Uniwersytetu było ważną sprawą dla Obserwatoryum; w krótce też niemałe sumy uniwersyteckie spłynęły na jego podniesienie. Na roczne potrzeby przeznaczono 1050 rubli i podwyższono płacę obu astronomów: starszy otrzymał 700 rb. więcej, a młodszy 350.

Kiedy już minął czas tego stanu przejściowego, wtedy można było znowu podjąć systematyczną pracę, a przynajmniej najniezbędniejszą w biegu utrzymać. W tym czasie postanowiono wrócić do planu wzięcia udziału w obserwacyach, zaprojektowanych przez Argelandera i zmierzających do dokładniejszego wyznaczenia położenia gwiazd, podanych w „Bonner Durchmusterung". Ponieważ atoli wszystkie pasy nieba, od bieguna północnego aż do —2° zboczenia, były już przez inne obserwatorya rozebrane, przeto, pomimo poczynionych poprzednio niektórych przygotowań, obrano, za zgodą dyrektora, najbliższy pas gwiazd południowych pomiędzy —2° i —7° zboczenia. Spis gwiazd z przybliżonemi spółrzędnemi sporządził Kowalczyk według kart berlińskich i w czerwcu r. 1876 rozpoczął robotę, ciągnącą się z mniejszemi lub większemi przerwami przez lat 20. Wostokow obserwował lunetą przejściową (Passageninstrument) Reichenbacha i Ertela, albo małym przyrządem Meyersteina w wertykale gwiazdy bieguno-

[1]) Był dyrektorem tego Banku aż do śmierci w d. 27 kwietnia 1906r. (w Meranie, gdzie przebywał na kuracyi).

Digitized by Google

wej. Pod względem dokładności był on bardzo wymagającym obserwatorem; każde narzędzie drobiazgowo badał, a w potrzebie kazał je poprawiać. Ponieważ zaś za jego dyrektorstwa, oprócz wahadłowego zegara Hohwii, dwóch chronometrów (Frodsham i Sandoz), cyferblatów elektrycznych i dwóch zegarów Löbnera, przybyła znaczna liczba różnych narzędzi, a każde podlegało szczegółowemu badaniu, przeto bardzo wiele czasu obracano na tę robotę.

W czasie od r. 1873 do 1887 zmieniali się młodsi astronomowie w następującej kolei.

A. Zdziarski, wychowaniec Uniwersytetu warszawskiego, zastępował obserwatora przez kilka miesięcy.

Taczałow z Pułkowa przybył do Warszawy jako młodszy astronom i wykładający w Uniwersytecie.

A. Treu od r. 1875 do 1882, wychowaniec Uniwersytetu warszawskiego, w czasie powtórnego pobytu Wostokowa w Algierze, wykładał niektóre części Astronomii w Uniwersytecie i, oprócz meteorologicznych, wykonywał spostrzeżenia astronomiczne przy pomocy przerobionego koła wierzchołkowego w celu ponownego wyznaczenia szerokości Obserwatoryum. Umarł po długiem cierpieniu w r. 1882.

Szaniawski także z Uniwersytetu warszawskiego zastępował obserwatora przez kilka miesięcy.

Fryderyk Berg przybył z Wilna i, oprócz meteorologicznych zajęć na Obserwatoryum, miewał wykłady w Uniwersytecie, a w r. 1884 przeniósł się do Nowej Aleksandryi (Puław) na profesora w Instytucie gospodarstwa wiejskiego.

Borodicz do r. 1887, w którym otrzymał posadę przy pierwszem gimnazyum żeńskiem w Warszawie.

Wszyscy wymienieni, oprócz Treua, zajmowali się tylko meteorologią.

Wiktor Ehrenfeucht, urodzony roku 1864 w Poniewieżu, nauki gimnazyalne kończył w Woroneżu, a wydział fizyko-matematyczny w Uniwersytecie warszawskim, który ukończył ze stopniem kandydata; nie poprzestawał on na samych meteorologicznych, ale z wielką gorliwością oddawał się obserwacyom astronomicznym, zmierzającym do śledzenia zmian szerokości geograficznej; wykładał też w gimnazyum żeńskiem dwa lata, a potem w Uniwersytecie lat siedm, oprócz tego prowadził ze studentami praktyczne zajęcia na Obserwatoryum. Po

Digitized by Google

śmierci Wostokowa opuścił zakład i objął posadę profesora w Instytucie politechnicznym warszawskim.

Kiedy miano otrzymać nowe koło południkowe z sześciocalową objektywą i wszystkiemi najnowszemi ulepszeniami, wtedy znowu okazała się potrzeba znacznych przeróbek na Obserwatoryum, gdyć w braku odpowiedniego miejsca wypadło nowe koło umieścić w sali południkowej. W tym celu usunięto koło wierzchołkowe Reichenbacha i Ertela ze środka sali i przygotowano słupy pod nowe koło południkowe; ale gdy znaleziono także belki pod podłogą znacznie nadgniłe, postanowiono dać belki stalowe, sklepienie murowane i mocną posadzkę.

Oprócz tego dawna kopuła wschodnia została zburzona, a natomiast ustawiona kopuła obszerniejsza, sprowadzona z Wilna po pożarze Obserwatoryum tamtejszego. Obok niej umieszczono anemometr Greinera i Geisslera. Ciągnęły się te roboty około dwóch lat, poczynając od r. 1884; potem nastąpiło ponowne ustawianie i regulowanie narzędzi, które w czasie przebudowy stały bezczynnie w bibliotece, a poprawka zegarów wyznaczała się przy pomocy przenośnego narzędzia Ertela.

Wostokow, pragnąc zużytkować narzędzia nowo nabyte, a mianowicie: pasażny instrument Ertela, uniwersalny Hildebranda i Schrama, zenit-teleskop Wanschaffa, postarał się u władzy Okręgu naukowego o oddanie części placu, należącego do Ogrodu botanicznego, na użytek Obserwatoryum i na nim wzniósł budynki dla każdego narzędzia oddzielne. Tam mogły odbywać się praktyczne zajęcia studentów i obserwacye astronomiczne bez przeszkody dla tych, które w samym obserwatoryum były prowadzone. Na pomienionym placu postawiono także budkę meteorologiczną według instrukcyi głównego Obserwatoryum fizycznego i do niej przeniesiono, oprócz barometru i anemometru, wszystkie narzędzia meteorologiczne, które poprzednio mieściły się przy północnem oknie głównego budynku.

Nadmienić także należy, że Wostokow sprowadził samopiszące narzędzia meteorologiczne; nasamprzód barometrograf i termometrograf z fabryki Hippa, a gdy te okazały się nie bardzo przydatnemi, zastąpione zostały przez odpowiednie przyrządy Richarda i Neya; normalny barometr Fuessa i chronograf również były dla obserwatoryum nabyte.

Nietylko zasoby zakładu instrumentalne, ale i biblioteczne wzbogaciły się znacznie, kiedy Obserwatoryum wyjednało u władz naczel-

Digitized by Google

nych przeniesienie do Warszawy części biblioteki ocalonej podczas pożaru Obserwatoryum wileńskiego, tudzież dwóch zegarów wahadłowych Lepaute i Hardy, małego uniwersalnego narzędzia, fotometru Schwerda ze wszystkiemi należącemi do niego dodatkemi, lunety przenośnej z helioskopem i spektoskropem uniwersalnym Mezra. W końcu urzędowania Wostokowa nabyto nowy anemometr Fuessa. ustawiony obecnie nad zachodnim pawilonem, mały spektroskop i parę akumulatorów do lampek przy zenit-teleskopie Wanschaffa.

Z przytoczonego powyżej opisu można zmiarkować, że Obserwatoryum było bardzo bogate w małe narzędzia już to starszej, już nowszej konstrukcyi. Nie było atoli dla nich ani miejsca, ani pracowników, dlatego spoczywały niektóre z nich w pakach, a inne służyły do ćwiczeń praktycznych, jeżeli znaleźli się chętni do tego kandydaci.

Długo uczuwano brak większego koła południkowego lepszej konstrukcyi, aniżeli stare koło Reichenbacha i Ertela, lecz dopiero po roku 1880 zapadło w tym względzie, na wniosek Wostokowa, postanowienie Uniwersytetu i nowe koło z sześciocalową objektywą zostało zamówione u Ertela i syna w Monachium. Od Repsolda nie spodziewano się otrzymać podobnego narzędzia tak prędko, jak obiecywano w Monachium.

Jest to kosztowne narzędzie, bo na miejscu w Monachium cena jego wynosiła 16000 marek niemieckich. Po przewiezieniu do Warszawy stanęło na przygotowanych słupach i zdawało się być dobrym nabytkiem. Wostokow zajął się jego badaniem. Nierówność czopów osi, gięcie (fleksya) lunety wypadły zadawalająco; inaczej nieco przedstawiał się aparat do oświecania mikroskopów; po pewnym też czasie uległ zmianie nietylko ten aparat, ale także mikroskopy zostały zastąpione nowemi, wykonanemi przez mechanika uniwersyteckiego Wąsika, który również naprzeciw końców poziomej osi przysposobił mocne sprężyny swojego pomysłu, mające przy przekładaniu narzędzia utrzymać położenie osi w niezmiennem oddaleniu od mikroskopów i zapobiedz potrzebie regulowania tychże po każdorazowem przełożeniu.

Nowy aparat do oświecenia mikroskopów polega na źwierciadłach płaskich, do siebie równoległych i przenoszących światło od bocznej latarni z wielką soczewką na szklane pryzmaty przy mikroskopach. W praktyce jednak daleko prościej osiąga się cel przy pomocy małej, ręcznej lampy.

Digitized by Google

Dla punktu nadira i kolimacyi ustawiono poziom rtęciowy, także przez Wąsika wykonany, ale z przyczyny wstrząśnień, którym ulega fundament wskutek ruchu ulicznego, małą on czyni przysługę, a wymaga znacznego wysiłku obserwatora.

Instrument Ertela i syna ma budowę symetryczną; po obu stronach lunety są koła jednakiej wielkości; jedno z podziałem dziesięciominutowym służy do nastawień, drugie z podziałem trzechminutowym do pomiarów, które można czynić za pomocą czterech mikroskopów z podziałami jednosekundowemi.

Strona optyczna narzędzia nie okazuje niedostatków; obrazy gwiazd są dobre, siatka mikrometryczna ma 13 nici stałych i jednę ruchomą; do deklinacyi służy odpowiednia siatka; śruby mikrometryczne funkcyonują prawidłowo.

Inaczej ma się sprawa z trzechminutowym podziałem koła. Wostokow, badając przyrząd stopniowo, nie mógł odrazu przekonać się o wadliwości podziału; dopiero po kilku latach z niezgodności wypadków, które otrzymał z nastawień na gwiazdy fundamentalne, doszedł do wniosku, że przyczyną tej niezgodności musi być zły podział koła. Zabrał się więc do wyznaczenia błędów i w ciągu kilkoletniej przerywanej pracy zbadał koło w trzechstopniowych przedziałach, wyprowadził też wzór do obliczenia błędów podziału.

Po śmierci Wostokowa d. 2 lutego 1898 r. obserwował Kowalczyk tem nowem kołem południkowem i otrzymał wypadki w wznoszeniu prostem (A. R.) zupełnie zadawalające, w zboczeniu zaś prawie niemożebne. Przy najbaczniejszem nastawianiu i uwzględnieniu wszystkich poprawek, z wyjątkiem pochodzących od podziału, były wypadki z różnych gwiazd zadziwiająco niezgodne. Dopiero po obliczeniu tablicy błędów z wzoru Wostokowa pokazało się, że te błędy w niektórych miejscach koła przechodzą dziesięć sekund łuku. Stare koło południkowe Reichenbacha i Ertela ma daleko lepszy podział i w długim szeregu obserwacyj nie napotykano na niem tak niezgodnych wypadków, jak na nowem. Z tego powodu narzędzie może obecnie służyć tylko jako kulminator (Passageninstrument), i jeżeli ma kiedy stać się przyrządem mierniczym, wymagać będzie koła z dokładniejszym podziałem. Dopiero wtedy kosztowne i piękne narzędzie mogłoby stanąć na równi z podobnemi na innych obserwatoryach.

Digitized by Google

Wostokow poświęcał wiele czasu na prace piśmienne, z których nie wszystkie zdołał wykończyć; ogłoszone drukiem odnoszą się do przedmiotów różnej treści i są rozprawami większych lub mniejszych rozmiarów. Ważniejsze z nich są: [1]

„Diffierencialnyja urawnienija i ich integrały, opredjelajuszczyje wozmuszczenija w dwiżenii płaniet".

„O razłożienii perturbacionnoj funkcii w rjad po sinusam i kosinusam ekscientriczeskoj anomalii."

„O razłożienii funkcii $\frac{1}{D}=[r^2+r_1^2-2rr_1\cos(r,r_1)]^{-\frac{1}{2}}$ w rjad po stiepienjam ekscientricitietow."

„O sposobje Olbersa dlja opredielenija elementow paraboliczeskoj orbity."

„Ob opredjelenii elemientow orbity iz trjoch nabludienij."

„O pogrjesznostjach djelenij meridiannago kruga Ertela, ustanowlennago na Warszawskoj Obserwatorii."

„Mikrometrische Beobachtungen des Cometen 1874 (Astr. Nachr. Bd. 85)."

„Bericht über die Thätigkeit der Warschauer Universitäts-Sternwarte im J. 1877 (Vierteljahrsschrift der astr. Gesellschaft 13 Jhg.)."

„Beobachtungen der Sonnenfinsterniss 1891 Juni 6 (Astr Nachr. Bd. 127)."

„O formulje dlja piereniesienija dołgot na ellipsoidje wraszczenija i ob opredjelenii kratczajszago razstojanija mieżdu dwumja toczkami po ich geograficzeskomu położeniju."

„O gieodieziczeskoj kriwiznje kriwych, prowiediennych na powierchnosti."

Zajęcia Kowalczyka na Obserwatoryum były różnorodne. Przy częstych zmianach młodszych astronomów niejednokrotnie wykonywał on spostrzeżenia meteorologiczne i ich obliczenia. W czasie nieobecności dyrektora sprawował czynności zarządzającego; zbiory biblioteczne były na jego opiece, jednakże spostrzeżenia i rachunki astronomiczne stanowiły wyłączną jego pracę, do której wchodziły:

1) Spostrzeżenia, czynione kołem południkowem Reichenbacha

---

[1]) W Ehrenfeucht, l. c. pg. 4, 5.

Digitized by Google

i Ertela odnosiły się: do gwiazd fundamentalnych; do gwiazd małych, położonych w pasie nieba pomiędzy —2° i —7° zboczenia; do większych planet i jasnych komet, o ile te ostatnie mogły być widziane w płaszczyźnie południka.

2) Spostrzeżenia drobnych planet i komet zapomocą sześciocalowego refraktora Merza i Utzschneidera.

3) Spostrzeżenia, odnoszące się do rzadkich zjawisk, jak zaćmienia, zakrycia gwiazd i t. d.

4) Rachunki astronomiczne zmierzały jedne do obliczenia spostrzeżeń powyżej wymienionych, drugie do obliczenia dróg komet i planet z wielkiej liczby spostrzeżeń, tudzież do obliczenia przeszkód biegu planet Hesperyi i Thisbe, oraz ich efemeryd tak rocznych, jak opozycyjnych.

Wypadki z postrzeżeń planet, komet i innych zjawisk były ogłaszane w „Astronomische Nachrichten", rachunki zaś to w pomienionych wiadomościach astronomicznych, to w „Berliner astron. Jahrbuch."

„Sonnenephemeriden zu den neu zu berechnenden Cometen 1800—1830 (Vierteljahrsschrift der astr. Gesellschaft).

„O spostrzeżeniach meteorologicznych w Warszawie od r. 1825 do 1880. Temperatura i ciśnienie powietrza". (Pamiętnik fizyograficzny T. I i II).

Różne artykuły treści astronomicznej i meteorologicznej w wydawnictwach warszawskich („Przyroda i Przemysł", „Wszechświat", „Zdrowie", "Tygodnik ilustrowany powszechny", Biblioteka Warszawska", Encyklopedya wychowawcza", „Wiadomości matematyczne" i inne).

Oddzielnie wydane:

„Mikołaj Kopernik i jego układ świata" (Dodatek do „Przyrody i Przemysłu" 1872).

„O wyznaczeniu dróg planet i komet z wielkiej liczby spostrzeżeń". Warszawa 1874 (broszura po rosyjsku).

„O sposobach wyznaczenia biegu ciał niebieskich". Kraków 1889, 8°, str. 414, tablic str. LXXIII.

„O sposobach obliczania przeszkód biegu ciał niebieskich". Warszawa 1901, 8°, str. 619. Tablic 4.

Digitized by Google

Prace astronomiczne Wiktora Ehrenfeuchta odnosiły się do śledzenia zmian szerokości Warszawy Wypadki z tych spostrzeżeń były ogłoszone drukiem pod tytułem: „O nabludieniach rawnych wysot dlja opredjelenia izmjenienija sziroty Warszawy“, Oprócz tego ostateczne wywody z całego długiego szeregu spostrzeżeń zostały podane w dziele prof. Albrechta w Poczdamie, w dziele, traktującem o wahaniu osi ziemskiej. W „Astron. Nachrichten“ pomieścił Ehrenfeucht parę artykułów, a w „Veröffentlichungen des k. astronomichen Recheninstituts zu Berlin“ efemerydę planety Hermentaryi w czasie jej opozycyi ze słońcem. W protokołach towarzystwa naturalistów przy Uniwersytecie warszawskim znajdują się także astronomiczne artykuły Ehrenfeuchta.

Dotąd była mowa o osobistych, drukiem ogłoszonych, pracach astronomów warszawskich; teraz należy wspomnieć o wydawnictwach w imieniu Obserwatoryum, drukowanych kosztem władz naukowych. Do takich wydawnictw należą:

„Observations faites au cercle méridien à l'Observatoire de Varsovie“:

I-ère partie.		Varsovie 1892, 4⁰.	
II-ème „		„ 1901, 4⁰	
III-ème „	1 fascicule.	Varsovie 1902, 4⁰	
„ „	2 „	„ 1903, 4⁰.	

„Catalog von 6041 Sternen zwischen 1⁰50' und 7⁰10' südlicher Declination für das Aequinoctium 1880 0, hergeleitet aus den Beobachtungen am Reichenbach u. Ertelschen Meridiankreise der K. Universitäts-Sternwarte zu Warschau“. Warschau 1904, 4⁰.

Spostrzeżenia meteorologiczne drukowane w rocznikach głównego Obserwatoryum fizycznego w Petersburgu („Ljetopisi gławnoj Fiziczeskoj Obserwatorii), tudzież w publikacyach Uniwersytetu warszawskiego („Warszawskija universitetskija izwjestija).

Na Obserwatoryum warszawskiem wykonywali spostrzeżenia astranomowie przejezdni w celu wyznaczenia długości geograficznej pomiędzy różnemi miejscowościami a Warszawą. I tak:

w r. 1865	między	Rosenthal	a Warszawą
„ 1875	„	Wiedniem	„
„ 1875	„	Pułkowem	„

Digitized by Google

w r. 1877 między Kijowem a Warszawą
„ 1878 „ Wilnem „
„ 1878 „ Kowlem „
„ 1884 „ Berlinem „

(Albrecht, Ausgleichung des central-europäschen Längennetzes. Astr. Nachr. Bd. 167, № 9—10, pg. 145).

W głównej sieni Obserwatoryum (gdzie posadzka marmurowa) wyznaczano siłę ciężkości. W r. 1888 uczynił to A. P. Sokołow, w r. 1896 A. W. Krasnow, w 1900 Iłjaszewicz.

Zewnątrz Obserwatoryum robiono spostrzeżenia magnetyczne; w r. 1875—1876 na placu Ujazdowskim (gdzie obecnie park i baraki szpitalne), w r. 1893 w parku Łazienkowskim, na łące za ostatnią oranżeryą, pobudowaną w r. 1869. Pierwsze wykonywał Smirnow z Uniwersytetu kazańskiego, drugie Dubinskij z głównego Obserwatoryum fizycznego.

We wrześniu r. 1898 został dyrektorem obserwatoryum prof. A. W. Krasnow, a na miejsce opróżnione przez Ehrenfeuchta, w końcu r. 1900 mianowany był W. I. Parchomow.

Digitized by Google

Digitized by Google

W. GORCZYŃSKI.

O organizacyi sieci meteorologicznych na wyspach Wielkiej Brytanii wraz z Irlandyą i w koloniach angielskich.

Artykuł niniejszy opracowany został na podstawie poszukiwań, przeprowadzonych w bibliotece i zbiorach „Meteorological Office“ w Londynie. Uprzejme zezwolenie Comm. M. W. Campbella Hepwortha (zastępującego nieobecnego dyrektora instytutu Williama N. Shawa), a głównie stała i życzliwą pomoc ze strony szefa wydziału klimatologicznego R. G. K. Lempferta oraz bibliotekarza Doncana Bella umożliwiły nam obznajmienie się z odnośnemi materyałami, a zwłaszcza z wielu trudno dostępnemi publikacyami, wydawanemi w różnych koloniach i krajach angielskich.

Treść artykułu podzielona jest na 8 działów następujących:

Część pierwsza.

I. Dane historyczne o sieci Meteorological Office w Londynie.
II. Obecna organizacya Biura Centralnego w Londynie.
III. Towarzystwa Meteorologiczne.

Część druga.

IV. Obserwacye kolonialne.
V. Sieć indyjska.
VI. Sieć australijska.
VII. Sieć w koloniach afrykańskich.
VIII. Sieć kanadyjska i wysp zachodnio-indyjskich.

Digitized by Google

CZĘŚĆ PIERWSZA.

I. Dane historyczne o sieci Meteorological Office w Londynie.

Właściwy początek uorganizowania służby meteorologicznej w Anglii datuje się od r. 1854. W dniu 15 czerwca tegoż roku prezydent Towarzystwa Królewskiego Nauk (Royal Society) otrzymał zawiadomienie z „Board of Trade", że projektowane jest utworzenie przy tym urzędzie państwowym osobnego wydziału, poświęconego opracowywaniu wyników spostrzeżeń meteorologicznych, czynionych na morzu w różnych częściach globu ziemskiego. Towarzystwo Nauk proszone było o sformułowanie tych dezyderatów wiedzy meteorologicznej, na które przyszły „Meteorological Department of the Board of Trade" powinien przedewszystkiem zwrócić uwagę.

Tow. Royal Society wydelegowało ze swego łona członka Fitz Roya, kapitana okrętu „Beagle", na którym Karol Darwin uskutecznił swe znane podróże. We wrześniu 1854 r. ułożono cyrkularz w kwestyi kooperacyi wszystkich statków, a także zwrócono szczególną uwagę na jednorodny system spostrzeżeń, czynionych na morzu, zgodnie z uchwałami konferencyi w Brukselli z r. 1853.

Jako główny cel tych spostrzeżeń morskich uważano badanie „the winds and currents of the ocean, with a view to the acquirement of a more correct knowledge of the laws which govern the motion of those elements, and to the improvement of navigation".

W roku 1855 „Meteorological Department" zaczął już swą regularną działalność, a w r. 1857 admirał Fitz Roy przedstawił parlamentowi pierwsze sprawozdanie z czynności tego wydziału, który zgodnie z położeniem Anglii i potrzebami przemysłu tamtejszego zajmował się prawie wyłącznie Meteorologią morską. Zaznaczymy, że jako początek systematycznych spostrzeżeń na morzu można uważać już rok 1831, przyczem wyniki obserwacyj przesyłane były do „Hydrografical Office of the Admiralty" w Londynie.

Jeszcze w pierwszym roku działalności nowego urzędu meteorologicznego, a mianowicie w lutym 1855 r., Towarzystwo Królewskie zaproponowało rozszerzenie planu obserwacyj przez utworzenie stacyj kontynentalnych, których zadaniem miało być „determination by

Digitized by Google

trustworthy observations of normal values for barometric pressure, aqueous vapour and temperature, together with the variabilite of each, for suitable geographical spaces". Prócz wysp Wielkiej Brytanii zaprojektowano zaprowadzenie regularnych i godnych zaufania „trustworthy" spostrzeżeń w miejscowościach: Azores, Madeira, Bermuda. Ascension i St. Helena.

Pod nazwą „godnych zaufania" rozumiano już podówczas nietylko starannie prowadzone i odczytywane obserwacye, lecz także z koniecznym warunkiem posiłkowania się sprawdzonemi narzędziami, należącemi do jednego ze zbadanych i przyjętych typów. W swym raporcie z r. 1857 do parlamentu admirał Fitz Roy z ubolewaniem zaznacza, że wskutek błędów i niepewności przyrządów przeważna część dotychczasowych obserwacyj, czynionych na okrętach, ma charakter zaledwie grubego przybliżenia (rough approximation).

Wreszcie tenże admirał Fitz Roy, idąc za przykładem Le Verriera, dyrektora Obserwatoryum w Paryżu, zamierzył wprowadzić do sfery działalności „Meteorological Department" także służbę prognoz telegraficznych co do burz i stanu pogody. Opracowany w tym celu projekt „The system of Telegraphy, of Storm Warning and of Daily Forecasts", uzyskał w r. 1860 aprobatę urzędową i rozpoczął swą działalność. Wiadomości telegraficzne były początkowo otrzymywane z 15-u stacyj wysp brytańskich oraz z kilku punktów na kontynencie Europy. Ze względu na usługi, oddawane przez ten system portom i marynarce handlowej, parlament podniósł początkową dotacyę na cele Meteorologii z 3200 do 7000 funtów szterlingów.

Wielce użytecznym okazał się także system sygnalizacyi portowych, obmyślony przez Fitz Roya, który wydał także „Weather Book" oraz „Barometer Manual for the use of seamen" i „Fishery Barometer Manual". Dodać należy, że czynnym spółpracownikiem admirała był, zwłaszcza w latach ostatnich, meteorolog T. H. Babington.

W kwietniu 1865 r. admirał Fitz Roy zakończył życie, a czasowe zawiadywanie służbą meteorologiczną angielską przeszło w ręce T. H. Babingtona, który zarządzał nią do grudnia 1866 r.

Rok 1866 kończy także pierwszy okres działalności (1854—1866) służby meteorologicznej angielskiej. Od r 1867 wyjęto tę ostatnią z pod zawiadywania urzędu do spraw przemysłu i handlu (Board of Trade), a natomiast oddano pod zawiadywanie „The Meteorological

Digitized by Google

Comitee of the Royal Society". Jednocześnie zaprojektowano rozszerzenie działu Meteorologii synoptycznej i założenie sześciu „self-recording observatories" na terytoryum wysp Wielkiej Brytanii. Dotacya parlamentu podniesiona została do 10000 funt. szt.

Komitet, wybrany przez Towarzystwo Naukowe i zaaprobowany przez rząd do zarządu służbą meteorologiczną w Anglii, składał się z 4-ch członków „of the Kew Committee": general Sabine, Gassiot, Dr. W. A. Miller i de la Rue; dalej z dwóch „Officers of the British Association": Fr. Galtona i W. Spottiswoode'a i wreszcie z jednego przedstawiciela wydziału hydrograficznego admiralicyi oraz przedstawiciela służby wojskowej. Bezpośredni zaś zarząd biurem „Meteorological Office" oddano w ręce trzech osób:

1) Roberta H. Scotta w charakterze dyrektora instytucyi;

2) Kapitana H. Toynbee, jako kierownika wydziału morskiego;

3) Balfoura Stewarta, jako sekretarza komisyi i dyrektora Obserwatoryum w Kew.

Zauważymy, że „Kew Observatory", istniejące już dawniej, zostało w ten sposób ściślej połączone z organizacyą ogólną służby meteorologicznej w Anglii.

Pod dyrekcyą R. H. Scotta zakres poprzednio zakreślonej pracy urzędu meteorologicznego uległ dalszemu rozszerzeniu. Główną uwagę zwracano, jak zawsze, na potrzeby Meteorologii morskiej. Wydano w tym czasie mapy dla prądów i dla temperatur powierzchni w południowym oraz północnym Atlantyku i ogłoszono czynione poprzednio badania w okolicach podbiegunowych. Zauważymy, że obszerne wydania map dla wód indyjskich były już dawniej ogłoszone.

W dziedzinie Meteorologii synoptycznej zwrócono przedewszystkiem uwagę na dobroć obserwacyj i narzędzi i na konieczność inspekcyi stacyj. „The inspections were carried out annually" powiedziane jest w jednym z raportów R. Scotta. Z 29 stacyj 16 zostało bezzwłocznie zaopatrzonych w budki (Stevenson's Thermometer Screen). Mapy synoptyczne codzienne zostały rozszerzone; dane o 8^h wykreślane były na zasadzie obserwacyj z 29 stacyj angielskich i 22 z kontynentu. „The Daily Weather Report" odbijane były w 600 egzemplarzach, z których 300 dostarczano abonentom, a pozostałe rozsyłano

Digitized by Google

do różnych instytucyj. Jako dodatek rozpoczęto opracowywanie tygodniowych zestawień, wydawanych pod tytułem: „Weekly Summary of the Weather over North-Western Europe."

Najgłówniejszą jednak zasługą „Meteorological Committee of the Royal Society" było prawidłowe zorganizowanie sieci klimatologicznej (Land Meteorology of the British Isles — jak powiedziano w sprawozdaniach Komitetu). Jak to bowiem zaznaczaliśmy kilkakrotnie, dotychczasowa działalność urzędu meteorologicznego zwracała prawie wyłączną uwagę na Meteorologię morską.

Projekt odnośny był opracowany jeszcze w roku 1866; zgodnie z nim obserwatorya meteorologiczne zostały otworzone: w Falmouth i w Stonyhurst w Anglii (prócz Kew), w Aberdeen i w Glasgowie w Szkocyi i w Armagh i w Valencia w Irlandyi. Obserwatorya te zostały zaopatrzone w komplety narzędzi samopiszących, a jednocześnie opracowano „a most careful and effective system of recording, tabulating and checking" gromadzonych obserwacyj.

Zapoczątkowano także wydawnictwo „Quaterly Weather Report" w którem ogłaszano rozumowane wyniki badań i spostrzeżeń meteorologicznych.

Londyńskie „Meteorological Office" weszło także w tym czasie w bliższy związek z Meteorologią międzynarodową. Na kongresie w Lipsku (w r. 1872) oraz w Wiedniu (w r. 1873), dyrektor R. Scott oraz Buys Ballot brali udział oficyalnie, a ten ostatni został mianowany sekretarzem stałego komitetu międzynarodowego. Ten fakt nie pozostał bez wpływu na organizacyę służby meteorologicznej w Wielkiej Brytanii; ujednostajniono przedewszystkiem godziny obserwacyjne (9 rano i 9 wieczór dla stacyj rzędu II sieci angielskiej) oraz porozumiano się z londyńskiem Towarzystwem meteorologicznem [1] co do zakresu, wyboru narzędzi i publikacyi spostrzeżeń na stacyach, zorganizowanych przez członków tego Towarzystwa.

Najdłuższym był trzeci peryod działalności „Office" londyńskiej, gdyż obejmuje on czas od lipca 1877 r. do końca marca 1905 r. W tym okresie sieć meteorologiczna pozostawała pod dyrekcyą „Mete-

---

[1]) Obecnie „Royal Meteorological Society". O towarzystwie tem, jak również o Scottish Meteorological Society (z siedzibą w Edynburgu), bliższe wiadomości podane są w dalszym ciągu niniejszego artykułu.

Digitized by Google

orological Council". Zmiana ta nastąpiła na wniosek komisyi administracyjnej (pod przewodnictwem sir W. S. Maxwella), która zaproponowała, aby poprzednio istniejący „Meteorological Committee" był zastąpiony przez radę (Council) z 6 płatnych członków. Jednym z tych członków musiał być „ex officio" członkiem urzędu hydrograficznego z Admiralicyi, pozostali zaś mieli być mianowani przez Towarzystwo Naukowe (Royal Society). Rada ta przygotowywała corocznie sprawozdania z działalności i funduszów, które asygnował parlament (14500 funt. rocznie).

Pierwszy „Council" składał się z następujących członków: prof. H. J. S. Smitha jako przewodniczącego, F. O. Evansa, F. Galtona, prof. G. G. Stokesa i gen. R. Strachey'a. Sekretarzem rady i jednocześnie bezpośrednim kierownikiem „Meteorological Office" był R. H. Scott, który dla spraw Meteorologii morskiej posiadał do pomocy kap. Toynbee. Inspektorami stacyj prowincyonalnych byli: M. Buchan dla Szkocyi, Rev. C. Ley dla Anglii i R. Scott dla Irlandyi.

W czasie działalności Meteorological Council zwrócono uwagę na naukową stronę działalności „Office", a mianowicie na opracowanie wyników z zasobu gromadzonych i już sprawdzonych materyałów. Wydano też w tym czasie cały szereg rozpraw z dziedziny Meteorologii synoptycznej i instrumentalnej, oraz materyałów z dyskusyą spostrzeżeń; prace te były częściowo drukowane w wydawnictwach oficyalnych Biura londyńskiego, częściowo zaś w publikacyi peryodycznej p. t. „Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society". Autorami przeważnej liczby prac byli: Stokes, Scott, Ley, Abercromby, Strachey, Symons i Shaw.

Liczba stacyj stopniowo wzrastała, jak to wskazuje zestawienie porównawcze za rok 1880 i rok 1905.

Liczby.	1880	1905
Obserwatoryów	7	11
Stacyj z anemografami . .	6	11
„ z barografami . . .	1	19
„ z heliografami . . .	—	110
„ rzędu II	37	87
„ „ III i deszczowych	32	150

Digitized by Google

Z liczby wskazanych punktów obserwacyjnych tylko niewielka część była utrzymywana kosztem Meteorological Office, przeważna zaś liczba obserwatoryów i stacyj funkcyonowała staraniem instytucyj lub osób prywatnych.

Dodamy, że w r. 1884 Meteorological Council postanowił nawet zredukować liczbę obserwatoryów, utrzymywanych kosztem Biura centralnego, motywując tę redukcyę pilną potrzebą przeznaczenia zaoszczędzonych funduszów na cele naukowych opracowań zgromadzonych materyałów.

Poczyniono także kroki w celu ogłaszania danych z licznych kolonij angielskich; o spostrzeżeniach tych pomówimy osobno w dalszym ciągu.

Jednocześnie z ogromnym wzrostem marynarki handlowej i wojennej szybko wzrastały ich dane z dziedziny Meteorologii morskiej.

Tak np. gdy w r. 1880 wpłynęło do Office koło 4700 dzienników, to w r. 1905 dostarczono koło 12000 dzienników z wynikami obserwacyj, czynionych na morzu przez oficerów okrętowych.

II. Obecna organizacya Biura Centralnego w Londynie.

Obecnym dyrektorem Meteorological Office jest (od roku 1900) W. N. Shaw, który jednocześnie spełniał obowiązki sekretarza komitetu dyrekcyjnego „Meteorological Council“, o którym mówiliśmy poprzednio. Zauważymy, że od 1 kwietnia 1905 r. nastąpiła zmiana w stosunku prawnym „Office“ w tem znaczeniu, że odtąd sprawozdania z działalności i z funduszów przedstawiane być mają wprost do parlamentu i wydziału skarbu z pominięciem Royal Society.

Dyrektor W. N. Shaw posiada do pomocy R. G. K. Lempferta (dla działu klimatologii) i komendanta Campbella Hepwortha (jako marine superintendent); w biurze zaś pracuje 43 urzędników i asystentów.

W Meteorological Office istnieje pięć wydziałów, a mianowicie:

a) The Telegraphic Branch (dla Meteorologii synoptycznej).

b) The Marine Branch (dla Meteorologii morskiej).

c) The Statistics and Library Branch (dla Klimatologii i publikacyj)

Digitized by Google

d) The Obserwatory Branch (dla opracowywania danych godzinnych i w ogóle obserwacyj z narzędziami samopiszącemi).

e) Correspondence and Accounts Branch (wydział administracyjny i rachunkowy).

Poniżej podajemy krótkie wiadomości o działalności każdego z tych wydziałów.

a) Wydział Meteorologii synoptycznej zajmuje się zestawianiem codziennych map „Daily Weather Report" z prawdopodobieństwem pogody. Mapy te układane są na zasadzie obserwacyj, nadsyłanych telegraficznie z 27 stacyj angielskich i 29 z europejskiego kontynentu, a głównie ze Szwecyi, Norwegii, Niemiec i Francyi. Spostrzeżenia czynione są o 8^h_a (Greenw.) i napływają do Londynu między 8 a 10 rano; niektóre stacye nadsyłają dodatkowe dane o 6-ej wieczór. Depesze synoptyczne podają wartości ciśnienia, temperatury (według suchego i zwilgoconego term., oraz max. i min.) opadów, oraz, w pewnych przypadkach, liczby godzin usłonecznienia, kierunek i siłę wiatru i stan pogody i morza. Depesza codzienna nadchodzi także z wysp Azorskich, na skutek porozumienia specylnego z urzędem meteorologicznym portugalskim.

Po skartografowaniu otrzymanych spostrzeżeń, mapa synoptyczna (dla 8^h_a) jest gotowa o 10 rano; mapa zaś wieczorna o 7-ej wieczorem. Prawdopodobieństwo pogody zostaje formułowane dla przeciągu 24 godzin, licząc od najbliższego południa lub od północy dla map wieczornych; te ostatnie jednak nie są pomieszczane w „Daily Weather Report".

Mapy codziennie są odlitografowywane i gotowe do rozesłania o godz 2 pop. (z wyjątkiem niedziel i dni wakacyjnych „Bank Holidays"), a o godz. 2 min 30 zostają oddawane na pocztę. Czas od 10-ej do 12-ej jest potrzebny na przygotowanie tekstu map i formułowanie prognozy, a okres między 12 a 2 pop. na pracę litograficzną i przygotowywanie odbitek.

Abonament roczny map codziennych kosztuje 1 funt szterl., o ile mapy przesyłane są drogą pocztową; specyalne kopie map i depesze dostarczane są czasopismom i agencyom pism o godz. 11-ej rano i 8-ej wieczorem.

Prawdopodobieństwa pogody są formułowane nie dla całej Anglii wraz z Irlandyą, lecz dla 10 różnych części tego terytoryum. W ra-

Digitized by Google

zach odpowiednich wysyłane są ostrzeżenia do portów, które wystawiają w miejscach, widocznych z daleka, stosowne sygnały.

W miesiącach letnich (od czerwca do września włącznie) zorganizowana jest specyalna służba „afternoon forecasts", wysyłanych telegraficznie o godz. 3 min. 30 pop. na użytek rolników.

Około 300 odbitek z map codziennych posyłane są do urzędów i instytucyj publicznych w Londynie i na prowincyi, do portów i t. p.; nadto w r. 1905 było 172 płatnych abonentów.

Interesujące jest następujące zestawienie co do sprawdzalności wysyłanych prawdopodobieństw pogody. Mianowicie w okresie 1904—1905 sprawdzenie dobroci prawdopodobieństw (w procentach) dało następujące wyniki:

Dystrykt	% zupełnie udatnych	% częściowo udatnych	% częściowo nieudatnych	% zupełnie nieudatnych	Suma zupełnie i częściowo udatnych
Szkocya N.	58	31	10	1	89
Szkocya E.	57	30	11	2	87
Anglia NE.	61	31	7	1	92
Anglia E.	58	32	8	2	90
Pas środkowy	57	31	11	1	88
Anglia S.	62	30	7	1	92
Szkocya W.	60	29	9	2	89
Anglia NW.	58	30	10	2	88
Anglia SW.	55	32	10	3	87
Irlandya N.	56	30	12	2	86
Irlandya S.	60	31	16	3	81
Średnio	57	31	10	2	88

W rozkładzie na oddzielne miesiące rezultaty mało różnią się między sobą; dla średniej rocznej 88% najwyższą wartość wykazuje czerwiec (92%), najniższą październik (85%).

Poniższa tabelka wykazuje dla dziesięciu lat 1896—1905 wartości procentowe prawdopodobieństw udatnych dla wysp Wielkiej Brytanii:

Digitized by Google

Rok	% zupełnie udatnych	% częściowo udatnych	Suma
1895—96	55	25	80
1896—97	54	27	81
1897—98	55	26	81
1898—99	55	28	83
1899—1900	55	27	82
1900—01	57	27	84
1901—02	58	26	84
1902—03	53	35	88
1903—04	56	30	86
1904—05	57	31	88
Średnio	55.5	28.2	83.7

Tabelka ta wskazuje pewny, aczkolwiek dość powolny, wzrost prawdopodobieństw udatnych.

Lepsze jeszcze rezultaty osiągnięto z sygnalizacyą burz w 200 z górą stacyach portowych Zjednoczonego Królestwa. Tak np. z podanej niżej tabelki wynika, że w ostatnim okresie dziesięcioletnim 90% ogólnej liczby ostrzeżeń było usprawiedliwione.

Okres	Ogólna liczba wysłanych spostrzeżeń	% zupełnie udatnych	% częściowo udatnych	Suma ostrzeżeń usprawiedliwionych
1874—83	426	54.3	25.2	79.5
1884—93	499	57.9	26.9	84.8
1894—1903	548	62.4	27.7	90.1

NB. Jako zupełnie udatne uważane są te ostrzeżenia, w których zapowiedziana burza bezpośrednio nastąpiła; częściowo udatnemi są takie, po których nastąpiła silna wichura.

Jakie olbrzymie straty materyalne zostały w ten sposób uni-

Digitized by Google

knięte, o tem zbyteczna wspominać. Jest rzeczą ciekawą do zaznaczenia, że pewne okręgi portowe (jak np. wschodnie brzegi Szkocyi lub zachodnie Walii) wykazują stale mniejsze liczby udatnych ostrzeżeń niż inne. Ponieważ na poparcie tych różnic trudno znaleść wystarczające przyczyny meteorologiczne, pozostaje przypuścić, że gradient barometryczny w różnych okolicach nadbrzeżnych z niejednakową łatwością wywołuje wiatry.

Na zakończenie dodamy, że wszystkie stacye, służące do celówMeteorologii synoptycznej, są utrzymywane kosztem urzędu „Meteorological Office", który dostarcza kompletów narzędzi i wynagradza obserwatorów, obowiązanych bez przerw i jakichkolwiek zaniedbań pełnić dokładnie swoje obowiązki. Pozatem stacye te podlegają częstej i skrupulatnej inspekcyi ze strony Biura londyńskiego. Nadto na użytek tych obserwatorów wydana została specyalna instrukcya p. t. „Instructions for meteorological Telegraphy" (London 1891), zawierająca, prócz objaśnień i przykładów, klucze do układania depesz synoptycznych. Klucze te są zastosowane do uchwał konferencyi międzynarodowej w Utrechcie z r. 1874.

b) Wydział Meteorologii morskiej. W wydziale tym koncentruje się, od r. 1855, opracowywanie i wydawnictwo rezultatów obserwacyj meteorologicznych, czynionych na oceanach przez oficerów marynarki wojennej i handlowej. Przestrzenie wodne są podzielone na obszary, co stopień długości i szerokości, a dla każdego z tych obszarów są obliczane statystycznie i wykreślane na mapach dane spostrzeżeń, z głównem uwzględnieniem kierunku i siły wiatru.

Obserwacye na okrętach nie są obowiązkowe; z uwagi jednak na korzyść ich dla żeglugi, spostrzeżenia meteorologiczne są czynione na znacznej liczbie okrętów floty brytańskiej i dostarczane w odpisach do „Meteorological Office" w Londynie, po ukończeniu każdorazowej podróży.

Mapy morskie wydane już zostały dla różnych części Oceanu Atlantyckiego, Indyjskiego i Pacyfiku, oraz dla Morza Czerwonego i Arabskiego. W miarę gromadzenia nowych danych, poprzednie mapy są na nowo poprawiane i wydawane.

Zaznaczymy, że Meteorological Office w Londynie, stosownie do uchwalanego przez parlament budżetu, wogóle nie daje i nie wypożycza narzędzi, lecz udziela ich na żądanie po cenie kosztu z doli-

Digitized by Google

czeniem dodatkowem 5%. Narzędzia te są sprawdzane i opatrzone poprawkami; obserwacye czynione z przyrządami, które nie były nadesłane do sprawozdania, nie są przyjmowane pod uwagę.

Wszystko to stosuje się także do okrętów, pragnących prowadzić spostrzeżenia. Odstępstwa jednak od tej reguły czynione są w następujących przypadkach, przewidzianych w regulaminie Biura londyńskiego; mianowicie przyrządy mogą być wypożyczane:

a) kapitanom okrętów, którzy naprzód zobowiążą się prowadzić bez przerwy dokładne spostrzeżenia i rezultaty ich przedstawiać do Biura;

b) stacyom, nadsyłającym dane do map synoptycznych, jak o tem tylko co wspomniano;

c) obserwatoryom, zależnym wprost od Meteorological Office w Londynie;

d) wybranym stacyom klimatycznym, w których spostrzeżenia uważane są za szczególnie pożądane;

e) wreszcie do punktów połowu ryb (Fishery Barometer Stations) stosownie do dawno praktykowanego zwyczaju.

Tym ostatnim stacyom wysyłane są specyalne barometry (Fishery Barometer) z osobną instrukcyą; wyniki miesięczne, stąd nadsyłane, zawierają codzienne odczytywania barometrów i temperatury na barometrze, a także niekiedy dane o wietrze i uwagi o pogodzie.

Do spostrzeżeń okrętowych Meteorological Office wypożycza 1 barometr rtęciowy, budkę i 6 termometrów oraz 4 przyrządy do mierzenia opadów.

Najwięcej danych napływa z północnego Atlantyku, z wschodnich brzegów Ameryki południowej oraz z Morza Śródziemnego i Oceanu Indyjskiego.

W r. 1904 wydano mapy miesięczne (Monthly Pilot Charts) dla North Atlantic i North Pacific, przyczem liczba zebranych obserwacyj dla każdego miesiąca była niemniejsza od 4000.

Dla Morza Śródziemnego przygotowano także dane o rozkładzie temperatury na powierzchni, które otrzymano także dla północnego Atlantyku łącznie z rozkładem izobar.

Wreszcie skartografowano około 19000 obserwacyj, czynionych na południe od 30° szerokości południowej, dla skonfrontowania otrzymanych rezultatów z wynikami ostatniej wyprawy antarktycznej.

Digitized by Google

Zaznaczymy, że wydział Meteorologii morskiej, jakkolwiek znajduje się w łączności z Meteorological Office, pozostaje jednak pod zawiadywaniem jakby osobnego kierownika, którym obecnie jest komendant Hepworth, poprzednio dowodzący jednym z okrętów marynarki wojennej. Wydział ten jest w stałym związku z głównym urzędem hydrograficznym, któremu dostarcza danych hydrograficznych, zawartych w dziennikach spostrzeżeń czynionych na morzu.

Wydział klimatologiczny.

W tym wydziale koncentruje się opracowywanie danych z wszystkich stacyj klimatologicznych, nadsyłających spostrzeżenia miesięczne do Meteorological Office; wydział ten kieruje także wydawnictwem publikacyj. Kierownikiem działu klimatologicznego jest R. G. K. Lempfer M. A., mający do pomocy sześciu urzędników.

Działalność tego wydziału najlepiej się uwydatni, gdy przedstawimy i omówimy pokrótce opracowywane w nim publikacye. Rozpoczynamy od instrukcyj, przeznaczonych dla obserwatorów,

a) Instrukcya, wydana przez Meteorological Office do użytku stacyj meteorologicznych rzędu II.

Używane obecnie na stacyach sieci meteorologicznej angielskiej „Instructions in the use uf meteorological instruments“ zostały opracowane w maju 1875 r. przez ówczesnego dyrektora Meteorological Office, Roberta H. Scotta. Edycya z r. 1875 była przedrukowana, a bieżące instrukcye, wysyłane na użytek obserwatorów, datują się z r. 1892. Obecnie (w sierpniu r. 1906) nowe poprawione wydanie jest w opracowaniu.

Warto zaznaczyć, że przed edycyą R. Scotta istniały były „Instructions for taking Meteorological Observations“, opracowane przez sir H. Jamesa; ostatnie wydanie tych ostatnich ukazało się w r. 1861 i było już zupełnie wyczerpane w r. 1875.

Przypominamy, że stosownie do poleceń kongresu międzynarodowego w Wiedniu stacye meteorologiczne dzielą się na trzy rzędy. Do rzędu pierwszego zaliczają się stacye, w których, prócz zwykłych elementów, spostrzeżenia są prowadzone przy pomocy narzędzi samopiszących i wogóle na większą skalę. Stacye rzędu II winny notować

Digitized by Google

regularnie i wysyłać pełne wykazy zwykłych elementów meteorologicznych, jak ciśnienia, temperatury, wilgotności, wiatru, zachmurzenia i opadów. Wreszcie do stacyj rzędu III zaliczają się te, które obserwują tylko niektóre z elementów, obowiązujących dla klasy drugiej.

Instrukcya dla obserwatorów sieci angielskiej zawiera 118 stron in 8-o; po wstępie następuje opis barometru (str. 11—33), termometrów (34—45) oraz hygrometrów i innych przyrządów (str. 46—73). Następnie podane są uwagi o czasie i o prowadzeniu spostrzeżeń; koniec instrukcyi zawiera tablice.

Opis konstrukcyi i sposobu użycia i odczytań barometru wyłożony jest wyczerpująco; podziałki podane są w stopach angielskich, a właściwie w inchach (1 inch $= \frac{1}{12}$ foot $=$ 26,3995 mm.), przyczem 0,05 incha odczytują się bezpośrednio, a przy pomocy noniusza dokładność może być posunięta do 0,001 incha. Do barometru dołączany jest termometr z podziałką według skali Fahrenheita.

Z różnych konstrukcyj barometru opisany jest „Land Standard Barometer“ (według zasady Fortina), dalej barometr morski (Kew Marine barometer) i syfonowy oraz górski; podane są także uwagi o wartości barometrów zwykłych z napisami co do stanu pogody oraz o „Fishery“ i Wheel barometer“ i wreszcie o aneroidach. Co do tych ostatnich zaznaczona jest w instrukcyi konkluzya, że „for concerted observations accurate mercurial barometers are indispensable“.

Rozdział o barometrach kończy się uwagami o sprawdzaniu i o poprawkach, które zaznaczone są w liczbie pięciu, a mianowicie: 1) index error, 2) capacity, 3) capillarity, 4) temperature (do 32°F.) i 5) Altitude above the sea level. Pierwsze trzy poprawki, złączone razem, oznaczone są jako „Kew correction“ według nazwy obserwatoryum, sprawdzającego przyrządy.

Dodajmy, że jako maximum wielkości poprawek przyjęto 0,010 incha dla błędu skali (index error); wielkość ta jest prawie dwa razy większa dla konstrukcyj morskich.

W rozdziale o termometrach podane są uwagi o narzędziach wzorcowych i zwyczajnych oraz o sprawdzaniu termometrów. Termometry bywają odrzucane, o ile poprawka w jakimkolwiek punkcie

Digitized by Google

przenosi $0^0,3$ Fahr. lub gdy odstęp dziesięciu stopni skali jest błędny więcej, niż na $0^0,3$ F.

W dziale „registering thermometers" znajduje się opis przyrządu maximum (konstrukcyi Philippsa lub Negretti i Zambra) i minimum (systemu Casella lub Rutherforda). Pierwsze trzy konstrukcye są rtęciowe, ostatnia (Rutherford) jest z alkoholem. Stosownie do życzenia, wyrażonego na kongresie wiedeńskim, temperatury maximum i minimum odczytywane są w czasie ostatniej dziennej obserwacyi, t. j. o 9-ej wieczorem. Termometr zwyczajny jest normalnie odczytywany dwa razy dziennie: o 9-ej rano i o 9-ej wieczór według czasu miejscowego.

Ważne są uwagi, podane w instrukcyi co do wystawienia termometrów, co do którego jest zaznaczone, że jest to „one of the most difficult questions in Meteorology". Wobec morskiego charakteru klimatu wysp brytańskich polecona jest budka czworokątna z ściankami o łatwym przewiewie, systemu Stevensona, do umieszczenia na 4-ch słupkach (wysokość 4 feet. = 1,22 m.) lub podobna budka, lecz bez słupków, do umieszczenia przy ścianie (Wall screen). System angielski niewiele się różni od budek, używanych w wielu krajach na kontynencie.

Opis termometrów kończy tak zw. „termometr radiacyjny" z czarną kulką w próżni; przyrząd ten ma służyć „for measuring solar radiation"; dla pomiarów „terrestrial radiation" zalecany jest zwykły termometr minimum, umieszczony na powierzchni ziemi (porosłej trawą). Wobec stwierdzonej obecnie nieużyteczności termometrów radiacyjnych prawdopodobnie opis ich zostanie pominięty w nowo przygotowywanem wydaniu instrukcyj dla obserwatorów sieci angielskiej

Dla celów hygrometrycznych zalecony jest znany system Augusta (Wet and Dry Bulb Hygrometer), przyczem wspomniano o trudnościach odczytywań dla nizkich temperatur. Dla teoryi psychrometru przyjęta jest formuła Apjohna (Trans. R. I. A. Vol. XVII).

$$f'' = f' - 0{,}01147 \,.\, (t - t') \frac{p - f'}{30} \,.$$

gdzie f'' daje szukaną prężność w zależności od f' (prężności odpowiadającej wartości na termometrze suchym), od różnicy $(t - t')$ wska-

Digitized by Google

zań termometrów suchego i zwilgoconego oraz od odczytanego ciśnienia p barometru. Tabele do obliczeń (w miarach angielskich), w wydaniu Glaishera, zostały ułożone empirycznie na zasadzie danych doświadczalnych, otrzymanych w Greenwich oraz tablic Regnaulta.

Instrukcya z wielką słusznością zaznacza, że tabele te „are reasonably accurate for the conditions usually prevalent in the United Kingdom“, lecz byłyby niedostateczne w innych klimatach, jak np. dla Indii lub Kanady.

Deszczomierz, używany na stacyach sieci londyńskiej, składa się z cylindra (o średnicy 8 inchów = 203.2mm.) z wyjmowanym zbiornikiem. Wysokość wystawienia zalecona jest na 1 foot, t. j. 30,5 cm. Wyraźnie zaznaczone jest, deszczomierz w zwykłych warunkach nie powinien być nigdy umieszczany na znaczniejszych wysokościach nad powierzchnią gruntu. Opady mierzą się (do 0,01 incha=0,25 mm.) raz dziennie o 9 ej rano i zapisywane są w dzienniku jako opady w dniu poprzednim. Śnieg i grad są mierzone po stopieniu. Notuje się także przybliżony czas trwania opadów.

Co do przyrządów ewaporyzacyjnych zaznaczona jest niepewność danych wobec nieustalonej konstrukcyi i rezultatów badań różnych ewaporometrów.

W dziale o anemometrach wspomniane są konstrukcye Linda, Oslera, Catora i wreszcie Wilda. Dotyczą one „pressure anemometers“; dla „velocity anemometer“ zalecony jest system Robinsona opisany w r. 1850 w „Transactions of the R. Irish Academy.„

Instrukcya podnosi pytanie o wyniesieniu anemometrów, zaznaczając trudność tego pytania i wogóle małą porównywalność rezultatów, otrzymanych na różnych stacyach. „The results from each station must be compared inter se“ — powiedziane jest wprost w instrukcyi.

Do oceny siły wiatru z konieczności zaleca się najstarsza metoda „oceny na oko“, posługująca się skalą, zaproponowaną w r. 1806 przez sir F. Beauforta. Instrukcya (wydana w r. 1885) podaje prowizoryczną tabelę dla porównań skali Beauforta z używanemi jednostkami, a mianowicie:

Digitized by Google

Siła	Skala Beauforta	Średnia prędkość (w mil. ang. na godzinę)	Śred. prędkość (w metrach na sek.)	Średnie ciśnienie (in lbs. on the square foot)
0	calm	3	1.3	.75 Oz.
1	light air	8	3.6	5.0 „
2	light breeze	13	5.8	13.5 „
3	gentle breeze	18	8.0	1.6 lbs.
4	moderate breeze	23	10.3	2.65 „
5	fresh breeze	28	12.5	4.0 „
6	strong breeze	34	15.2	5 75 „
7	moderate gale	40	17.9	8.0 „
8	fresh gale	48	21.5	11,0 „
9	strong gale	56	25.0	15.7 „
10	whole gale	65	29.1	21.2 „
11	storm	75	33.5	28.2 „
12	hurricane	90	40.2	40,5 „

Tablica ta została ułożona na zasadzie porównań, przeprowadzonych w Meteorological Office, lecz stosuje się ona bezpośrednio do stacyj, znajdujących się zdala od wybrzeży w miejscu otwartem. Dodamy, że w r. 1906 opracowana została nowa publikacya w tym względzie p. t. „The Beaufort Scale of Wind-Force". Ciśnienie (w funtach angielskich na stopę kwadratową) było obliczane według wzoru K. Jamesa:

$$P = 0{,}005 \, . \, V^2$$

Przy ustawianiu wiatromierzy według kompasu zwrócona jest uwaga na wpływ magnetyzmu ziemskiego i podana jest tabelka dla redukcyi wskazań kompasu na kierunki właściwe. Tak zamiast wskazania N należy przyjmować dla Anglii kierunek NNW, zamiast E — kierunek ENE, zamiast S—SSE, zamiast W—WSW.

Po uwagach o obserwacyach elektryczności atmosferycznej i krótkiej wzmiance o ozonie podana jest klasyfikacya chmur według Howarda z kilku figurami. W rubryce „Weather" podane są symbole angielskie (według „Beaufort Notation") dla oznaczania stanu pogody w uwagach, z jednoczesną wzmianką o symbolach międzynarodowych.

Digitized by Google

Co się tyczy godzin obserwacyjnych, instrukcya zaznacza trudność i ważność tego punktu oraz ten fakt, że kombinacya godzin spostrzeżeń, dobra dla jednego klimatu, może okazać się niewystarczającą w innym. Wogóle instrukcya zaznacza możliwość wyboru następujących kombinacyj godzin (według postanowień kongresu wiedeńskiego):

1) 6^h_a, 2^h_p, 10^h_p			
2) 7^h_a, 2^h_p, 10^h_p	5) 8^h_a, 2^h_p, 8^h_p	oraz temp. min.	8) 8^h_a, 8^h_p
3) 7^h_a, 1^h_p, 9^h_p	6) 9^h_a, 3^h_p, 9^h_p		9) 9^h_a, 9^h_p wraz z temp. max. i temp. min.
4) 7^h_a, 2^h_p, 9^h_p	7) 10^h_p, 4^h_p, 10^h_p		10) 10^h_a, 10^h_p

Godziny stosują się do czasu miejscowego. Kombinacya 9^h_a, 9^h_p jest powszechnie używana w Wielkiej Brytanii na stacyach rzędu II. Temperatury skrajne zaleca się odczytywać o 9-ej wieczorem.

Instrukcya kończy się krótkiemi uwagami o prowadzeniu spostrzeżeń; jako niezbędne warunki dla obserwatora postawione są: „knowledge of the instruments used, accuracy, regularity, and honesty". Rezultaty spostrzeżeń wysyłane są co miesiąc do Biura centralnego wraz z średniemi miesięcznemi; średnie dzienne nie są obliczane.

Końcowe tablice instrukcyi podają poprawki barometru na wysokość (z uwzględnieniem temperatury) i różne dane dla porównań i zamiany miar angielskich na metryczne. Dołączony jest także schemat dla wykazów miesięcznych oraz dla opisu stanu stacyj i poprawek narzędzi.

Oprócz powyższej instrukcyi były w różnych czasach wydane inne instrukcye dla celów specyalnych; są one mianowicie:

1. Barometer Manual. 1871.

2. Barometer Manual for the use of Seamen With an Appendix on the Thermometer, Hygrometer, and Hydrometer. 1905 (wydanie piąte, rozszerzone i poprawione).

3. Fishery Barometer Manual. 1887.

4. Hints to Meteorological Observers in Tropical Africa. 1902. Wydanie to przeznaczone jest dla kolonij, o których będziemy mówili w następstwie.

b) Tygodniowe przeglądy pogody z suplementem miesięcznym rocznym.

Digitized by Google

Wydawnictwo odnośne, przeznaczone dla celów rolniczych i sanitarnych, nosi tytuł: „Weekly Weather Report“ i wychodzi od r. 1888. Zaznaczymy, że w okresie 1869—1880 wydawano przeglądy pogody kwartalnie p. t. „Quarterly Weather Reports“, następnie w postaci wykazów miesięcznych (od r. 1884 do 1887). Wraz z rozpoczęciem zaś przeglądów tygodniowych, przeglądy miesięczne i roczne są dołączane jako „Monthly and Annual Appendices“.

„Weekly Weather Reports“ wychodzi regularnie we czwartek i daje — dla ubiegłego tygodnia do ostatniej soboty włącznie — zestawienia danych dla temperatury, opadów i godzin usłonecznienia dla terytoryum Zjednoczonego Królestwa. Układ tych tygodniowych przeglądów pogody jest następujący:

Dział pierwszy nosi tytuł „Weekly Summary, arranged under Districts“ i daje średnie tygodniowe dla każdego z 10 okręgów, na które podzielone jest terytoryum sieci. W pierwszych dwóch rubrykach znajduje się najwyższa i najniższa temperatura za tydzień (w całych stopniach), dalej średnia z maximów dziennych oraz z minimów (w stopniach Fahr. z częściami dziesiątemi). Dodatkowa rubryka wskazuje, o ile (w całych stopniach) „średnia“ temperatura za tydzień sprawozdawczy jest wyższa lub niższa od odpowiedniej średniej za okres 1871—1900.

Ciekawa jest następująca uwaga, dotycząca sposobu obliczeń „średniej” dziennej temperatury, która wobec dwóch tylko dziennych spostrzeżeń terminowych nie może być obliczana w sposób zazwyczaj stosowany na kontynencie. Otóż w Biurze londyńskiem obliczają średnią dzienną z max. i min., biorąc ich różnice i mnożąc ją przez pewien spółczynnik, różny dla różnych miesięcy. Wartość tego spółczynnika jest wyprowadzana z porównań, robionych w obserwatoryach z narzędziami samopiszącemi; dane godzinne dla tych ostatnich są podawane w osobnej publikacyi, o której będzie mowa niżej.

W roczniku „Weekly Weather Report“ za r. 1904 znajdujemy następujące wartości tych spółczynników:

styczeń i grudzień	0.520,
luty i listopad	0.500,
marzec i październik	0.485,

Digitized by Google

kwiecień i wrzesień	0.476,
maj i sierpień	0.470,
czerwiec i lipiec	0.465.

Zestawienia temperatury zawierają jeszcze dodatkowe rubryki dla t. zw. „Accumulated temperature". Celem tych ostatnich jest ułatwienie oryentacyi co do wpływu temperatury na wegetacyę i wogóle co do zjawisk rolnych. W tym celu oblicza się dla każdego tygodnia oraz dla całkowitego okresu od początku roku wartości, wyrażające nadmiar lub niedomiar obserwowanych temperatur nad pewną „suitable fixed standard, or base temperature". Za tę ostatnią przyjęto 42°F., co blizko odpowiada 6°Cels.; temperatura ta ma przedstawiać pewnego rodzaju wartość „krytyczną" dla wegetacyi i rozwoju płodów rolnych w klimatach europejskich.

„The accumulated temperature" wyrażana jest w „dzień-stopniach"; jeden „Day-degree" oznacza 1°F. nadmiaru lub niedomiaru temperatury od 42°F. w ciągu 24 godzin lub jakąkolwiek inną liczbę tych stopni dla odwrotnie proporcyonalnej liczby godzin.

Gdy temperatura, zaobserwowana w ciągu danego okresu, jest stale niższa lub wyższa od przyjętej „base temperature" (42°F.), wtedy różnica między średnią dla danego dnia i 42°F. daje wprost wartość „akumulowaną". W innych przypadkach takież różnice dają tylko wartości przybliżone; dla otrzymania wartości poprawionych mnożono obliczane różnice przez 0,4. Ten ostatni spółczynnik stosuje się atoli tylko dla okresów tygodniowych i dla przyjętej normalnej 42°F. Znaleziono, że dla 32°F. wynosiłby on 0,4, dla 52°F. —0,33 i dla 62°F. — 0,25.

Dodamy, że reguły co do obliczeń „Accumulated temperature" zostały szczegółowo wyjaśnione w „Quarterly Weather Report" (Appendix II) za r. 1878.

Prócz „Day-Degree" (wyżej i niżej 42°F.) podawane są także w rubrykach różnice (w tychże jednostkach) od odpowiednich średnich. Dane te obliczane są dla każdego tygodnia oraz sumowane i przytaczane dla całego poprzedniego okresu od początku roku.

Prócz temperatur, zestawienie zawiera dane dla opadów (liczbę dni, sumy i odchylenia od przeciętnych za okres 1866—1900) oraz

Digitized by Google

dla usłonecznienia (liczby godzin, różnice od średnich za okres 1881—1900, wartości procentowe wraz z ich różnicami od przeciętnych).

Wszystkie rubryki stosują się do okresu tygodniowego, lecz obok nich podane są stosowne wartości dla okresu od początku roku.

Dział pierwszy kończą krótkie uwagi ogólne co do przebiegu pogody w okresie sprawozdawczym.

Dział drugi podaje temperatury, opady i usłonecznienia i ich odchylenia od średnich dla każdej stacyi oddzielnie, a nie średnio dla okręgów, jak w dziale poprzednim. Dodamy, że liczba stacyj, nadsyłających zestawienia tygodniowe, waha się obecnie koło 150, z których koło 30 nadsyła tylko dane co do usłonecznienia.

Dział trzeci „Weekly Weather Report" zawiera mapy w liczbie trzech dla każdego dnia sprawozdawczego tygodnia. Mapy te wskazują rozkład ciśnienia i wiatrów na obszarze całej Europy o godzinie 8^h_a i 6^h_p oraz wartości temperatur i stanu pogody (na kontynencie oraz na morzach przyległych) o godz 8^h_a. Do map dołączany jest krótki tekst; zauważymy, że izotermy wykreślane są przeważnie w odstępach co dziesięć stopni F., a ciśnienie w odstępach co 0,2 inch.

Mapy te są opracowywane na zasadzie codziennych map synoptycznych, wydawanych przez Forecast Department; te ostatnie jednak obejmują tylko środkową i północno-zachodnią część Europy i podają w kolejnych mapach dla rana każdego dnia: 1) ciśnienie, wiatr i stan morza, 2) temperaturę i stan pogody, 3) ciśnienie i wiatr dla rana dnia poprzedniego, 5) sumy opadów od początku roku dla terytoryum angielskiego, z dołączeniem procentów wartości przeciętnych, 5) średnie temperatury za dany miesiąc dla 8^h_a dla różnych stacyj Anglii z okresu 1871—1900.

Dla celów „Weekly Report" mapy z „Daily Weather Report" są uzupełniane przez dodanie otrzymanych wykazów tygodniowych i nadesłanych buletynów z kontynentu.

Ostatni dział podaje „General Notes etc." z ogólnemi uwagami co do charakteru i zmian pogody w całym rozważanym okresie tygodniowym. Całość „Weekly Report" obejmuje każdorazowo 6 stron in 4-o.

Jako dodatek do zestawień tygodniowych ukazuje się co miesiąc „Monthly Supplement"; zawiera on krótki tekst co do charakteru przebiegu różnych elementów, jako to: pressure, depressions, anticy-

Digitized by Google

clones, winds, temperature, rainfall, bright sunshine. Do tekstu dołączone są cztery mapy miesięczne, a mianowicie: dla ciśnienia (co 0,05 inch.) i wiatru o 8^h_a, dla rozkładu średnich miesięcznych temperatur (co stopień F) i kartograficznie przedstawione sumy opadów. Mapy te (z wyjątkiem drugiej) obejmują tylko terytoryum Zjednoczonego Królestwa.

W „Summary of observations" podane są średnie miesięczne dla każdej stacyj oddzielnie; te zestawienia miesięczne ułożone są w sposób, blizko odpowiadający schematowi międzynarodowemu.

Jako uzupełnienie zestawień miesięcznych ukazuje się dla każdego roku „Annual Summary"; obok niego podawane sa „Quarterly Summary" dla okresów trzymiesięcznych dla każdego z 10-u okręgów, na które podzielone jest terytoryum sieci meteorologicznej londyńskiej. Średnie kwartalne podawane są nietylko dla danego roku, ale i dla lat poprzednich z dołączeniem kolejnych średnich pięcioletnich oraz średnich dla całego okresu od r. 1866. Dodamy, że liczby stacyj, włączanych do każdego okręgu, wahają się od 3 do 10.

c) Wydawnictwo spostrzeżeń stacyj rzędu II.

Przechodzimy teraz do zasadniczej publikacyi klimatologicznej, a mianowicie do wydawnictwa „Meteorological Observations at Stations of the Second Order", wychodzącego od r. 1876 w tomach osobnych. Spostrzeżenia za okres 1873—1875 pomieszczone były w odowiednich tomach w „Quarterly Weather Reports". Obecnie (w sierpniu 1906 r.) ogłaszany jest tom za r. 1901, lecz lata jeszcze nie wydane są opracowywane i wogóle nadsyłane wykazy miesięczne są sprawdzane bieżąco.

Rocznik za r. 1900 podaje spostrzeżenia z 76 stacyj rzędu II, które nadsyłały bez przerwy pełne wykazy miesięczne i z których obserwacye uważane były za dostatecznie dobre do publikacyi, po szczegółowem sprawdzeniu danych. Z ogólnej liczby stacyj 25 przypada na Szkocyę, 40 na Anglję właściwą, 3 na Wales i 8 na Irlandyę. Z 76 stacyj 19 należało do sieci Towarzystwa Meteorologicznego szkockiego w Edynburgu, a 16 do Królewskiego Towarzystwa Meteorologicznego w Londynie. Na skutek już dawniej zaprowadzonego porozumienia z Meteorological Office, towarzystwa te nadsyłają sprawdzone już wykazy z stacyi rzędu II do

Digitized by Google

ogłoszenia w wydawnictwie klimatologicznem Biura centralnego londyńskiego.

Wspomnimy, że sprawdzanie nadsyłanych do Office wykazów miesięcznych stacyj prowincyonalnych polega na porównaniu max. i min. temperatury z spostrzeżeniami, na sprawdzeniu wyprowadzonych danych wilgotności oraz wogóle wszystkich średnich oraz na przybliżonem porównaniu wartości i biegu ciśnień oraz stanu pogody na danej stacyi z wskazaniami stacyj poblizkich.

Publikacya „Meteorological Observations at Stations of the Second Order" dzieli się na dwie główne części.

W części pierwszej podane są obserwacye in extenso wybranych (w liczbie 21) stacyj rzędu II. Wybór ten dokonany był w ten sposób, aby dane punkty obserwacyjne reprezentowały. o ile można, całokształt terytoryum sieci; zwrócono jednak zarazem uwagę na ciągłość spostrzeżeń stacyj już dawniej istniejących.

Część II publikacyi zawiera zestawienie średnich miesięcznych z wynikami rocznemi.

Tablice są w ogóle dostosowane do schematów międzynarodowych (według kongresu w Rzymie z r. 1879) z tą różnicą, że w rubryce dla wilgotności do zwykłych rubryk ciśnienia pary wodnej w mm. i wilgotności względnej dodana jest trzecia p. t. „Depression of Wet bulb", dająca różnicę między stanami termometru suchego i zwilgoconego w czasie obserwacyj.

Obserwacye na stacyach rzędu II sieci brytańskiej prowadzone są dwa razy dziennie (o 9^h_a i 9^h_p czasu miejscowego), tylko na stacyi sieci „Scottish Meteorological Society" i na pięciu obserwatoryach (Aberdeen, Fort William, Kew, Falmouth, Valencia) obserwowano według czasu w Greenwich.

Przyrządy na wszystkich bez wyjątku stacyach były sprawdzane i należały do typów przyjętych przez Office. Nadto każda stacya podlegała peryodycznej inspekcyi.

W nagłówkach wykazów podane są wysokości stacyj nad poziomem morza oraz wyniesienia barometru, termometrów i deszczomierza nad powierzchnią gruntu. Wysokości nad poziomem morza (w całych stopach angielskich) były najczęściej wyznaczane przez poziomowanie z najbliższemi punktami trygonometrycznemi. Jako

Digitized by Google

wysokość „stacyi“ uważano zwykle wzniesienie powierzchni gruntu nad poziom morza w miejscu, gdzie był umieszczony deszczomierz.

Rubryka z barometrem podaje (w inches z częściami setnemi) dwie dzienne obserwacye z uwzględnieniem poprawek instrumentalnych i z redukcyą na 32°F. Zauważymy, że w kilkunastu poprzednich tomach sprowadzano odczytywane wartości barometru także i na poziom morza, co w tomie bieżącym zostało zaniechane. Wreszcie w nagłówkach jest obecnie także podawana wartość poprawki na ciężkość.

Termometry zawierają 4 rubryki (9a., 9p. oraz min., max. o 9p.) w stopniach Fahr. z częściami dziesiątemi. Rubryki dla „Humidity“ dają „Dep. of Wet.“ (w stopniach), „Vapour Pressure“ (w in.) oraz „Percentange“ w %.

Rubryka „Wind Direction and Force“ podaje, dla dwóch spostrzeżeń terminowych, kierunek wiatru (z liczby 16) oraz siłę według skali Beauforta (0-12), Kierunek wiatru jest „true, as distinguished from magnetic or compass directions“.

Dla tych stacyj, które posiadały anemometr Robinsona, dane były redukowane na skalę Beauforta według tablicy, podanej w instrukcyi z r. 1892. Wreszcie stacye szkockiego Towarzystwa Meteorologicznego używały skali tylko od 0 do 6 (t. zw. Land-Scale); dla redukcyi tych spostrzeżeń mnożono podane liczby przez 2.

Zachmurzenie podane jest w skali przyjętej od 0 do 10; osobne uwagi (ze znakami międzynarodowemi) podają w dwóch lub trzech słowach charakterystykę stanu pogody w danym dniu. Wskaźniki 0 i 2 oznaczają słabe, względnie silne natężenie danego zjawiska.

Wreszcie opad mierzono o 9-ej rano; w rubryce „Rain, 24 hours beginnig“ wysokość opadu (w tysiącznych inch.) jest odniesiona do dnia poprzedniego.

Wszelkie dane interpolowane (przez porównanie ze stacyami poblizkiemi) są zaznaczone odmiennym drukiem.

Przechodzimy teraz do „Monthly Summaries“. Zauważymy wogóle, że średnie miesięczne są obliczane jako połowa sumy średnich z dwóch obserwacyj dziennych. Rubryka temperatur pomieszcza także średnie z maximów i z minimów.

Jako liczby dni z opadem uważano także, w których wysokość wynosiła przynajmniej 0,1 inch.; liczby dni ze śniegiem liczono nicza-

Digitized by Google

leżnie od ilości spadłej, kierując się tylko uwagą obserwatora co do pojawienia się opadów.

Jako dni pogodne uważano takie, w których zachmurzenie średnie (z dwóch obserwacyj o 9a i 9p) było mniejsze od 2; jako dni pochmurne, gdy było ono większe od 8. Do dni z wichurą liczono takie, w których w jakiejkolwiek porze dnia obserwowano siłę wyższą od 7 według skali Beauforta (co odpowiada prędkości 37 mil ang. na godzinę).

Dobrze jest podnieść, że, dla dni z deszczem, okres dzienny uważany był od 9 rano dnia danego do 9 rano dnia następnego, gdy dla śniegu, gradu i t. p. dni liczono w sposób zwykły od 12 w nocy.

W zestawieniach rocznych dla wiatru redukowano dane do 8 kierunków (zamiast obserwowanych 16).

Wreszcie tablice roczne podają sumy miesięczne usłonecznienia i odnośne dane procentowe; wogóle używano „Campbell-Stokes' Burning Recorder" z wyjątkiem kilku stacyj, które posługiwały się systemem fotograficznym (Jordan's Photographic Recorder).

W tabeli końcowej wydawnictwa, zestawione są dla każdej stacyi wartości roczne wszystkich elementów.

Na zakończenie opisu działalności wydziału klimatologicznego „Meteorological Office" w Londynie dodamy, że opracowywano tam do druku wykazy z kilkudziesięciu stacyj w kolonjach angielskich. Do spostrzeżeń i wydawnictw kolonialnych powrócimy jeszcze w dalszym ciągu w osobnym dziale niniejszego artykułu.

Przechodzimy z kolei do następnego wydziału Biura londyńskiego, którym jest:

Wydział obserwacyjny (Observatory Branch).

W tej sekcyi Biura londyńskiego koncentruje się opracowywanie danych godzinnych według wskazań narzędzi samopiszących, które funkcyonują w paru obserwatoryach na terytoryum sieci. Zaznaczymy, że istnieje wogóle 13 takich obserwatoryów, które, z wyjątkiem Kew, właściwie należą do stacyj rzędu I, t. j. do stacyj, posiadających, prócz narzędzi zwykłych, także i komplety przyrządów samopiszących. Cztery obserwatorya: Aberdeen, Falmouth, Kew i Valencia zależą bezpośrednio od Meteorological Office w Londynie; Armagh, Fort William i Stonyhurst College obserwują wyłącznie dla Biura londyńskiego, obserwatorya w Glasgow i w Oxfordzie należą do uniwersytetu, w Bid-

Digitized by Google

ston i Southport do instytucyj miejscowych; wreszcie górskie obserwatoryum w Ben Nevis (wzniesione 4405 stóp nad powierzchnię morza) znajduje się pod zarządem Szkockiego Towarzystwa Meteorologicznego, a obserwatoryum w Greenwich stanowi tylko sekcyę znanego Obserwatoryum astronomicznego „The Royal Observatory."

Istnieją także stacye rzędu II. które posiadają bądź anemograf, bądź kilka innych narzędzi samopiszących; znajdują się także punkty obserwacyjne, które posiadają wyłącznie heliograf lub anemograf. Te ostatnie figurują jako „Additional Stations", a ich wykazy koncentrują się również w Wydziale obserwatoryjnym.

Zasadniczą publikacyą tego Wydziału jest „Hourly Readings obtained from the self-recording instruments", które wydawane są od r. 1869. W okresie 1869—1880 dane z przyrządów samopiszących były ogłaszane w „The Quarterly Weather Reports" dla okresów pięciodniowych; w latach 1881—1886 publikowano dane godzinne in extenso, dołączając średnie pięciodniowe; w okresie 1887—1899 powrócono do dawnych pięciodniówek, zaś od roku 1906 dane godzinne drukowane są in extenso bez średnich pięciodniowych.

Dodamy, że w publikacyi Office „Hourly Readings" podawane są tylko dane dla czterech obserwatoryów, a mianowicie: dla Aberdeen, Falmouth, Kew i Valencia, zależnych wprost od Biura londyńskiego, pozostałe zaś obserwatorya uwzględniane są w wynikach stacyj rzędu II, o których mówiliśmy poprzednio. Wyjątek stanowią dane z Greenwich, które są ogłaszane w osobnej publikacyi, niezależnej od Meteorological Office, p. t. „Results of the Magnetical and Meteorological Observations made at the Royal Observatory, Greenwich"

Kierownikiem sekcyi magnetyczno-meteorologicznej w Greenwich jest W. H. M. Christie D. Sc. z tytułem „Astronomer Royal".

W tomie 33 „Hourly Readings", dającym wyniki z czterech obserwatoryów za r. 1901, znajdujemy dane godzinne ciśnienia (otrzymane sposobem fotograficznym według wskazań barografu rtęciowego), temperatury powietrza (termograf fotograficzny z kulką suchą i zwilgoconą), prędkości i kierunku wiatru (Robinson cup-anemometer), wysokości opadu (Beckley self-registering rain-gauge) i usłonecznienia (Campbell-Stokes recorder).

Digitized by Google

Średnie dzienne były obliczane według wzoru:

$$\frac{1}{24}\left\{1+2+\ldots\ldots+\tfrac{1}{2}(0+24)\right\}.$$

Dla usłonecznienia wartości dane są w godzinach z częściami dziesiątemi, przyczem dla każdej godziny w nagłówku brano okres sześćdziesięciominutowy, licząc od połowy godziny poprzedzającej do połowy godziny następnej.

W końcu „Hourly Readings“ podane są „Yearly Values“ dla każdego z czterech obserwatoryów: Valencia, Aberdeen, Falmouth i Kew.

Wreszcie dodamy, że do zadań omawianego wydziału („Observatory Branch“) należy redukcyá i przygotowywanie do druku wszelkich nadetatowych obserwacyj, jak np. wypraw arktycznych i antarktycznych, specyalnych danych anemometrycznych (np. z wyspy Sw. Heleny) oraz „Occasional Publications“, jako to: „Rainfall Tables of the British Islands“ (1897); „Diurnal Rang of Rain“ (1900); „Ten Years'Sunshine“ (1881—90); „Temperature Tables for the British Islands“ (1902) lub „Reports“ o „London Fog Inquiry“, „The Beaufort Scale of Wind Force“ i t. p.

Wypada zaznaczyć, że program tych publikacyj jest układany całkowicie przez dyrektora lub asystentów naukowych Biura, a zadaniem Wydziału obserwatoryjnego jest dokonywanie wszelkich wskazanych redukcyj i układanie tabel według wskazanego planu.

Ostatni piąty wydział Meteorological Office pod nazwą „Correspondence and Accounts Branch“ zajmuje się czynnościami administracyjno-finansowemi oraz prowadzeniem korespondencyj. Dodamy, że obszerna biblioteka Office, licząca około 20000 tomów, jest pod zawiadywaniem sekcyi klimatologicznej.

Z sum, asygnowanych na utrzymanie Meteorological Office, wyjmujemy następujące dane za r. 1904. Z ogólnej sumy Ł. 16099 (w funtach szterlingach) przeznaczone było na:

Honoraryum członków „Met. Council“ i dyrektora . . .	Ł. 1464
Wynagrodzenie urzędników	„ 1087
Wynajem lokalu, opał i światło	„ 723
Poszukiwania specyalne i delegacya na kongres międzynar.	„ 898

Digitized by Google

Wydatki na stacye sieci	Ł. 4075
Biuro synoptyczne	„ 2866
Inspekcye stacyj	„ 427
Dział Meteorologii morskiej	„ 2766
Inne pozycye	„ 1793

Dodamy, że w wydatkach na Meteorologię morską i na stacye sieci największą pozycyę stanowią sumy na zakup narzędzi. Wreszcie co się tyczy publikacyj, to te są drukowane w drukarni państwowej i nie obciążają przeto budżetu; zato poważna suma (Ł. 1660 w r. 1904) jest wypłacana urzędowi pocztowemu za depesze krajowe i zagraniczne.

III. Towarzystwa meteorologiczne

Pierwsze usiłowania do utworzenia korporacyi meteorologicznej w Anglii datują się od r. 1723, w którym Dr. James Turin, sekretarz Royal Society, ogłosił w „Philosophical Transactions" artykuł po łacinie, nawołujący do zawiązania Towarzystwa Meteorologicznego, któreby czuwało nad jednostajnem i regularnem prowadzeniem obserwacyj i nad wyborem porównywalnych narzędzi. Kwestya ta była następnie ponowiona przez R. Pickeringa i około roku 1780 przez prof. Daniella, który wskazywał na publikacye ówczesnej sieci towarzystwa meteorologicznego, utworzonej na kontynencie przez elektora Karola Teodora (t. zw. sieci Palatynatu).

Właściwy początek uczyniono jednak dopiero w r. 1823, gdy na wezwanie J. G. Tatema (ogłoszone w „Monthly Magazin") utworzone zostało „The Meteorological Society of London". Pierwszym sekretarzem był T. Wilforg, a prezydentem G. Birbeck.

Jakkolwiek co do celów i rozmiaru zadań i prac tego towarzystwa było powiedziane, że „the Meteorological Society has been formed, not for a city, nor for a kingdom, but for the world; it wishes to be central point, the moving pover", to jednak działalność tej nowej organizacyi była ograniczona i mało żywotna w pierwszych latach jej istnienia. W r. 1839 wydano jeden tom „Transactions of the Meteor. Society", w którym pomieszczone były sprawozdania z posiedzeń, Tabulae meteorologicae, a także interesujący artykuł J. Ruskina z Ox-

Digitized by Google

fordu „Remarks on the present state of Meteorological Sciences". Po pewnej przerwie ukazał się w r. 1843 staraniem J. W. G. Gutcha „Quarterly Journal of Meteorology and Physical Science"; publikacye te jednak nie miały dalszego ciągu, a w kilka lat potem i samo towarzystwo przestało istnieć.

a) Royal Meteorological Society. Po pewnej przerwie w dziejach korporacyj meteorologicznych angielskich utworzono w r. 1850 „British Meteorological Society", którego pierwszym sekretarzem był James Glaisher. W pierwszym roku swego istnienia liczyło ono około 150 członków, a prezesem stowarzyszenia obrany był S. C. Whitbread. W okresie od r. 1851 do 1861 wydawano corocznie „Report of the Council", zawierający sprawozdania z działalności. W r. 1866 stowarzyszenie otrzymało „Royal Charter of Incorporation" i legalizowany tytuł „The Meteorological Society".

Następny okres od r. 1867 do 1880 znamionuje szybki rozwój Towarzystwa. Zorganizowano stałe zebrania i specyalne biuro z biblioteką w osobnem pomieszczeniu; zamiast poprzednich sprawozdań rocznych rozpoczęto wydawnictwo „Proceedings" (tom I w r. 1861-63 do tomu V w r. 1c69—71), a bezpośrednio po nich założono własne pismo peryodyczne, które pod tytułem „Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society" wychodziło bez przerwy w odstępach kwartalnych i obecnie (w r. 1906) dobiega swego XXXII tomu. Poważna ta publikacya podaje prace oryginalne, korespondencye naukowe, sprawozdania z posiedzeń i literaturę; przeważna część artykułów jest treści klimatologicznej, zwłaszcza zawiera wiele cennych danych co do klimatów różnych kolonji angielskich. Zaznaczymy, że szczegółowy spis artykułów podany został w „Index of the publications of the English Meteorological Societies" (za okres 1839—1881) oraz w „Index to the Quarterly Journal of the Royal Meteorol. Society" (za okres 1882—1900).

Pierwszorzędnem dziełem Towarzystwa było także ugruntowanie własnej sieci meteorologicznej, istniejącej niezależnie od sieci oficyalnej, należącej do Meteorological Office w Londynie. Już w pierwszym tomie „Quarterly Journal" podane są wykazy „Meteorology of England" za r. 1869 z kilkudziesięciu stacyj; początkowo ograniczano się do średnich kwartalnych, a następnie ogłaszano średnie dla każdego miesiąca z dołączaniem tekstu z przeglądem pogody.

Digitized by Google

Od r. 1881 wykazy te wyłączono z „Quarterly Journal“, a natomiast rozpoczęto osobne wydawnictwo klimatyczne, wychodzące kwartalnie p. t. „The Meteorological Record; monthly results of observations made at the stations of the R. Met. Society with remarks on the Weather“. W r. 1906 wydawnictwo to sięga 26-go tomu, podając średnie miesięczne dla 100 z górą stacyj rzędu II i III. Obecnym sekretarzem Towarzystwa jest W. Marriott.

Na uwagę zasługuje ten fakt, że sieć Towarzystwa jest dostosowana do postanowień kongresów międzynarodowych i że od początku organizacyi spostrzeżeń zwracano ścisłą uwagę na przyrządy obserwacyjne i na konieczność ich stałej inspekcyi. Wreszcie dla ujednostajnienia danych, umówiono się z oficyalnym Meteorological Office w Londynie, że kopie wykazów miesięcznych będą jednocześnie przesyłane do użytku i ogłoszenia w zestawieniach codziennych i miesięcznych. Jak już wspomnieliśmy poprzednio, publikacya Office p. t. „Meteorological Observations at Stations of the Second Order“ podaje także wyniki ze stacyj, należących do sieci towarzystw meteorologicznych.

Dla użytku obserwatorów sieci Royal Met. Society istnieje osobna instrukcya p.t. „Hints to Meteorological Observers“, starannie ułożona i zaopatrzona w tablice. Stacye tej sieci podzielone są na zwykłe stacye rzędu II, obserwujące wszystkie elementy dwa razy dziennie o 9^h_a i 9^h_p; na stacye rzędu III (nazwane „Climatological“), notujące wszystkie elementy raz dziennie (o 9^h_a), oraz na stacye, w których tylko pewne elementy są notowane. Dodamy, że właściwych stacyj deszczowych Towarzystwo nie organizuje.

Kończymy tą krótką i szkicową wiadomość o Royal Meteorological Society zaznaczeniem, że liczy ono obecnie około 700 członków, że posiada własne biuro przy Victoria Street z zasobną salą posiedzeń i biblioteką i że jej ciągły rozwój ujawnia się między innemi w urządzaniu peryodycznych wystaw przyrządów meteorologicznych i w organizacyi wykładów i odczytów z dziedziny Meteorologii.

Wspomnimy z kolei o pokrewnem towarzystwie, istniejącem w Szkocyi pod nazwą:

b) Scottish Meteorological Society. Początek działalności tego towarzystwa z siedzibą w Edynburgu sięga 1855 r. Od r. 1863 posiada ono własną publikacyę p. t. „Journal of the Scot-

Digitized by Google

tish Meteorological Society", która obecnie sięga XIII-go tomu; prócz kilku artykułów klimatologicznych każdy tom zawiera wykazy z kilku kolejnych (zazwyczaj trzech) lat dla stacyj szkockiej sieci meteorologicznej, zorganizowanej niezależnie od sieci oficyalnej Biura londyńskiego w sposób podobny, jak to omówiliśmy wyżej dla Royal Meteorological Society.

Zaznaczamy, że sieć szkocka zorganizowana była wcześniej od londyńskiej i już w okresie 1856—1863, w wydawanych kwartalnie „Report on the Meteorology of Scotland", podawane są średnie miesięczne dla zwykłych elementów z przeszło 50 stacyj rzędu II. Do tablic dołączane są przeglądy pogody dla każdego miesiąca.

Dla obserwatorów sieci szkockiej używana jest ogólna instrukcya, wydana przez Meteorological Office w Londynie; narzędzia, posiadane na stacyach prowincyonalnych, są opatrzone poprawkami i sprawdzane w czasie dokonywanych inspekcyj. Nadmienimy, że czynnym kierownikiem tej sieci jest od szeregu lat A. Buchan (Meteorological Secretary).

Kolejne tomy „Journal of the Scottish Meteorological Society" zawierają wyniki średnie z kilku lat i przeto ukazują się też w odstępach kilkuletnich. Tom XIII z r. 1903 podaje rezultaty za r. 1899, 1900 i 1901; w tym czasie sieć szkocka posiadała 67 stacyj rzędu II, z których wyniki podawane są w średnich miesięcznych; dalej około 75 punktów obserwacyjnych „at the northern lighthouses", notujących niektóre elementy, i wreszcie przeszło 200 stacyj deszczowych. Wyniki z wszystkich tych stacyj podawane są w średnich (lub w sumach) miesięcznych, a niezależnie od tego dołączany jest tekst z miesięcznymi przeglądami pogody.

Na skutek porozumienia z Meteorological Office w Londynie, zestawienia miesięczne, nadsyłane przez obserwatorów z terytoryum sieci szkockiej, są dostarczane następnie (w formie sprawdzonej i gotowej do druku) na użytek Biura londyńskiego, które wyciągi z tych obserwacyj pomieszcza w swej publikacyj klimatologicznej dla stacyj rzędu II.

Dodamy, że do liczby stacyj szkockich należało przez lat kilkanaście obserwatoryum górskie w Ben Nevis, obecnie zamknięte. Nadmienimy także, że liczba członków Scottish Meteorological Society przenosi 500.

Digitized by Google

Mieliśmy już sposobność zauważyć, że ani sieć oficyalna, ani sieci Royal lub Scottish Meteorological Societies nie posiadają większej liczby prostych stacyj deszczowych według typu, rozpowszechnionego na kontynencie Europy. Otóż podobna sieć deszczowa istnieje oddawna w Anglii niezależnie od poprzednich sieci.

c) British Rainfall Organization. Podajemy o niej kilka krótkich wiadomości. Sieć deszczowa powstała, dzięki usiłowaniom G. J. Symonsa i ma, do dni obecnych, charakter zupełnie prywatny. Pierwszy rocznik p. t. „British Rainfall", wydany został w r. 1862 i zawierał rezultaty (za rok 1860 i 1861) z 500 punktów pluwiometrycznych, rozsianych na terytoryum wysp brytańskich. Początkowo podawane były tylko sumy roczne obok nazw stacyj i ich wzniesień nad powierzchnią gruntu i morza. Wkrótce jednak dodano w tablicach rubryki dla największych opadów dziennych oraz dla liczby dni z opadem. Nadmienimy, że za dzień z opadem liczono taki, w którym zamieszczona wysokość wynosiła 0.01 inch. lub więcej. Dla ułatwienia zestawień, terytoryum sieci podzielone było na 23 sekcye oddzielne.

Roczniki „British Rainfall" były stale rozszerzane, a to zarówno wskutek wzrostu liczby stacyj deszczowych, jako też przez dołączanie artykułów specyalnych i tekstu z opisami charakteru i przebiegu opadów w danym okresie. Tak np. rocznik z 1871 r, liczący 200 stron, podaje, po sprawozdaniu i uwagach o stacyach, szereg różnej objętości artykułów z dziedziny pluwiometryi; potem następują uwagi miesięczne co do charakteru pogody w r. 1871, streszczenia uwag obserwatorów (według różnych sekcyj), dane o najwyższych opadach w ciągu roku, o sumach miesięcznych (w wyciągu dla niektórych stacyj), rozkład procentowy dla oddzielnych miesięcy (dla sekcyj), porównanie r. 1871 z poprzednimi latami i wreszcie tablice ogólne, podające dla każdej stacyi (około 1500) sumę roczną opadu (do setnych incha), liczbę dni oraz dane o deszczomierzu: jego średnicę, wzniesienie nad powierzchnię gruntu i nad powierzchnię morza. Zauważymy, że wzniesienie deszczomierzy wynosi wogóle blizko 1 foot (0,3m), jakkolwiek pewien dość znaczny odsetek stacyj wykazuje większe wzniesienia. Wreszcie notowanie opadów uskuteczniano raz dziennie około 9 rano.

Co się tyczy formy i rozmiarów deszczomierzy, to składają się

Digitized by Google

one z cylindra z wyjmowanym zbiornikiem. Osobna miarka posiada działki bezpośrednie co 0,01 inch.

Co do średnicy deszczomierzy, to nie wszędzie wymiary były jednakowe, lecz najwięcej używane były na stacyach deszczowych średnice o 5 inch., gdy na stacyach sieci Meteorological Office używane średnice wynoszą zwykle 8 inch. Zresztą, według przeprowadzonych przez Symonsa specyalnych prób i poszukiwań, wielkość średnicy nie okazuje większego wpływu na mierzone wysokości opadów. Tak np. dla deszczomierzy z otworami, wahającymi się w granicach od 3 do 24 inch., różnice w wskazaniach nie dochodziły do 1%.

W razie śniegu lub gradu wysokość dzienna opadu oznaczana była po stopieniu.

Roczniki „British Rainfall" były opracowywane bez przerwy i ogłaszane przez G. J. Symonsa aż do jego śmierci w d. 10 marca 1900 r. Śmierć tego zasłużonego organizatora sieci deszczowej angielskiej nie wprowadziła jednak przerwy w funkcyonowaniu sieci i w wydawnictwie spostrzeżeń, które objął następnie Hugh R. Mill, sekretarz Royal Meteorological Society. Wydany przez tego ostatniego tom „British Rainfall" za r. 1904 wykazuje nieustanny rozwój sieci, która liczy obecnie około 4000 punktów deszczowych, rozrzuconych na terytoryum Wielkiej Brytanii i Irlandyi. Treść roczników „British Rainfall", liczących około 400 stron in 8°, wciąż wzrasta, lecz układ artykułów i tablic pozostał bez zmiany od lat kilkunastu.

Dział pierwszy zawiera sprawozdania z działalności sieci i artykuły specyalne; dział drugi podaje uwagi o przebiegu pogody, uwagi obserwatorów z każdej z 23 sekcyj sieci, rozumowane wyciągi z danych co do liczby dni z opadami. Jako nowy dział podane są wysokości miesięczne opadów dla 233 wybranych stacyj sieci.

Wreszcie ostatni dział zawiera „General Table of Total Rainfall" i podaje dla każdej stacyi sieci sumę roczną opadów, liczby dni oraz wzniesienia deszczomierzy i ich średnice.

Zaznaczymy, że materyały deszczowe, zbierane od r. 1860, zostały wielokrotnie zestawiane zarówno przez Symonsa, jako też staraniem Meteorological Office; w wydawnictwach oficyalnych tej ostatniej instytucyi znajdują się „Rainfall Tables of the British Islands, 1866—1890", zestawione w r. 1897 według roczników Symonsa.

Digitized by Google

Imię G. I. Symonsa uwieczni się w dziejach klimatologii angielskiej nie tylko przez utworzenie sieci deszczowej, lecz także przez założenie popularnego miesięcznika meteorologicznego p. t. „Monthly Meteorological Magazine“, którego pierwszy tom wydany został w roku 1866. Geneza powstania tego wydawnictwa była prawdopodobnie następująca: roczniki „British Rainfall“, skupiające wyniki pomiarów opadów ukazywały się w zbyt rzadkich odstępach i zbyt późno, aby mogły więcej interesować licznych obserwatorów sieci deszczowej; dlatego więc pojawianie się co miesiąc zeszytów, poświęconych elementarnemu rozbiorowi różnych kwestyj meteorologicznych i podających nadto zestawienia bieżące opadów za ostatni miesiąc wraz z krótkim przebiegiem pogody, jest niewątpliwie pożyteczne i interesujące dla wszystkich.

Rachuba ta nie zawiodła, jak o tem świadczy 41-y tom (z r. 1906) „Symon's Meteorological Magazine“, wydawany obecnie już przez H. R. Milla. Przystępność i staranny dobór treści oraz nizka cena (5 szylingów rocznie wraz z przesyłką pocztową) zjednały mu liczne grono czytelników oraz współpracowników.

Co się tyczy rodzaju treści i artykułów, podawanych w tym miesięczniku, to zauważymy, że na pierwszym planie zamieszczane są krótkie artykuły treści klimatologicznej, dotyczące bądź przebiegu elementów meteorologicznych na wyspach Zjednoczonego Królestwa bądź „of the British Dominions beyond the Sea“. Te ostatnie, nadsyłane przeważnie bezpośrednio i bieżąco przez obserwatorów i czytelników z licznych kolonij angielskich, nadają publikowanym tabelom (Climatological Table for the British Empire) cechę nader interesującą i ogólną.

Prócz artykułów podawane są liczne korespondencye czytelników, a także sprawozdania z posiedzeń i działalności towarzystw i instytucyj meteorologicznych.

Koniec zeszytu jest poświęcany zestawieniom sum oraz liczb dni wartości najwyższych dla opadu, a także max. i min. temperatury dla kilkudziesięciu stacyj, wybranych po dwie lub trzy dla każdej sekcyi, na którą podzielona jest sieć deszczowa. Po zestawieniach podany jest tekst z przebiegiem pogody za ostatni miesiąc, osobno dla Anglii z Walią, dla Szkocyi i dla Irlandyi. Tabela na ostatniej stronie zeszytu zawiera wspomniane powyżej „Climatological Tables for the

Digitized by Google

British Empire", podając wartości liczbowe miesięczne dla temperatury i opadów z kilkunastu stacyj położonych w Afryce, Azyi i Australii oraz na wyspach oceanicznych.

Dodamy, że dla tomu I do XXX (za okres 1866—1895) wydany został w r. 1897 szczegółowy indeks, ułożony według treści i nazwisk autorów.

CZĘŚĆ DRUGA.

IV. Obserwacye kolonialne.

W części drugiej niniejszego artykułu omówimy pokrótce organizacye meteorologiczne, funkcyonujące w kolonjach, prowincyach autonomicznych i krajach, będących pod protektoratem Wielkiej Brytanii. Jak obszerne przestrzenie obejmują te terytorya i jak przeto ważnem jest dla klimatologii ogólnej ich „klimatyczne" poznanie, wynika choćby z poniższej tabelki, podającej w tysiącach kilometrów kwadratowych powierzchnie, zajmowane przez te kraje, rozrzucone we wszystkich stronach świata.

1) Zjednoczone Królestwo: Great Britain (England, Wales, Scottland) i Irlandya (ludności 40 milionów). Terytoryum 314 tys. km²

2) Posiadłości europejskie (Gibraltar, Malta etc. z 200000 ludności). Terytoryum 330 km².

3) Azya: Imperyum Indyjskie wraz z Burmą, Ceylon, Cyprus, Aden i Socotra, Straits Settlements, Labuan, Hong-Kong, British North Borneo (ludności 297 millonów). Terytoryum 5324 tys. km².

4) Afryka: Przylądek Dobrej Nadziei, Afryka Centralna, Południowa i Wschodnia, Niger Coast Protectorate (protektorat wybrzeży Nigru), Uganda etc., Sierra Leone, Gold Coast etc., wyspy Św. Heleny, Ascension, Mauritius etc. (33 miliony ludności). Terytoryum 4512 tysięcy km².

5) Australia: Nowa Walia Południowa, Wiktorya, Queensland Australia Południowa, Australia Zachodnia, wyspy Tasmania, Nowa Zelandya, Fiji, Nowa Gwinea etc. (5 milionów ludności). Terytoryum 8240 tysięcy km².

Digitized by Google

6) Ameryka: Brytańska Ameryka Północna (Dominium Canada i New Foundland); wyspy zachodnio-indyjskie: Jamaica, Trinidad, Barbados, Grenada. St. Vincent, St. Lucia, Bahamas etc.; British Honduras, British Guiana oraz Falkland Islands (ludności 7 milionów). Terytoryum 9491 tysięcy km².

Ogółem przeto 27880 tysięcy km² lub okrągło 28 milionów km².

Podane (w milionach) liczby ludności mają także pewne klimatologiczne znaczenie chociażby z tego względu, że zorganizowanie sieci meteorologicznej jest wogóle tem łatwiejsze, im dane terytoryum jest bardziej zamieszkane.

Zaznaczymy odrazu, że zgodnie z ogólną zasadą decentralizacyi i autonomii, kraje i kolonie, zgrupowane pod egidą Wielkiej Brytanii, posiadają swe odrębne siecie oraz oddzielne biura i publikacye meteorologiczne.

W Meteorological Office niema osobnego działu dla stacyj kolonialnych, a nawet zdaje się, że ta instytucya nie daje żadnej dyrektywy poza własnem terytoryum, pozostawiając organizacyę meteorologiczną w innych krajach i koloniach, związanych z metropolią, prawie wyłącznie trosce i staraniom organów i oświeconych członków społeczeństw miejscowych.

W ten sposób powstała sieć indyjska, sieci australijskie, sieć południowo-afrykańska i na wyspie Mauritius, sieć kanadyjska i niektóre inne. O każdej z tych sieci będzie osobno mowa poniżej.

Wyjątek stanowią bądź drobne wyspy, bądź terytorya, w których ze względu na mały rozwój kulturalny otoczenia i zbyt nieznaczną liczbę ludności białej, prawidłowa organizacya odrębnej sieci była dotychczas trudna do urzeczywistnienia. Pojedyńczy obserwatorowie z tych stron nadsyłają poczęści swe wykazy miesięczne do Meteorological Office w Londynie; w przeważnej jednak liczbie wypadków komunikują te dane miejscowym urzędom, które też publikują je w swych rocznych sprawozdaniach.

Tak w r. 1905 Meteorological Office otrzymywała następujące wykazy (w manuskrypcie) ze stacyj kolonialnych lub od konsulów zagranicznych:

Z wyspy Cypru (z 6 stacyj).

Z Gibraltaru (1).

Digitized by Google

Z Marokko (Cape Spartel, Casablanca, Mogador i Saffi).

Z Seryi (Beyrout).

Z Afryki Wschodniej (Upper Sheikh).

Z Afryki środkowej (Wadelai w Sudanie wschodnim).

Z Ugandy (9 stacyj).

Z Afryki Zach. (z Gold Coast z 8 punktów, z Sierra Leone 1 punkt).

Z wysp Zachodnio-Indyjskich (z Bahama z 6 punktów, Barbados i Sombrero po 1).

Z Ameryki północnej (Repulse Bay na Southampton Island).

Z Ameryki środkowej (Panama Colon).

Z Ameryki południowej (Georgetown w Guianie).

Z wysp Atlantyckich (z Św. Heleny 3 stacye, z Falkland Islands 1 stacya).

Z Chin (Chinkian, Wuhu).

Ogółem 49 stacyj.

Jak to już zaznaczyliśmy wyżej, wykazy z stacyj poza obrębem wysp brytańskich nie są bieżąco publikowane przez Meteorological Office w Londynie. Jednak za lata ubiegłe wydano dotąd następujące zbiorowe publikacye:

A) Meteorological Observations at the Foreign and Colonial Stations of the Royal Engineers and the army Medical Department 1852—1886 (Londyn 1890).

Ważna ta publikacya podaje zestawienia miesięczne i roczne dla 33 następujących stacyj:

1) New Westminster (British Columbia) 1860—1861.
2) New Foundland 1852—1862, 1865—1870.
3) Quebec (Amer. Półn.) 1853—1861, 1866—1870.
4) Halifax („ „) 1852—1861, 1864—1875.
5) Kingston C. W. 1853—1861.
6) Bermuda 1852—1862, 1866—1886.
7) Gibraltar 1852—1862, 1864—1886.
8) Malta 1852—1861, 1865—1886.
9) Korfu 1852—1861.
10) Scutan (Egipt i Sudan) 1865—1886.
11) Assouan „ „ „ „
12) Korosko „ „ „ „
13) Wady Halfa „ „ „ „

Digitized by Google

14) Bahamas (Indye zach.) 1852—62, 1864—86.
15) Jamaica-Up Park Camp. (Ind. zach.) 1852—61, 1864—86.
16) Jamaica-New Casta (Ind. zach.) 1866—86.
17) Honduras (Ind. zach.) 1866—70.
18) Barbados (Ind. zach.) 1853—62, 1865—86.
19) Bathurst (Afr. zach.) 1869.
20) Sierra Leone (Afr. zach.) 1847—51, 1874—86.
21) Św. Helena 1853—62.
22) Natal 1868—86.
23) Graham's Town (Afr. poł) 1853—62.
24) Cape Town, 1867—70, 1860—75.
25) Trincomalee (Ocean Ind.) 1865—75.
26) Kandy (Oc. Ind.) 1866—75.
27) Colombo 1852—1862, 1865—75.
28) Newera Eliya (Oc. Ind) 1866—72.
29) Singapore 1871—86.
30) Mauritius 1853—61.
31) Hong Kong 1853—62. 1865—86.
32) Fremantle (Australasia) 1852—59.
33) Auckland („) 1853—62, 1864—69.

Wykazy miesięczne z tych stacyj, według schematu międzynarodowego, zawierają ciśnienie (red. na temperaturę 32°F.) dla dwóch dziennych spostrzeżeń; temperatury dla dwóch notowań oraz średnie z max. i min z dołączeniem extremów; spostrzeżenia terminowe obu wilgotności, zachmurzenia, opadów z liczbą dni i wiatrów.

Każdy rok obserwacyjny podany jest osobno; notowania dokonywane były dwa razy dziennie (wogóle o 9^h_a i 9^h_p).

Jako dopełnienie tej nader ważnej publikacyi klimatologicznej, można uważać dwa tomy następujące:

B) Meteorological Observations made at Sanchez (Samaná Bay), St. Domingo 1886—1888 (Londyn 1890).

Notowania prowadzone były od 6^h_a do 10^h_p w odstępach co dwie godziny i podane są in extenso.

C) Report on the Meteorology of Kerguelen Island (Londyn 1879).

Dalszym ciągiem publikacyi, wymienionej pod A), jest następujące wydawnictwo:

Digitized by Google

D) Climatological Observations at Colonial and Foreign Stations. I. Tropical Africa, 1900—1901—1902. With summaries for previous years and Frontispiece Map (London, Meteorological Office, 1904). Podane tu są zestawienia miesięczne i roczne:

Z Sudanu Egipskiego (7 stacyj).

Z Ugandy (8 stacyj).

Z Wolnego Państwa Kongo (1).

Z British East Africa (15).

Z British Central Africa (Shire Highlands i Nyasaland, 32 stacye).

Z Rhodezyi (18 stacyj).

Z Zambezyi portugalskiej (1 stacya).

Dla tych stacyj są podane zestawienia w zakresie obserwacyj rzędu II, z wyłączeniem elementów nie notowanych. Dla kilku stacyi dołączone są także średnie (lustrum) lub średnie roczne za ubiegłe lata.

Warto zaznaczyć, że do publikacyi tej (opracowanej przez E. G. Revensteina) dołączone jest zestawienie bibliograficzne, wskazujące dla każdej stacyi oddzielnie datę, okres i miejsce, gdzie były ogłaszane rezultaty spostrzeżeń meteorologicznych.

Poza temi fachowemi wydawnictwami zaznaczymy, że krótkie wiadomości oraz zestawienia wyników spostrzeżeń meteorologicznych można znaleść w następujących wydawnictwach oficyalnych:

1) „Colonial Reports-Annual". Broszury te wychodzą corocznie w Londynie i przygotowywane są dla sprawozdań parlamentarnych. W rubrykach „Climate", „Meteorology" lub „Meteorological Returns" podawane są krótkie opisy z zaznaczeniem najbardziej charakterystycznych cech klimatu; często przytaczane są zestawienia liczbowe (broszury te mogą być łatwo nabywane w księgarniach i kosztują kilka pensów)

2) „Statistical Tables relating to British Colonies, Possessions and Protectorates." Zbiorowe to wydawnictwo statystyczne, wychodzące corocznie, zawiera, między innemi, zestawienia meteorologiczne za rok ostatni dla jednej przynajmniej stacyi w każdej kolonii. Znajduje się ono w księgarniach, cena nie przenosi 10 szyl.

3) Najobfitszem jednak źródłem zestawień klimatycznych są „Annual Reports" poszczególnych kolonij, drukowane w charakterze sprawozdań rocznych przez władzę naczelną w głównem mieście każdego politycznie oddzielnego terytoryum. Te „Annual Reports" za-

Digitized by Google

wierają prawie zawsze osobne działy p. t. „Meteorology“, w których podawane są wiadomości, a ewentualnie zestawienia z prowadzonych spostrzeżeń. Dodamy, że często publikacye meteorologiczne z poszczególnych kolonij i krajów wychodzą jako odbitki z ogólnych „Annual Reports“. W wielu miejscach, zwłaszcza na wyspach, rezultaty obserwacyj drukowane są peryodycznie w miejscowych „Government Gazette“.

Przechodzimy teraz do treściwego przedstawienia obecnego stanu i organizacyi wielkich i samoistnych sieci, jako to: indyjskiej, australijskiej, południowo - afrykańskiej i kanadyjskiej. Rozpoczynamy od Imperyum Indyj Wschodnich.

V. Sieć indyjska.

Początek prawidłowej organizacyi spostrzeżeń w Indyach datuje się od r. 1864. Jakkolwiek już poprzednio prowadzone były systematyczne obserwacye w Madras, Bombay, Calcutta oraz w Simla, Dodabetta i Trerandium, to jednak obserwacye w innych punktach tego ogromnego terytoryum prowadzone były dorywczo i przy pomocy niesprawdzonych narzędzi.

Silnym impulsem do założenia prawidłowej sieci było pojawienie się groźnego cyklonu z r. 1864, który poczynił olbrzymie szkody w porcie Calcutta; okazało się, że te ostatnie mogły być były znakomicie zredukowane, gdyby istniała była odpowiednia sygnalizacya meteorologiczna.

Początkowo utworzono 4 oddzielne organizacye meteorologiczne: w Punjab, w południowo zachodnich prowincyach, w Madrasie i w Bengalu pod kierownictwem delegowanych „provincial-reporter“. Ze względu jednak na braki tego systemu złączono w r. 1874 wszystko w jedną sieć pod dyrekcyą jednego „general-reporter“, którym był mianowany H. F. Blanford.

Już w r. 1875—76 sieć indyjska liczyła 3 stacye rzędu I (obserwatorya w Calcutta, Allahabad i Lahore), prócz obserwatoryów w Madras i Colombo, które były niezależne od sieci; dalej 21 stacyj rzędu II, obserwujących dwa razy dziennie o 10^h_a i 4^h_p i oprócz tego na 4 dni co miesiąc, w odstępach godzinnych. Nadto na 79 stacyach rzędu II

Digitized by Google

rzędu II dwukrotne dzienne obserwacye były dokonywane bez dodatku notowań godzinnych.

Co się tyczy wyboru narzędzi, które ulegały poprzednio sprawdzeniu, to nie różnią się one od tych, które są używane w sieci londyńskiej. Dodamy, że opis szczegółowy urządzenia i funkcyonowania stacyj sieci indyjskiej podany jest w „Instructions to observers of the India Meteorological Department“ (2 wydanie w r. 1902).

Jednocześnie zapoczątkowane zostało wydawnictwo p. t. „Report on the Meteorology of India“, którego pierwszy tom ukazał się w roku 1875. Niezależnie od tej publikacyi ogłaszano corocznie sprawozdanie z działalności sieci w „Report on the Administration of India“, które ukazuje się bez przerwy od r. 1875 do czasu obecnego.

Co do układu i treści publikacyi klimatologicznej „Report on the Meteorology of India”, zauważymy, że podawane są tu położenia, opisy i sprawozdania z inspekcyi dla wszystkich stacyj sieci, dalej średnie miesięczne dla kolejnych elementów z dołączeniem termometrów radiacyjnych i usłonecznienia. Do danych liczbowych dołączany jest tekst rozumowany. Szczególna uwaga zwrócona jest na rozkład geograficzny elementów, przyczem całe terytoryum sieci (obejmujące Indye właściwe, Ceylon i Burmę), podzielone jest na 11 meteorologicznych dystryktów.

Dane miesięczne in extenso publikowane są corocznie tylko dla 7 stacyj, a mianowicie:

1) Calcutta (Alipore), $\varphi=22^0 32'$N, $\lambda=88^0 20'$E, $h=21{,}4$f.
2) Allahabad, $\varphi=25^0 26'$N, $\lambda=81^0 52'$E, $h=309{,}3$f.
3) Lucknow, $\varphi=26^0 50'$N, $\lambda=81^0 0'$E, $h=369{,}4$f.
4) Lahore, $\varphi=31^0 34'$N, $\lambda=74^0 20'$E, $h=702{,}2$f.
5) Nagpur, $\varphi=31^0 9'$N, $\lambda=79^0 11'$E, $h=1825$f.
6) Bombay, $\varphi=18^0 54'$E, $\lambda=72^0 49'$E, $h=37$f.
7) Madras, $\varphi=13^0 4'$N, $\lambda=9^0 14'$E, $h=22$f.

Obserwacye w tych punktach prowadzone są cztery lub trzy razy dziennie; jako godziny obserwacyjne figurują kombinacye: 4^h, 10^h, 16^h, 22^h; 6^h, 10^h, 16^h, 22^h; 10^h, 16^h, 22; 8^h, 14^h, 20^h.

W tomach „Meteorology of India“ figuruje, prócz Indyi, Ceylonu i Burmy, także kilka stacyj z Afryki (Zanzibar), z Turcyi Azyatyckiej, z Arabii (Aden), z Persyi oraz z Beludżystanu i Kaszmiru.

Digitized by Google

Dla ułatwienia poszukiwań dodamy, że dane in extenso dla 7 obserwatoryów ogłoszone zostały w okresie 1879—8 osobno p. t. „Meteorological Observations recorded at seven stations in India".

Zasłużony organizator sieci indyjskiej H. F. Blanford zapoczątkował także ważne wydawnictwo „Indian Meteorological Memoirs", w którem skupione zostały opracowywania zbieranych materyałów i badanie stosunków klimatycznych Indyi. Pierwszy tom tego obszernego wydawnictwa ukazał się w r. 1876. w r. zaś 1904 wydano tom XVII.

Publikacya ta ukazuje się w różnych odstępach, w miarę nagromadzenia stosownych prac.

O znacznym rozwoju i płodnej działalności sieci indyjskiej świadczą następujące krótkie dane, które wyjmujemy ze sprawozdania „Report on the Administration of the Meteorological Department" za r. 1904. W tym czasie stanowisko „Meteorological Reporter of the Governement of India and Director-general of Indian Observatories" zajmował sir John Eliot, który już w tymże roku ustąpił miejsca nowomianowanemu G. T. Walkerowi.

W okresie 1903—4 sieć indyjska liczyła 7 obserwatoryów (stacyj rzędu I z narzędziami samopiszącemi), 41 stacyj rzędu II, obserwujących trzy razy (8^h, 10^h, 16^h) dziennie, przyczem spostrzeżenia o 8^h były komunikowane telegraficznie do obserwatoryów w Simla, Calcutta, Bombay i Madras dla użytku w prowincyonalnych „Daily Weather Reports."

Dalej 145 stacyj rzędu III i IV, obserwujących albo raz dziennie (o 8^h) albo dwa razy dziennie (10^h, 16^h) wszystkie elementy (z wyjątkiem ciśnienia dla stacyj rzędu IV).

Stacye powyższe utrzymywane były kosztem zarządu centralnego; prócz nich było 49 stacyj prywatnych; razem więc 242 stacye.

Powyższe wykazy nie obejmują wcale sieci deszczowej, która w r. 1904 liczyła 2523 punkty obserwacyjne, rozłożone w sposób następujący w poszczególnych prowincyach: Assam (117), Beludżystan (54), Bengal (380), Bombay i Sind (334), Burma (175), Indye centralne (65), prowincye środkowe (135), Hyderabad (22), Kaszmir (36), Madras wraz z Pudukrta, Coorg, Travancore i Coehin (462), Mysore (77), południowo-zachodnie prowincye graniczne (31), Punjab (189), Rajputana (157), prowincye zjednoczone Agra i Oudh (289).

Digitized by Google

Obszerne wykazy danych deszczowych zamieszczane są w rocznikach „Rainfall of India".

Inspekcye stacyj prowincyonalnych (nawet punktów deszczowych) są prowadzone stale, przyczem prawie czwarta część jest wizytowana corocznie.

Ważnym działem w Meteorologii indyjskiej jest służba synoptyczna. Dotyczy ona nietyle wydawnictwa codziennych map z prawdopodobieństwami pogody, ile posyłania ostrzeżeń portowych (Storm Warning) oraz prawdopodobieństw wylewów rzek.

W związku z Meteorologią synoptyczną wydawane są „Weather Reports". Tak centralne „India Meteorological Office" w Calcutta (wraz z Alipore Central Observatory) wydaje:

a) India Daily Weather Report and Chart.

b) India Weekly Weather Report.

c) India Monthly Weather Review.

To ostatnie wydawnictwo miesięczne wychodzi stale od r. 1891 i stanowi obszerną publikacyę.

Oprócz centralnych „Calcutta i Simla Offices of the India Meteorological Department" wydawane są także „Weather Report" przez prowincyonalne Meteorological Office w Allahabad, Bombay, Calcutta i Madras.

Dodamy, że „Magnetical, meteorological and seismological observations made at the Government Observatory" w Bombay wydawane są w osobnej publikacyi od r. 1845, która obecnie liczy już kilkadziesiąt tomów. Obserwatoryum w Bombay wydaje także roczny „Report of the Director" i prócz dyrektora (N. A. F. Moos) posiada sztab z 9-u asystentów; ci ostatni rekrutowani są, jak zresztą wogóle w przeważnej liczbie obserwatoryów i prawie na wszystkich stacyach, z miejscowych wykształconych hindusów.

Osobne roczne sprawozdania wydawane są także przez „Kodaikanal and Madras Observatories", w których prowadzone są spostrzeżenia meteorologiczne, astronomiczne i seismograficzne. Dodamy, że spostrzeżenia z Madrasu są dosyć dawne i początek ich sięga r. 1822.

Na zakończenie wspomnimy, że na koszta utrzymania służby meteorologicznej w Indyach asygnuje się corocznie około 330000 rupij, czyli około 22100 funtów szterlingów. Jest to suma wyższa od przeznaczanej na wydatki sieci Meteorological Office w Londynie.

Digitized by Google

Dodamy słów kilka o liczbie punktów obserwacyjnych na sąsiedniej wyspie Ceylon. W r. 1896 liczyła 16 stacyj meteoroonalogicznych raz 76 punktów deszczowych. Wykazyz 16 stacyj podawane są osobno od r. 1881 w „Scientific Report of theSurveyor-General", wydawanem w Colombo.

Na półwyspie malajskim i w koloniach Straits Settlements również powstają w ostatnich czasach nieliczne zresztą punkty obserwacyjne. Najdawniejsze dane posiada Singapore (φ=1°17'N, λ=103°51'E), gdzie spostrzeżenia in extenso ogłaszane są stale od r. 1869. Około r. 1880 rozszerzono nieco wykazy przez dodanie nowych stacyj; w wydawanych zaś obecnie „Annual Report on Meteorological Observations Straits Settlements" umieszczane są spostrzeżenia in extenso ze stacyi w Singapore, Penang, Province Wellesley i Malacca.

Notowania dokonywane są 3 razy dziennie (9^h, 15^h, 21^h), według programu stacyj rzędu II, przez funkcyonaryuszów miejscowych szpitali; wykazy roczne „Annual Report" ogłaszane są przez J. Leaska, Acting Principal Civil Medical Officer. Wykazy te podają, prócz powyższych 4-ch stacyj rzędu II, także i sumy opadów in extenso dla 11-u punktów deszczowych w prowincyi Singapore, 5 w prowincyi Penang, 3 w Dindings, 3 w Wellesley i 21 w prowincyi Malacca.

Niewielka sieć powstaje także w Britisch North Borneo, gdzie wyciągi miesięczne z kilku stacyj drukowane są od r. 1886 w miejscowej „Government Gazette". Pojedyńcze wyciągi ogłaszane były także z Labuanu, Wei-hai-Wei i in.

Wreszcie na angielskich terytoryach Azyi funkcyonuje sieć w Hong-Kong.

Sieć meteorologiczna w Hong-Kong została zorganizowana przez Dra W. Dobercka w r. 1883. Koszta utrzymania tej sieci, wypłacane przez miejscowy Government, wynoszą rocznie Ł. 1500, a oprócz tego wszelkie depesze kablowe i inne są dostarczane darmo przez Eastern and Northern Telegraph Companies.

Sieć obecna składa się z obserwatoryum (stacyi rzędu I) w Hong-Kong, z 40 stacyj rzędu II i 25 stacyj telegraficznych oraz rzędu III. Ogółem przeto sieć liczy 66 stacyj.

Do celów synoptycznych otrzymywane są depesze z 35 stacyj sieci miejscowej oraz z innych okręgów. Stosunek sprawdzających

Digitized by Google

się prawdopodobieństw pogody ma być bardzo wysoki i dochodzi do 96%, a dla tyfonów wynosi 83%.

Dane klimatologiczne sieci w Hong-Kong wydawane są w osobnej publikacyi, która wychodzi corocznie od r. 1885 i liczy już kilkanaście tomów. W tych tomach podawane są „Observations and Researches", przyczem te ostatnie poszukiwania dotyczą głównie badań nad tyfonami.

VI. Sieć australijska.

Terytoryum tej sieci obejmuje następujące prowincye: New South Wales, Queensland, South Australia, Victoria, Western Australia oraz wyspy: Tasmania i Nowa Zelandya. Oprócz ostatniej, prowincye te od r. 1901 wchodzą w skład samorządnej Federacyi australijskiej, jako stany oddzielne; ponieważ organizacya meteorologiczna jest oddzielna dla każdego stanu, podamy poniżej kilka treściwych wiadomości dla każdego z 7-u powyżej wymienionych terytoryów.

A) New South Wales (Sydney-Observatory). Obserwacye meteorologiczne rozpoczęte zostały w Sydney w r. 1821, lecz dopiero od r. 1841 były one prowadzone stale; w tym czasie założone zostały regularne stacye meteorologiczne w różnych punktach Australii, a mianowicie: w Sydney, Hobart, Brisbane, Port Macquarie i Melbourne.

W r. 1859 utworzono w Sydney Obserwatoryum astronomiczno-meteorologiczne, które od roku 1870 pozostaje pod kierunkiem H. C. Russella, mającego tytuł „Government Astronomer". Russel zajął się prawidłowszą organizacyą sieci, która dotychczas była zaledwie w stanie początkowym; z okazyi wystawy powszechnej w Sydney w roku 1879 urządzono konferencyę przedstawicieli sieci prowincyj australijskich i postanowiono urządzić służbę synoptyczną w tej części świata, z wymianą depesz między stanami. Prognozy w Sydney rozpoczęto wydawać od r. 1887; liczba udatnych prawdopodobieństw sięga tu do 90%, co jest bardzo wiele w porównaniu z rezultatami, otrzymanemi w Europie i w Ameryce. Ten sukces objaśnia się względną prostotą i regularną zmiennością tamtejszej pogody.

Sieć w New South Wales składała się w 1879 r. z 21 stacyj rzędu I, 50 rzędu II i 81 stacyj deszczowych. Wyciągi z średniemi miesięcznemi drukowane były w broszurach rocznych „Results (lub Ab-

Digitized by Google

stracts) of meteorological observations made in New South Wales", a następnie wydawane są miesięcznie p. t. „Meteorological Observations at Sydney". Przed r. 1870 zestawienia spostrzeżeń z prowincyi New South Wales ogłaszano jako część drugą rocznika „Astronomical and Meteorological observations made at the Sydney Observatory".

Dodamy, że najpierwsze opisy i wiadomości o klimacie Nowej Walii podane były przez W. B. Clarke'a w r. 1842, przez Tebutta, Jevonsa, a także przez hrabiego Strzeleckiego. O tym ostatnim podana jest następująca uwaga w dziele Russella „Climate of New South Wales" (Sydney, 1877): „Count Strzelecki also made valuable contributions to our knowledge on this subject" (t. j. co do klimatu Australii).

Stosunki opadowe i zestawienia sum miesięcznych i rocznych ze stacyj deszczowych podawane są także w rocznikach „Renelto of Rain and River Observations made in New South Wales and Part of Queensland".

W ostatnich latach sieć Nowej Walii Południowej liczy około 200 stacyj, które dwa razy dziennie nadsyłają telegraficznie swe spostrzeżenia.

B) Queensland (Weather Bureau, Brisbane). Właściwy początek organizacyi służby meteorologicznej datuje się dopiero od r. 1887, w którym urządzone zostało Weather Bureau w Brisbane, przy głównym urzędzie poczty i telegrafu. Kierownikiem biura z tytułem „Government Meteorologist" został mianowany C. L. Wragge.

Sieć w Queensland funkcyonuje w skromnym zakresie i ma raczej statystyczny, niż naukowy, meteorologiczny charakter. W ostatnim czasie liczyła ona: 23 stacye rzędu I, 47 rzędu II, 93 „Climatological stations" i 464 punktów deszczowych. Zauważymy, że podział ten na rzędy nie zdaje się odpowiadać klasyfikacyi międzynarodowej, a rząd podany należy przesunąć o jeden. Co do „Climatological stations" odpowiadają one podobnej nazwie, używanej w sieci londyjskiej.

Nadesłane spostrzeżenia nie są publikowane in extenso; krótkie wykazy z wynikami miesięcznemi ukazują się tylko jako „Suplement to the Queensland Government Gazette". Nadto w Registrar General of Queensland podawany jest corocznie „Report of the Meteorological Observer".

Digitized by Google

Z pomiędzy stacyj tamtejszej sieci na szczególną uwagę zasługuje punkt obserwacyjny na górze Kościuszki (Mount Kosciusko), wyniesionej na 7328 stóp angielskich.

W Weather Bureau w Brisbane prowadzone są także prognozy od r. 1887 dla całego terytoryum australijskiego. procent udatnych prognoz ma tu sięgać do 93.

Wspomnimy także, że do biura w Brisbane nadsyłane są wykazy nie tylko z terytoryum Queenslandu, lecz także z British New Guinea, Nowej Kaledonii oraz z South Pacific Islands.

C) South Australia (Observatory-Adelaide). Pierwsze zaczątki spostrzeżeń meteorologicznych w Australii południowej sięgają roku 1839, w którym Sir G. Kingston rozpoczął w Adelajdzie seryę pomiarów opadu, prowadzoną do r. 1878. Działalność zaś na szerszą skalę została zainicyowana w r. 1855; w tym czasie rozpoczęto stałe spostrzeżenia w obserwatoryum w Adelajdzie pod kierunkiem Sir Carles Todda, jako „Government Astronomer".

Obserwatoryum astronomiczno-meteorologiczne w Adelajdzie jest jedyną stacyą rzędu I-go w stanie South Australia, do którego należy także słabo zaludnione Northern Territory. Oprócz tego w skład sieci południowo-australijskiej wchodzą 22 stacye rzędu II.

Na stacyach w Port Darwin, Alice Springs, Cape Borda i Cape Northumberland prowadzone są stale co trzy godziny w ciągu dnia i nocy obserwacye barometru, temperatury, wiatru i stanu pogody. Dalej, w Daly Waters, Eucla, Fowlers Bay, Streaky Bay i Port Lincoln obserwacye prowadzone są o 9^h_a, 12^h_a, 3^h_p, 6^h_p i 9^h_p dla wszystkich elementów (z wyjątkiem Towlers Bay, gdzie obserwują tylko ciśnienie). Wreszcie na pozostałych stacyach rzędu II prowadzone są tylko trzykrotne notowania: o 9 rano, 3 pop. i 9 wiecz.

Ogromny rozwój wykazuje sieć deszczowa głównie dzięki temu, że Government Astronomer, będąc jednocześnie Superintendent of Telegraphs, polecił mierzyć opady na wszystkich stacyach telegraficznych. Liczba punktów deszczowych wynosiła 46 w 1870 r., 250 w 1883 r., a obecnie sięga około 500.

Początek publikacyj klimatologicznych sięga 1858 r., od którego w osobnych broszurach rocznych ogłaszano in extenso dane z Adelajdy, a także średnie miesięczne z innych stacyj sieci. Od r. 1876 rozmiar publikacyj został znacznie powiększony; roczniki p. t. „Meteorological

Digitized by Google

observations made at the Adelaide Observatory and other places in South Australia and the Northern Territory" zawierają dane in extenso z kilku ważniejszych stacyj sieci, zestawienia z pozostałych oraz dane opadowe. Do tablic dołączany jest stosowny tekst. Dodamy, że wykazy deszczowe wydawane były także w osobnych rocznikach p. t. „Rainfall in South Australia and the Northern Territory".

Prócz zestawień klimatologicznych, prowadzony jest także w obserwatoryum w Adelajdzie dział prognoz, wydawanych codziennie od r. 1888 o godz. 1 pop.

D) Western Australia (Observatory-Perth). W r. 1876 utworzono przy urzędzie głównym Surveyor General osobny Department for Meteorology pod kierunkiem Sir Malcolm Frasera. Rok ten uważać można za początek organizacyi sieci na terytoryum Australii Zachodniej; w 1880 sieć ta liczyła, prócz stacyj rzędu I w Perth, 6 stacyj prowincyonalnych; w r. 1896 liczba stacyj rzędu II wzrosła do 18, a powstała także sieć deszczowa, licząca 135 punktów obserwacyjnych.

Co się tyczy publikacyi spostrzeżeń, to krótkie wyciągi z średniemi miesięcznemi podawano początkowo w rocznikach „Meteorological Report". Wydawnictwo to stopniowo rozszerzano w ostatnich latach, a gdy w Perth założono obserwatoryum astronomiczno-meteorologiczne, nosi ono tytuł „Meteorological Observations made at the Perth Observatory and other places in Western Australia".

Rocznik za r. 1903 (wydawany w Perth w r. 1904 pod kierunkiem W. G. Cooke, Government Astronomer) podaje na pierwszem miejscu wiadomości o narzędziach. Każda stacya rzędu II posiada:

Barometr rtęciowy (of Adies station pattern).

Termometry (suchy i zwilgocony).

Termometry max. i min.

Pluwiometr (systemu Symonsa o 8 inch.).

Chorągiewkę do kierunku wiatrów.

Budkę termometryczną Stevensona.

Spostrzeżenia prowadzone są dwa razy dziennie: o 9^h_a i 3^h_p. W odczytaniach są uwzględniane poprawki, a stacye są, o ile możności, wizytowane przez specyalnego inspektora. Ciekawa jest uwaga następująca co do poprawiania wskazań termometrów max. i min. („A far idea

Digitized by Google

of the condition of the self-registering thermometers is abstained from the practise of reading the maximum when set at 9^h_a, an the minimum when set at 3^h_p, and comparing these with the readings of they dry bulb at the same hour").

Co się tyczy t. zw. „Climatological stations", to posiadają one tylko max. i min. w budce Stevensona i pluwiometr. Notowanie odbywa się raz dziennie, rano.

W r. 1903 sieć zachodnio-australijska liczyła 36 stacyj rzędu II, 11 stacyj rzędu III (climatological") i 286 punktów deszczowych; te ostatnie są włączone jako czynność obowiązkowa dla każdego „local telegraph master". Roczniki sieci zawierają krótkie przeglądy pogody, obserwacye in extenso dla Obserwatoryum w Perth, zestawienia miesięczne dla innych stacyj, wykazy codzienne ciśnienia i wiatru dla dwóch punktów: Cape Leeuwin i Breaksea, a w końcu statystykę miesięczną opadów.

Obserwatoryum w Perth wydaje codziennie „Weather Map" i „Weather Forecast"; prognozy udatne mają wynosić około 93% ogólnej liczby.

W końcu zaznaczymy, że w r. 1901 przez W. E. Cooke'a wydane zostało w Perth nader pożyteczne zestawienie ze spostrzeżeń sieci p. t. „The Climate of Western Australia from Meteorological observations made during the years 1876—1899". Dzieło to, obejmujące 128 stron in 4°, zawiera wiele tabel, map i diagramatów.

E) Victoria (Observatory-Melbourne). Do r. 1855 niema wykazów meteorologicznych z Victorii; w tym ostatnim roku rozpoczęto systematyczne notowania w Melbourne i w kilku innych punktach. Obserwatoryum astronomiczne w Melbourne zostało w r. 1863 połączone z Obserwatoryum prof. Neymayera, który prowadził tam spostrzeżenia magnetyczno-meteorologiczne w okresie 1859—1863.

Pierwsze rezultaty z Melbourne zostały ogłoszone w r. 1859 p. t. „Results of the Magnetical, Nautical and Meteorological observations, Melbourne", a następnie w r. 1863 w dziele, zatytułowanem: „Meteorological and Nautical Observations, 1859 to 1862, Melbourne." Od tego okresu jest przerwa w ogłaszaniu wykazów aż do czasu, gdy w r. 1872 rozpoczęto stałe wydawnictwo peryodyczne p. t. „Record of results of observations in Meteorology and Terrestrial Magnetism made at the Melbourne observatory, and other localities in Victoria".

Digitized by Google

Obserwatoryum w Melbourne pozostawało do r. 1895 pod kierunkiem R. Ellery, którego następcą jest Pietro Baracchi, dotychczasowy „Government Astronomer".

Sieć meteorologiczna liczyła w r. 1879 ogółem 89 stacyj, z których 65 należało do deszczowych. Ostatnio liczba stacyj wynosi: 20 „barometric stations", 40 „temperature stations" i 513 punktów opadowych. Spostrzeżenia z Melbourne drukowane są in extenso, pozostałe podawane są w wykazach miesięcznych.

Prócz działu klimatologii („Statistical Monthly Service"), funkcyonują przy obserwatoryum także dwa inne działy, a mianowicie „the Inter-Colonial Daily Weather Service" i „the Local Daily Weather Service". Prognozy wydawane są codziennie; z uwagi na różne typy pogody w różnych częściach Australii, prawdopodobieństwo jest wyznaczane oddzielnie dla każdego z 4 dystryktów, na które podzielone jest terytoryum. Procent udatnych prognoz ma sięgać 85.

F) Tasmania (Observatory-Hobart). Spostrzeżenia meteorologiczne na wyspie Tasmania były zapoczątkowane w r. 1840 i były prowadzone w okresie 1841—1880 przez Francis Abbotta w stolicy wyspy w Hobart; wyciągi z tych obserwacyj, w postaci „Monthly meteorological reports" były ogłaszane w rocznych sprawozdaniach „Royal Society of Tasmania". Notowania [1]) te dotyczą ciśnienia, temperatury, wilgotności, zachmurzenia, opadów, a także i ozonu.

Obserwacye Abbotta były przerwane w r. 1880, a w r. 1881 spostrzeżenia były prowadzone tylko w New Norfolk przez W. E. Schoodbridge'a. W r. 1883 przystąpiono do urządzenia „Government Observatory" w Hobart, które do r. 1892 było pod kierownictwem Capt. Shortta, a następnie oddane zostało H. C. Kingsmillowi, obecnemu „Meteorologist".

Krótkie wykazy miesięczne ze stacyj sieci tasmańskiej, która obecnie liczy 8 pełnych stacyj, 2 stacye „climatological" i 65 stacyj deszczowych są zamieszczane wyciągi w miesięcznie wydawanych

---

[1]) W bibliotece Meteorological Office w Londynie zebrany jest całokształt obserwacyj Abbotta; kartki ze spostrzeżeniami Abbotta (z Royal Society of Tasmania) są wycięte i zgrupowane razem w jednem dziele.

Digitized by Google

„Monthly record of results of meteorological observations at Hobart and various localities in Tasmania".

Dział prognoz nie jest prowadzony, a mapy synoptyczne są otrzymywane z Brisbanu.

G) New Zealand (Meteorological Department-Wellington). Początek spostrzeżeń na wyspach Nowej Zelandyi sięga r. 1853, lecz dopiero od r. 1859 została wprowadzona właściwa organizacya meteorologiczna i założone były stacye w Mongonui, Auckland, Napier, New Plymouth, Wellington, Nelsyn, Christchurch, Dunedin i Southland.

Wyciągi z tych danych (dla kilku stacyj in extenso) są drukowane osobno jako „Meteorological Report" w ogólnem „Registrar Generals reports." Sieć obecna liczy, prócz 9 stacyj rzędu II, także około 80 punktów deszczowych.

Kierownikiem sieci jest James Hecror, będący jednocześnie dyrektorem „Colonial Museum i Geological Survey of New Zealand", z siedzibą w Wellingtonie.

Z innych wysp, w których istnieją usiłowania utworzenia grup stacyj meteorologicznych, należy wymienić Nową Gwineę oraz wyspy Fidji i New Hebrides. W rocznikach „British New Gwinea Government Gazette", a także w „Annual Report" podawane są wykazy z kilku (w r. 1904 z 5) stacyj meteorologicznych.

Na zakończenie powyższych krótkich wiadomości o organizacyi służby meteorologicznej w róznych częściach terytoryum australijskiego wraz z wyspami, zaznaczymy, że dążenie do zjednoczenia i ujednostajnienia działalności sieci w różnych Stanach Federacyi wyraziło się także w utworzeniu „The Meteorological Society of Australasia", zapoczątkowanego około r. 1885. Mimo jednak różnych ulepszeń i stałego rozwoju, stan Meteorologii w różnych prowincyach Australii jest niejednakowo posunięty, jak to można już było wnioskować z podanych tu szkicowo wiadomości.

Dodamy także, że jako rezultat dotychczasowych badań klimatów australijskich pojawiło się w r. 1896 ciekawe opracowanie R. Abercromby'ego p. t. „Three essays on Australian Weather" (Sydney).

Digitized by Google

VII. Sieć w koloniach afrykańskich.

Terytoryum to można dla dogodności podzielić na Afrykę Zachodnią, Centralną, Wschodnią i Południową, nie licząc wysp (Mauritius, Św. Helena, Ascension etc.), zależnych od Wielkiej Brytanii.

Stan i organizacya Meteorologii w angielskich koloniach afrykańskich jest wogóle słabo rozwinięta, a usiłowania utworzenia punktów obserwacyjnych na tych rozległych i mało zbadanych przestrzeniach napotykają na liczne przeszkody. Jednak stały postęp i rozwój w tym kierunku niewątpliwie istnieje i uwydatnia się zakładaniem obserwatoryów, sieci deszczowych i organizacyą lokalnych służb meteorologicznych pod kierunkiem osobnych „Government Meteorologist", lub Astronomer".

Dla użytku obserwatorów afrykańskich wydana została w r. 1902 w Londynie specyalna instrukcya p. t. „Hints to Meteorological Observers in Tropical Africa, with instructions for taking observations and notes on methods of recording lake levels".

Na „normal stations" zalecono prowadzenie trzykrotnych ($7^h_a, 2^h_p, 9^h_p$) notowań wszystkich elementów według czasu miejscowego; „auxiliary stations" notują raz dziennie (9^h_a) opad, a także i max. oraz min. temperatury. Do umieszczania przyrządów opisana jest obszerna budka specyalnej konstrukcyi, z daszkiem, kominkiem i wentylatorem; klatka z narzędziami przywiesza się w środku budki na wysokości 6 stóp nad powierzchnią gruntu.

Deszczomierze są systemu Symonsa o średnicy 8 stóp ang.; wyniesienie zaledwie jest na 1 stopę i 3 inch.

Zwracana jest szczególna uwaga na konieczność posiadania narzędzi sprawdzonych i regularnego prowadzenia spostrzeżeń; „irregular observations are of litthe proctical valne; observations with untrustworthy instruments are of no value whatever" — wprost powiedziano w instrukcyi.

Poniżej podajemy treściwe wiadomości o organizacyi sieci meteorologicznej w Afryce Południowej i na wyspie Mauritius; w pozostałych krajach i wyspach stacye meteorologiczne istnieją albo pojedyńczo, albo też sieć znajduje się dopiero w fazie organizacyjnej.

O miejscach publikacyi spostrzeżeń pojedyńczych stacyj mówiliśmy już poprzednio.

Digitized by Google

a) Sieć południowo-afrykańska. Terytoryum południowo-afrykańskie składa się z Cape Colony, Orange River Colony, Basutoland, Natal, Transvaal, Bechuanaland i Rhodesia; geograficznie całość tą zaokrąglają kolonie: niemiecka Afryka Zachodnia i portugalska Afryka Wschodnia.

Z wymienionych krain tylko Cape Colony, a poczęści Transval Natal posiadają nieco prawidłowszą organizacyę meteorologiczną.

Jakkolwiek spostrzeżenia meteorologiczne na Przylądku Dobrej Nadziei sięgają roku 1820, to jednak dane, gromadzone w kilku miejscach tego terytoryum, są wogóle wątpliwej wartości; jedynie tylko w okresie 1831—1837 pewną systematyczność wykazują dane w „Reports of the South African Institution", powstałej w tym czasie. W roku 1860 założona została Meteorological Commission w Cap Town, głównem mieście kolonii. Pewne wykazy i dane obserwacyjne z kilku punktów terytoryum podawane były od r. 1861 w kolejnych „Committee's Report"; prawidłowsza atoli organizacya sieci datuje się od r. 1875, kiedy pod kierunkiem C. Abercromby-Smitha rozpoczęto stałe roczne wydawnictwo obszerniejszych „Results deduced from Meteorological Observations made at certain stations in the Colony of the Cape of Good Hope" lub, pod bardziej tresciwym tytułem „Report of the Meteorological Commission".

Sieć tej Komisyi szybko wzrastała i w r. 1904 liczyła: stacyę I rzędu w Kenilworth (blisko Kimberley) i dodatkową przy Royal observatory (φ=33°56'S, λ=18°29'E, h=40f), 58 stacyj rzędu II, 27 rzędu III i 418 punktów deszczowych, 8 stacyj posiadało ewaporometr, a 3 heliograf. Notowania dokonywane są raz dziennie (o 9^h_a) z wyjątkiem stacyj rzędu I (w Royal Obserwatory notowano o 8^h_a w południe i o 8^h_p).

Powyższe stacye należą do terytoryum Cape Colony i Bechuanaland; prócz nich Komisya meteorologiczna w Cape Town otrzymywała wykazy deszczowe:

z 8 stacyj w Orange River Colony;
z 5 „ w Basutoland;
z 33 „ w Rhodesia;
z 1 „ w Damaraland.

Digitized by Google

Nadto otrzymywano wykazy z Durbanu (Natal) i zestawienia z 53 punktów deszczowych w niemieckiej kolonii Afryki Zachodniej; te ostatnie były dostarczane z Windhoek przez gubernatora kolonii.

W rocznikach „Report of the Meteorological Commission" podawane są spółrzędne oraz sumy miesięczne opadów (wraz z liczbą dni i max.) dla wszystkich punktów deszczowych z danego roku. Pozatem spostrzeżenia z Kenilworth (Kimberley) drukowane są in extenso; średnie miesięczne dla wartości godzinnych, według danych z przyrządów samopiszących, są również podawane w wyciągu.

Wreszcie dla wszystkich pozostałych stacyj rzędu II i III podawane są zestawienia roczne z średniemi miesięcznemi. Zestawienia te obejmują ciśnienie (średnie z 8^h_a), temperaturę według termometru wilgotnego (8^h_a), średnie max. i min.) i najwyższe max. i min. wraz z interwalem. Pozatem podawane są średnie miesięczne wilgotności względnej, sumy opadów z liczbą dni i średnie zachmurzenia (o 8^h_a, według skali 0.10).

Nadmienimy, że obserwatorowie stacyj w Afryce południowej rekrutują się z urzędników (wydziału rolniczo-leśnego, a także więziennego) oraz z nauczycieli i funkcyonaryuszów szpitalnych.

Komisya meteorologiczna nie wydaje specyalnych prognoz, otrzymuje jednak ranne depesze z kilku stacyj i dane te komunikuje w postaci „Daily Weather Telegram" urzędowi pocztowemu, departamentowi dla rolnictwa oraz także czasopismom miejscowym.

W kolonii Natal istnieje od r. 1882 obserwatoryum astronomiczne w Durbanie, które prowadzi również spostrzeżenia meteorologiczne, ogłaszane w rocznych „Report of the Government Astronomer" (Pietermaritzburg). W ostatnim czasie udało się utworzyć w różnych punktach kolonii około 20 stacyj deszczowych.

Pozatem od lat kilku utworzony został osobny Transvaal Meteorological Department w Johannesburgu, w którym założono także obserwatoryum pod kierunkiem R. T. Innesa.

Zestawienia miesięczne, wydawane w ogólnych „Administr. Reports" podają dane dla kilku stacyj termometrycznych i dla kilkudziesięciu punktów deszczowych.

Wreszcie i w Rhodesii (Southern) rozpoczęto ostatnio wydawanie „Report on meteorology" (Salisbury).

Digitized by Google

b) Sieć na wyspie Mauritius. Najlepiej zorganizowaną i najdawniejszą sieć z kolonij afrykańskich posiada wyspa Mauritius. Pierwsza wzmianka o tamtejszym klimacie sięga aż r. 1695, a systematyczne spostrzeżenia meteorologiczno-magnetyczne były robione przez Lislet Geoffreya w okresie 1696—1702 (zestawienie tych ostatnich podane jest w Freycineta „Voyage autour du monde" wydanem w Paryżu w r. 1827).

Obserwatoryum w Port Louis było założone ze środków rządowych w r. 1830, a od r. 1832 rozpoczęto prawidłowe spostrzeżenia, prowadzone odtąd stale z wyjątkiem pewnej przerwy około r. 1850 ze względów politycznych. W r. 1851 było utworzone „Mauritius Meteorological Society", którego pierwszym prezydentem był C. J. Bayley, a sekretarzami Dr. Meldrum i Bousquet. Towarzystwo to wydaje co pewien czas osobne „Proceedings" i „Transactions".

Z uwagi na niegodne położenie obserwatoryum w Port Louis, postanowiono przenieść to ostatnie do odległego od 11 km. Pamplemousses, gdzie wybudowano specyalny gmach i zaopatrzono we wszelkie potrzebne narzędzia. Działalność obserwacyjna została tu rozpoczęta na szerszą skalę od r. 1875; obserwatoryum otrzymało nazwę „Royal Alfred Observatory". Pierwszym dyrektorem był Dr. Meldrum, a jego następcą od roku 1896 T. F. Claxton.

Sieć obecna na wyspie Mauritius składa się z 70 stacyj deszczowych, z których 8 notuje także i temperaturę. Stacye rzędu II, obserwujące 2 razy dziennie są następujące: Port Mathurin (Rodrigues) od r. 1876, Mahé (Seycheles) od r. 1881, Six Islands (Chagos.Archipelag) od r. 1897 i St Brandon (Cargados Archipelag) od r. 1898.

Wszystkie te spostrzeżenia są opracowywane w Obserwatoryum centralnem w Pamplemousses i ogłaszane (in extenso dla obserwatoryum i w wyciągach dla innych stacyj) w specyalnym roczniku „Results of magnetical and meteorological observations at Mauritius". Pozatem wydawany jest także „Annual Report of the Director of the Royal Alfred Observatory".

Jakkolwiek wydawanie prognoz wskutek braku połączeń telegraficznych nie jest możebne, obserwatoryum wysyła ostrzeżenia portowe; nadto z materyałów gromadzonych w obserwatoryum wydane zostały przez Dr. Meldruma (w publikacyach „Mauritius Meteorological So-

Digitized by Google

ciety") kilka prac dotyczących biegu cyklonów, oscylacyj barometrycznych i opadów.

Na koszta utrzymania obserwatoryum rząd kolonialny wydaje rocznie około 20000 rupij (1300 funtów szterlingów).

VIII Sieć kanadyjska i wysp zachodnio-indyjskich.

Z posiadłości brytańskich w obu Amerykach i na wyspach przyległych najważniejszą sieć meteorologiczną posiada Kanada.

Początek obserwacyj sięga 1841 r., a od tego czasu prowadzone były systematyczne spostrzeżenia w obserwatoryum magnetycznem w Toronto. Do r. 1869 nie było jednak właściwej sieci meteorologicznej, a spostrzeżenia na kilku stacyach prywatnych były bez jednostajnego planu i na niesprawdzanych narzędziach. Aby wprowadzić potrzebną systematyzacyę danych, prof. Kingston, ówczesny dyrektor obserwatoryum w Toronto, zwrócił się z odpowiednim cyrkularzem do obserwatorów i, dzięki osobistej interwencyi, wprowadził pewną organizacyę i założył nową liczbę stacyj. Do r. 1871 sieć ta funkcyonowała bez żadnego poparcia ze strony organów krajowych; dopiero w r. 1871 uchwalono stałe roczne subsydya z przeznaczeniem głównie na organizacyę ostrzeżeń portowych. W październiku 1876 r. rozpoczęto także wydawania prognoz; te „daily forecasts" wydawane są codziennie o 10^h_a dla okresu następnych 24 godzin.

Procent prognoz udatnych wynosił w 1897 r. 84,9% dla ostrzeżeń portowych i 81,4% dla prawdopodobieństw na następne 36 godzin.

Od czasu nowej organizacyi według wzoru Stanów Zjednoczonych Ameryki Północnej z r. 1871 sieć kanadyjska szybko wzrastała i obecnie liczy z górą 400 stacyj. Stacye te dzielą się na:

a) Chief stations", w których notowania elementów meteorologicznych prowadzone są dzień i noc w równych odstępach, nie większych od 4 godzin. Są to więc stacye rzędu I według klasyfikacyi międzynarodowej; były one w liczbie 3 w r. 1902, a mianowicie: Woodstock (Ontario), Toronto (Ontario) i Halifax (N. W. Territories).

b) „Telegraph reporting stations", które prowadzą w pełnym zakresie trzy dzienne obserwacye, a mianowicie o 8^h_a, 3^h_p i 8^h_p, ściśle jednocześnie według czasu, odpowiadającego 75-mu południkowi.

Digitized by Google

Liczba ich przenosiła 30 w r. 1902; stacye te przesyłają dwa razy dziennie depesze do Toronto dla celów synoptycznych.

c) „Ordinary stations of the first class", prowadzące trzy razy dziennie obserwacye według czasu miejscowego. Odpowiadają one więc stacyom rzędu II według klasyfikacyi międzynarodowej; liczba ich przenosi 30.

d) „Ordinary stations of the second class" notują trzy razy dziennie i według czasu miejscowego, temperaturę (wraz z max. i min.), wiatr i zachmurzenie, a także i opad. Są to więc stacye rzędu III; liczba ich w sieci kanadyjskiej wynosiła około 150 w r. 1902.

e) „Ordinary stations of the third class" odpowiadają stacyom deszczowym; liczba ich przenosi 200.

Dodamy, że obserwatorowie na „chief" i „telegraph stations" otrzymują pewną renumeracyę, w pozostałych zaś służba jest zupełnie bezpłatna i rekrutowana dowolnie.

Co się tyczy narzędzi, używanych w sieci kanadyjskiej, to zauważymy, że barometry (rtęciowe) należą do typu „Standard Barometer" (Negretti & Zambra, albo H I. Green, New York); termometry są identycznie takie jak na stacyach angielskich, a mianowicie konstrukcyi Negretti & Zambra z Londynu; przed wysłaniem do Kanady były one obowiązkowo badane w Kew-Observatory. Pluwiometry należą do systemu Symonsa o średnicy 10 inch, a anemometry są przeważnie systemu Greena z New Yorku. Budka termometryczna jest specyalnej konstrukcyi i umieszczana bywa na osobnej podstawie; opis jej z wymiarami i rysunkiem podany jest na str. 3 i 4 „Report of the Meteorological Service of Canada" (Ottawa 1897).

Te ostatnie „Reports" wychodzą corocznie i stanowią zasadniczą publikacyę klimatyczną sieci kanadyjskiej. Każdy tom podaje krótki ustęp ze spisem stacyj i zawiera pozatem 4 do 6 oddzielnych części. Tak w roczniku za rok 1902 znajdujemy:

1) Średnie miesięczne ciśnienia, temperatury i zachmurzenia dla 3-ch „chief stations", oddzielnie dla każdego z 6 notowań codziennych.

2) Zestawienia roczne dla stacyj telegraficznych oraz rzędu II. Ciśnienia podawane są w średnich miesięcznych wraz z extremami; rubryka temperatur podaje trzy dzienne notowania max., min., średnią z max. i min. oraz extremy; po 4 rubryki dla obu wilgotności i zachmurzenia, kierunki wiatru, opad z liczbą dni i t. d. Układ odpo-

Digitized by Google

wiada schematowi międzynarodowemu; godziny obserwacyjne są różne z pewną przewagą kombinacyj 8^h_a, 2^h_p, 8^h_p;

3) zestawienia miesięczne i roczne dla stacyj rzędu III podane są w sposób podobny jak poprzednio, z pominięciem elementów nieobserwowanych;

4) zestawienia in extenso wartości godzinnych ciśnienia i temperatury, według wskazań przyrządów samopiszących, dla stacyj: Victoria, Regina, Winnipeg, Toronto, Montreal i Citadel;

5) średnie miesięczne temperatury, a także zestawienia opadowe dla wszystkich stacyj sieci;

6) obserwacye magnetyczne.

W końcu dodamy, że obecnym dyrektorem „Meteorological Service of Canada" jest R. F Stupart; roczny koszt na prowadzenie służby meteorologicznej przenosi 60000 dolarów.

Spostrzeżenia meteorologiczne w różnym zakresie prowadzone są także na licznych wyspach zachodnio-indyjskich; z uwagi jednak na ich drobne stosunkowo terytorya i na ograniczone środki materyalne, organizacye te ograniczają się przeważnie do pojedyńczych stacyj lub grup punktów deszczowych, prowadzonych przez dobrowolnych obserwatorów. Zestawienia tych spostrzeżeń są wogóle ogłaszane w lokalnych „Government Gazette" lub dołączane do ogólnych „Annual Report" głównego urzędu administracyjnego.

Na specyalne zaznaczenie zasługuje jednak wyspa Barbados, gdzie od lat kilkudziesięciu badane są zwłaszcza stosunki opadowe; dalej wyspa Trinidad, Grenada i głównie Jamaica.

Także i w British Honduras (Ameryka środkowa) oraz w British Guiana są prowadzone i ogłaszane spostrzeżenia z pojedyńczych stacyj.

Co się tyczy wyspy Jamaica, to zorganizowany tam został specyalny „Weather Service" w r. 1880 przez Maxwella Halla, jako Government Meteorologist. Pierwszym celem tej organizacyi było zbadanie stosunków deszczowych na wyspie oraz wydawanie ostrzeżeń co do zbliżających się huraganów.

Sieć w Jamaice składa się z stacyi rzędu I-go w Kingston (wzniesienie 50 ft.); stacye rzędu II znajdują się w Hill Gardens (4907 ft.); w Castleton Gardens (496 ft.) i w Negril Point Lighthouse (33 ft.).

Digitized by Google

Nadto istnieją stacye rzędu III w Hope Gardens (600 ft.), w Stony Hill Reformatory (1400 ft.), w Morant Point Lighthouse (8 ft.) i w Montego Bay (160 fr.).

Na najwyższym punkcie górskim w Jamaice, w Blue Mountain Peak (wzniesienie 7423 ft.) umieszczono budkę z termometrami max. i min. i minimum oraz zbiornik pluwiometryczny specyalnej konstrukcyi. Przyrządy te są odczytywane w końcu każdego miesiąca.

Zestawienia ze spostrzeżeń sieci są ogłaszane w wydawanych na koszt zarządu wyspy „Monthly Weather Reports". Dodamy, że Maxwell Hall wydał kilka źródłowych opracowań o charakterze przebiegu różnych elementów meteorologicznych na wyspie; ułożył on także mapę opadów na wyspie, której jeden egzemplarz w dużej skali figuruje w Imperial Institute (w dziale WestIndies) w South Kensington w Londynie.

Na tem kończymy te krótkie szkicowe wiadomości o organizacyi różnych sieci meteorologicznych, które udało nam się zebrać w czasie kilkotygodniowych poszukiwań w zbiorach i bibliotece „Meteorological Office" w Londynie. Spostrzeżenia kolonialne angielskie, w zwykłych warunkach pracy trudno dostępne dla meteorologów, były też dotychczas zbyt mało zużytkowywane dla celów Klimatologii; zgromadzenie i krytyczne opracowanie tych materyałów byłoby niewątpliwie epokowym etapem w zakresie zbadania klimatów kuli ziemskiej.

Londyn, w sierpniu 1906.

Digitized by Google

Digitized by Google

Stacya Centralna Meteorologiczna

PRZY MUZEUM PRZEMYSŁU I ROLNICTWA

w Warszawie, rok 1906.

Wzorem lat ubiegłych [1] w niniejszem piątem sprawozdaniu podane są wiadomości o stanie Sieci Meteorologicznej warszawskiej, oraz o działalności Stacyi Centralnej przy Muzeum w Warszawie w r. 1906. Działalność ta przedstawia ciąg dalszy prac, podjętych w okresach poprzedzających i zobrazowana została w związku z temi ostatniemi.

a) Skład osobisty, posiedzenia, udział Towarzystw przemysłowych i fabryk cukru.

W porównaniu z r. 1905, w składzie Komisyi oraz Zarządu, kierownictwa i personelu Stacyi Centralnej są do zanotowania następujące zmiany: 1-o, na miejsce członka Komisyi M. Wortmana zaproszony został M. Łebkowski; 2-o, członek Komisyi St. Bouffałł, od czerwca 1905 r. brał zastępczo udział w kierownictwie Stacyi do lipca roku sprawozdawczego.

W ten sposób w r. 1906 skład osobisty Komisyi i Zarządu oraz kierownictwa i personelu Stacyi Centralnej przedstawiał się jak następuje:

1) Członkowie „Stałej Komisyi Meteorologicznej przy Sekcyi VI Cukrowniczej": pp. St. Bouffałł, W. Brygiewicz, S. Dick-

---

[1]) Por. „Stacya Centralna Meteorologiczna" w Warszawie, rok 1905. Odbitka z „Wiadomości Matematycznych" t. X, 1906.

Digitized by Google

stein (przewodniczący Komisyi), Wł. Gorczyński, W. Karpiński, J. Leski, M. Łebkowski, A. Machczyński, R. W. Mejer, R. Merecki, T. Rutkowski i S. Wroński.

2) Zarząd Sieci Meteorologicznej warszawskiej i Stacyi Centralnej stanowili trzej członkowie Komisyi, a mianowicie: pp. S. Dickstein, R. Merecki i Wł. Gorczyński, pod przewodnictwem p. S. Dicksteina.

3) Kierownicy Stacyi Centralnej: pp. R. Merecki, Wł. Gorczyński i do lipca S. Bouffałł. Sekretarka i obserwatorka p. J. Śmigielska. Obserwator Stacyi Centralnej p. W. Perkowski.

4) Buchalteryą i rachunkowością zajmował się podobnie jak w latach poprzednich, p. R. W. Mejer (w biurze fabryki cukru Młodzieszyn, Krakowskie-Przedmieście 7). W temże biurze znajdowała się kasa Stacyi Centralnej.

Komisya Stała odbyła w r. 1906 dwa posiedzenia: w dniu 4 lutego i 23 grudnia w lokalu Tow. pop. przem. i handlu. Na posiedzeniu z dnia 4 lutego przedstawiono sprawozdanie z działalności Stacyi, wybrano podkomisyę rewizyjną i załatwiono sprawy budżetowe; zastanawiano się także nad kwestyą majątku Stacyi Centralnej i jej stosunkiem prawnym do Muzeum.

Z powodu ustąpienia p. Wortmana z przyczyny nadwątlonego zdrowia z liczby członków Komisyi, jednomyślnie uchwalono zaprotokółować i przesłać p. Wortmanowi podziękowanie za ważne zasługi, położone koło rozwoju Sieci Meteorologicznej warszawskiej.

Na temże posiedzeniu p. R. W. Mejer przedstawił sprawozdanie rachunkowe, które w wyciągu przeznaczone zostało do odczytania na Zebraniu ogólnem członków Sekcyi Cukrowniczej w dniu 22 czerwca 1906 roku.

Na posiedzeniu Stałej Komisyi Meteorologicznej w dniu 23 grudnia zajmowano się sprawami, związanemi z projektowaną reorganizacyą Sekcyi cukrowniczej warszawskiej oraz z utworzeniem Związku zawodowego fabryk cukru. Załatwiono także sprawy budżetowe z preliminarzem na rok następny.

Prócz posiedzeń Komisyi, odbyły się w dniu 10 czerwca oraz w dniu 22 grudnia posiedzenia Zarządu Stacyi Centralnej.

Wreszcie z uznaniem podnieść należy moralne i materyalne poparcie tych uczestniczących w Sieci warszawskiej Zarządów, Towa-

Digitized by Google

rzystw Akcyjnych lub Dyrekcyj Fabryk, które w dobrze zrozumianej potrzebie kierowania i opracowywania wszystkich spostrzeżeń, w centralnem miejscu Sieci w Warszawie zobowiązały się do składania na ten cel rocznych składek na pokrycie kosztów.

W roku 1906 do liczby tej należały:

a) Zarząd majątków i fabryk hr. Maryi Branickiej (Kożanki, Olszana, Saliwonki, Szamrajówka); dyrekcye fabryk cukru: hr. Wł. Branickiego w Sieniawie, hr. Józefa Potockiego w Szepetówce., ks. M. i R. Radziwiłłów w Rytwianach.

b) Administracya zakładu leczniczego w Nałęczowie; Rada Zarządzająca Tow. Dr. Żel. W. W. (Piotrków, Włocławek, Ząbkowice). Towarzystwo przemysłowe w Leśmierzu; Towarzystwo rolnicze płockie; Towarzystwa udziałowe: „Ciechanów", „Krasiniec", „Silniczka„ „Trawniki".

c) Zarządy Towarzystw Akcyjnych fabryk cukru: w Brześciu Kujawskim, w Czersku i Michałowie, w Józefowie, w Łubnie i Szreniawie, w Młodzieszynie fabrycznym, w Sannikach i w Uładówce.

W ostatnim czasie do listy tej przybyły: Zarząd dóbr Ord. hr. Maurycego Zamoyskiego (Klemensów, Majdan) oraz Zarząd Towarzystwa Akcyjnego Mayznerowskich fabryk cukru (Łanięta, Marya, Izabelin).

Natomiast przyznawane w latach zeszłych na prośbę Komisyi Meteorologicznej i przy poparciu Zarządu Sekcyi Cukrowniczej subsydyum od Rady Tow. pop. przem. i handlu w Warszawie w roku sprawozdawczym nie zostało udzielone; składka roczna od Towarzystwa kolei elektrycznej łódzkiej (por. sprawozdanie z r. 1905) nie wpłynęła w roku sprawozdawczym. Szczegółowy wykaz wszystkich składek przedstawiany jest Komisyi przez p. R. W. Mejera, prowadzącego księgi buhalteryjne Stacyi Centralnej.

b) Sieć stacyj meteorologicznych.

Liczba czynnych stacyj meteorologicznych w 1906 roku wynosiła 60.

Stacye Sieci warszawskiej w okresie sprawozdawczym funkcyonowały;

a) przy fabrykach cukru: Brześć Kujawski (g. warszawska; Czersk (varszawska), Józefów (warszawska), Izabelin (płocka), Kra-

Digitized by Google

siniec (płocka), Kremeńczuki (wołyńska), Łanięta (warszawska), Młodzieszyn (warszawska), Model (warszawska), Klemensów (lubelska), Lublin (lubelska), Olchowiec (kijowska), Olszana (kijowska), Ostrowy (warszawska), Plisków-Andruszówka (kijowska), Rytwiany (radomska), Saliwonki (kijowska), Silniczka (piotrkowska), Sójki (warszawska), Stawiszcze (kijowska), Szamrajówka (kijowska), Szpanów (wołyńska), Trawniki (lubelska), Uładówka (podolska). Ogółem stacyj 24.

b) przy stacyach rolniczych doświadczalnych i hodowli nasion oraz zakładach leczniczych: Baranówka (podolska), Chruszczewo-Ciechanów (płocka), Kazimierz n/W. (lubelska), Kutno II roln. (warszawska), Karabczejówka (podolska), Łęczyca (kaliska), Nałęczów (lubelska), Niemiercze (podolska), Piastów (radomska), Płock (przy Tow. rolniczem), Sobieszyn (siedlecka), Wielko-Połowecka (kijowska). Ogółem stacyj 12.

c) na stacyach kolejowych: Aleksandrów, Częstochowa, Kołuszki, Kutno I kol., Łazy, Myszków, Nowo-Radomsk, Piotrków, Skierniewice, Włocławek, Ząbkowice, Żyrardów. Ogółem stacyj 12.

d) przy instytucyach publicznych: Łódź (kol. elektr. łódzka), Warszawa I (Stacya Centralna przy Muzeum) i Warszawa II (przy stacyi Filtrów na Koszykach). Ogółem stacyj 3.

e) pod zarządem osób prywatnych: Bzury (łomżyńska), Drozdowo (łomżyńska), Klimontów (kielecka), Kośmin (warszawska), Majdan-Księżpolski (lubelska). Podzamcze (siedlecka), Pohorylce (wołyńska), Szykszniew (suwalska), Wądołki Borowe (łomżyńska). Ogółem stacyj 9.

Niejednostajne rozmieszczenie stacyj meteorologicznych na terytoryum sieci, charakteryzują poniżej zestawione dane, odnoszące się do roku 1906.

gub.	płocka	stacyj	4	gub.	kielecka	stacyj	1
„	warszawska	„	17	„	siedlecka	„	2
„	kaliska	„	1	„	lubelska	„	6
„	piotrkowska	„	9	„	wołyńska	„	3
„	łomżyńska	„	3	„	podolska	„	4
„	radomska	„	2	„	kijowska	„	7
„	suwalska	„	1				

W poniższej tabelce podajemy spis alfabetyczny stacyj każdego rzędu kolejno, z zaznaczeniem nazwisk kierowników i obserwatorów, a także wykazów miesięcznych lub buletynów, nadesłanych Stacyi Centralnej w okresie sprawozdawczym.

Digitized by Google

№	Nazwa stacyi	Nazwisko obserwatora lub kierownika.	Wykaz nadesłanych spostrzeżeń
	A. a) Stacye z narzędziami samopiszącemi.		
1	Warszawa I (Muzeum)	Personel Stacyi Centralnej	Spostrz. miesięczne I—XII
2	Lublin	St. Sadowski urz. fabr. cukru	„ „ III-VIII, X, XI
3	Łódź	Inż. Witkowski, Br. Krakowski	„ „ I—XII
4	Stawiszcze	M. Leszczyński	„ „ VII—XII
5	Szykszniew	L. Gramadzki, wł. majątku	„ „ I—IV
	A. b) Stacye rzędu II		
6	Chruszczewo-Ciechanów	Dr. Ign. Kosiński st. rol. dośw.	„ „ I—XII
7	Karabczejówka	E. Ludkiewicz, stac. rol. dośw.	„ „ I—XII
8	Klimontów	W. Kobyliński, nauczyciel	„ „ I—VIII
9	Łęczyca	W. Godowski st. rol. dośw.	„ „ II—XII
10	Nałęczów	Dr. P. Rudzki i Dr. M. Gliński	„ „ I—XII
11	Niemierce	J. Wańtuchowski, st. dośw.	„ „ I, II, IV—XII
12	Olszana	F. Wyszyński, chem. fabr. cuk.	„ „ I—XII
13	Ostrowy	W. Księżopolski, w.-dyr. f. c.	„ „ I XII

Digitized by Google

№	Nazwa stacyi	Nazwisko obserwatora lub kierownika	Wykaz nadesłanych spostrzeżeń
14	Piotrków	O. Nestorowicz, urzędnik tel.	Spostrz. miesięczne I—XII
15	Płock	B. Bajenkiewicz, Tow. roln.	„ „ I—XII
16	Saliwonki	F. Witowski, urz. fabr. cukru	„ „ I—XII
17	Silniczka	K. Milde, wicedyr. fabr. cukru	„ „ I—XII
18	Sobieszyn	St. Leśniowski, Dr. F. Grabski, st. dośw. roln.	„ „ I—XII
19	Warszawa II (Stacya filtrów)	J. Trzciński.	„ „ I—XII
20	Wądołki Borowe	Fr. Wyszyński, właśc. majątku	„ „ I—XII
21	Włocławek	S. Domański, inż. Dr. Ż. W.-W.	„ „ I—XII
22	Ząbkowice	Fr. Harland, M. Bogusławska	„ „ I—VIII, X-XII
	Stacye rzędu III		
23	Aleksandrów	M. Safronienko urz. tel.	„ „ I—XII
24	Brześć Kujawski	A. Trzaskowski urz. f. cukru	„ „ I—XII
25	Czersk	I. Preibisz, St Jarociński	„ „ I—XII
26	Częstochowa	K. Skotnicki, urzęd. telegr.	„ „ I—XII
27	Drozdowo	L. Koehler, nadleśny w dobrach	„ „ I—IX, XI, XII
28	Józefów	L. Orłowski urz. fabr. cukru	Bulet. 10-dniowe V(21-31), VI, VII (11-31), VIII—XI, XII (1-18)
29	Koluszki	J. Anczykowski, urz. Dr. Ż. W.-W.	Spostrz. mies. I—XII
30	Krasiniec	J. Bonecki, urz. akc. przy f. cuk.	„ „ I—XII

Digitized by Google

31	Kremeńczuki	J. Kopista, B. Lipiński st. dośw	Buletyny 10-dniowe I—XII.
32	Kutno kol.	B. Żakiewicz, techn. Dr. Ż. W.-W.	Spostrz. miesięczne I—XII
33	Kutno rol.	Personel stacyi rolniczej dośw.	„ „ I—IX, XI
34	Klemensów	M. Niemirowski, A. Żelisławski.	Buletyny 10-dn. I—XI, XII (1-20)
35	Łazy	Dębicki, urzęd. Dr. Ż. W.-W.	Spostrz. miesięczne I—XII
36	Majdan - Księżpolski	L. Rogowski, zarządz. dobrami	„ „ I—XII
37	Młodzieszyn	St. Niewiarowicz, M. Krajewski.	„ „ I—XII
38	Myszków	E. Wiciejewski, W. Hurkiewicz.	„ „ I—XII
39	Noworadomsk	E. Dąbkowski, urzęd. telegr.	„ „ I—XII
40	Olchowiec	Cz. Sankowski, urzęd. fabr. cuk.	Buletyny 10-dn. V (11-31) VI-XII
41	Plisków-Andruszówka	F. Dobrowolski, urzęd. dóbr	„ „ VI—XII
42	Rytwiany	Dr. St. Kugler, chem. fabr. cukru	Buletyny 10-dn. III (11-20) IV (21-30) VI (1-20) VII (11-20) VIII, IX (1-20) i spostrz mies. X-XII.
43	Skierniewice	A. Szermer, urzędnik telegrafu	Spostrz. miesięczne I—XII
44	Szamrajówka	K. Witkowski, T. Czaplicki	Spos. mies. I-IV, X-XII. Bul. 10-dn. V-IX
45	Wielko-Połowecka	J. Skrodzki, st. dośw. roln.	Spostrz. miesięczne IV—XII
46	Uładówka	L. Sempołowski, chemik fabryki cukru	Buletyny 10-dniowe I—XII
47	Żyrardów	K. Niemirycz, urz. teleg.	Spostrz. miesięczne I—XII
	C. Stacye rzędu IV (deszczowe)		
48	Bzury	H. Kozłowski, właśc. majątku.	Spostrz. miesięczne I—X

Digitized by Google

№	Nazwisko stacyi	Nazwisko obserwatora lub kierownika	Wykaz nadesłanych spostrzeżeń
49	Baranówka	J. Kotkowski, stacya roln. dośw.	Spostrzeżenia miesięczne. I—XII
50	Izabelin	J. Modzelewski, chem. fab. cuk.	„ „ I—X
51	Kazimierz n./W.	J. Matusiak, ogrodnik stacyi doświadczalnej	„ „ I—III
52	Kośmin	St. Czekanowski, wł. majątku	„ „ I-VII,IX-XII
53	Łanięta	J. Dębicki, chem. fabr cukru	„ „ I XII
54	Model	A. Lewartowski, urzędnik fabryki cukru	„ „ I—XII
55	Piastów	J. Olędzki, st. dośw. rolnicza.	„ „ IV—XII
56	Podzamcze	F. Różyński, zarządz. dobrami	„ „ I—XII
57	Pohorylce	T. Rzepecka, wieś Pohorylce	„ „ I—XII
58	Sójki	L. Hakowski, urzęd. fabr. cukru	„ „ IV—IX
59	Szpanów	St. Czachórski, chem. fabr. cuk.	Bulet. 10-dn. IV-VIII, IX(1-20)
60	Trawniki	L. Nieprzecki, urzęd. fab. cuk.	Spostrzeżenia miesięczne I—XI

Nie nadsyłały w dalszym ciągu swych spostrzeżeń stacye: w Brzozówce, Ciechanowie, Gucinie, Kożance, Łubnie, Oradówce, Płońsku, Ruszkowie, Sannikach, Sośnówce, Szepetówce i Wytycznie. Nie nadsyłały wykazów spostrzeżeń w roku sprawozdawczym stacye: w Berszadzie, Częstocicach, Jeżówce, Leśmierzu, Michałowie, Ojcowie, Sieburczynie, Sieniawie i Strzelnikach.

Digitized by Google

c) Uwagi o stacyach Sieci warszawskiej oraz ich inspekcya w roku 1906.

W ciągu roku 1906 do liczby stacyj rzędu II przybyły. stacya w Łęczycy (kaliskie), założona przez tamtejszą stacyę doświadczalną rolniczą. Stacya, pozostająca pod kierunkiem p. W. Godowskiego, zaopatrzona została w poniżej wyszczególnione narzędzia: barometr-aneroid Naudet'a № 1065 (35653 O.F.) z poprawką 0.0mm. dla skali od 735—765mm.

W budce blaszanej na wysokości 3.4m. nad powierzchnią gruntu termometry: suchy (Franzen № 448) z poprawką od —25°,0 do+5°,0 i od +15°,1 do +40°,0, 0°,0, i od +5°,1 do +15°,0, +0°,1; termometr zwilgocony (Franzen № 448*) poprawki takież same jak dla termometru suchego; termometr maximum (Franzen № 771) z poprawką od —20°,0 do —7°,3, —0°,1 i od —7°,2 do +40°,0, 0°,0, od 10.V do 31.IX włącznie termometr maximum (K. Heinz. Thür.) z popr. 0°,0, od 1.X term. max. nowy (Franzen № 999 z popr. 0°,0)

Wiatromierz systemu Wilda z deseczką do prędkości wiatru, na wysokości 15,5m. nad powierzchnią gruntu. Deszczomierz systemu Hellmanna na wys. 1.5m. nad poziomem gruntu. Termometry na powierzchni ziemi: zwykły № 727, max., M.764, min., № 709. Termometry do pomiarów gruntowych na głęb. 3cm. № 821, na głęb. 10 cm. № 719, na głęb. 50cm. № 822. Oprócz powyżej wyszczególnionych narzędzi stacya posiada psychrometr aspiracyjny Assmanna i heliograf syst. Wieliczki, które jeszcze w roku sprawozdawczym czynne nie były.

Stacya II-go rzędu w Stawiszczach (gub. kijowska), założona przez Zarząd dóbr Stawiskich hr. W. Branickiego. W specyalnie wybudowanem na ten cel pomieszczeniu znajduje się: barometr (Fuess № 1681); termometry w budce blaszanej: suchy, zwilgocony, term. max. № 5236 i term. min. № 5237. Wiatromierz systemu Wilda z deseczką do oznaczania prędkości wiatru. Hygrometr włosowy systemu Koppe'ego. Deszczomierz systemu Hellmanna. Heliograf syst. Campbella. Kierownik stacyi p. M. Leszczyński rozpoczął nadto w roku sprawozdawczym obserwacye nad rodzajem i kierunkiem chmur.

Digitized by Google

Stacya II-go rzędu w Klimontowie (kieleckie) została przeniesiona wskutek wyjazdu kierownika p. W. Kobylińskiego do Damic pod Słomnikami.

Do stacyj deszczowych oraz rzędu III przybyła stacya deszczowa w Majdańcach, przy Majdanieckiej fabryce cukru w gub. kijowskiej; ta ostatnia zaprojektowała rozstawienie deszczomierzy w 7 punktach obserwacyjnych w promieniu kilkokilometrowym; wyniki pomiarów deszczowych nie były w roku sprawozdawczym nadsyłane. Dalej przybyła stacya deszczowa w Pilczycach (w radomskiem) w majątku p. Wł. Zamoyskiego; stacya deszczowa w Piastowie (w radomskiem), założona przez stacyę dośw. rolniczą, pod kierunkiem p. J. Olędzkiego. Stacya rzędu III-go w Suwałkach przy szkole handlowej, zaopatrzona została z inicyatywy dyrektora szkoły p. W. Grabińskiego w termometry: suchy (F. Müll. № 8836) z poprawką 0°,0 w zakresie skali od —20°,0 do +30°,0; term. zwilgocony (F. Müll. 8836*) z poprawką 0°,0 od —20°,0 do +30°,0; term. max. (F. Müll. № 8714) z popr. 0°,0 od —20° do +40°0 i term. min. (F. Müll. № 8267) z popr. od —20°,0 do —15°,0, —0°,1; od —14°,9 do —5°,8, —0°,1; od —5°,7 do +8°,0, 0°,0 i od +8°1 do +30°,0, —0°,1; deszczomierz systemu Hellmanna. Stacya III-go rzędu w Wielko-Połoweckiej (dobra Białocerkiewskie hr. M. Branickiej) przy stacyi doświadczalnej i selekcyi nasion, posiada: termometr zwycz. (F. Müll. № 9217) z poprawką od —20°,0 do —16°0, —0°,1 i od —15°,9 do +30°,0, 0°,0; psychrometr złożony z termometrów: suchego (F. Müll. № 9218) z poprawką 0°,0 w zakresie skali od —20°,0 do +30°,0 i zwilgoconego (F. Müll. № 9218) z popr. 0°,0 od —20°0 bo +30°,0; term. max. (F. Müll. № 8786) z popr. 0°,0 od —10°,0 do +40°,0; term. min (F. Müll. № 9378) z popr. od — 20°,0 do —3°,4, +0°,1 i od —3°,3 do +20°,0, 0°,0; deszczomierz systemu Hellmanna.

Spostrzeżenia, notowane przez przyrządy samopiszące lub heliografy, nadesłały stacye: Lublin, Łódź, Olszana, Plisków-Andruszówka, Saliwonki, Silniczka, Stawiszcze, Warszawa II (Stacya Filtrów).

Inspekcya w roku sprawozdawczym objęła stacye w Ząbkowicach i Piotrkowie. Poniżej podane są wyciągi z dziennika inspekcyjnego.

1. Inspekcya w Ząbkowicach dokonana była w dniu 13 lipca 1906 r. Stacya meteorologiczna tamtejsza mieści się za zabudowa-

Digitized by Google

niami stacyi kolejowej, obok domu piętrowego dla urzędników, otoczonego ogrodem; miejsce jest dość otwarte, a sam plac, mieszczący budkę z termometrami i deszczomierze, jest ogrodzony parkanem.

Wysoka klatka drewniana, z budką cynkową wewnątrz, ustawiona jest blizko północnej ściany domu mieszkalnego; klatka jest typu normalnego z żaluzyami, bez wentylatora.

W budce znaleziono w czasie inspekcyi 4 termometry w stanie nieuszkodzonym i funkcyonujące prawidłowo. Są one mianowicie:

1) Termometr suchy (Fuess № 3836) z poprawką $-0^0,1$ od $+10^0,1$ do $+30^0,0$).

2) Termometr zwilgocony (Fuess № 572a) z poprawką $-0^0,1$ (od $+6^0,1$ do $+30^0,0$).

3) Termometr maximum (Müll. № 8118) notowany bez poprawiania.

4) Termometr minimum (Müll. № 1273) z poprawką $+0^0,1$ (od $-6^0,2$ do $+3^0,1$).

Do zwilgacania termometru № 572a używana była woda zwyczajna; w czasie inspekcyi woda ta była niezupełnie czysta. Batyst był założony prawidłowo i bywa zmieniany w odstępach dwutygodniowych. Obserwacye terminowe prowadzone są bez lupy; w razie ciemności narzędzia oświetlane są zwyczajną lampką naftowo-olejową.

Wyniesienie termometrów w budce, przyjmowane dotąd na 2.4 m., stosuje się do dawnej budki, która była umieszczona niżej przy oknie domu; wzniesienie obecnej budki jest większe i wynosi 3.3 metra.

Hygrograf włosowy, który dawniej działał w Ząbkowicach, jest nieczynny, z powodu uszkodzenia, od połowy czerwca 1906 r.

W pobliżu klatki z budką, w obrębie miejsca ogrodzonego dla spostrzeżeń meteorologicznych, znajduje się deszczomierz (systemu Hellmanna). Umocowany on jest przy parkanie, wzniesienie jego wynosi 1.8 m. nad powierzchnią gruntu.

W odległości kilku metrów od deszczomierza działa również pluwiograf.

Wiatromierz systemu Wilda (z jedną deseczką) umieszczony jest w miejscu odpowiedniem na szczycie domu z łatwym dostępem, dzięki stosownej drabince. Kierunki były regulowane w czasie ustawiania i nie były dotąd zmieniane. Wzniesienie wynosi 11.4 m. nad poziomem gruntu.

Digitized by Google

Barometr (Fuess № 104, Müll. 27144) umieszczony jest w pokoju mieszkalnym, w miejscu niezupełnie dogodnem. Narzędzie to było niedawno odczyszczane i sprawdzane; rtęć jest czysta i stan barometru nie wykazuje widocznych uszkodzeń.

Do odczytań stosowana jest poprawka stała ogólna, równa +0.2mm. Termometr na barometrze nie jest poprawiany.

Prócz barometru znajduje się na stacyi w Ząbkowicach aneroid (barometr holostérique, Naudet et Cie, Paris) z podziałką co $0^0,5$ mm. i term. okrągłym co 1^0. Aneroid ten bywa odczytywany razem z barometrem rtęciowym; z powodu nieustawienia wskaźnika, aneroid pokazuje średnio koło 8mm. wyżej.

Obserwacye prowadzone są osobiście przez zarządzającego telegrafem stacyi kolejowej w Ząbkowicach p. F. Harlanda. Do pomocy posiada on woźnego, robiącego w zastępstwie spostrzeżenia.

2. Stacya w Piotrkowie (st. dr. żel. W.W.) zwiedzana była w dniu 30 października 1906 r.

Stacya meteorologiczna przy Dr. Żel. założona w r. 1888. Obserwacye do września 1895 r. niepewne. Od października 1895 r. objął kierownictwo stacyi zasłużony obserwator Sieci warszawskiej p. O. Nestorowicz, urzędnik Dr. Żel. W. W.

Budka Wilda z psychrometrem była umieszczona od strony północnej, przy parterowem mieszkaniu obserwatora w domu murowanym, przyczem występ muru w odległości kilkunastu metrów zasłaniał budkę od strony wschodniej. Od 20 października 1904 r. psychrometr przeniesiono do ogrodu stacyjnego, w którym ustawiono budkę drewnianą zwykłego typu. Nowe spostrzeżenia termometryczne rzucą światło na poprzednie, wykazując przypuszczalnie dość znaczne błędy, pochodzące z wadliwego umieszczenia psychrometru. W nowej budce, ustawionej na wysokości 3.5 m. nad poziomem gruntu znajduje się termometr suchy (Fuess № 380a) i wilgotny (Fuess № 1097) oba bez poprawki; termometr minimum (Fuess № 2570) i term. maximum (Müll. № 8100) również bez poprawek.

Barometr stacyjny (Fuess № 252) zawieszony w mieszkaniu obserwatora, na wysokości 1.8 m. nad poziomem szyn kolejowych (205,1 m.), zatem zero barometru jest wzniesione na 206.9 m.

W dniu 7.V.1904 r. delegat (z inspekcyi G. O. F.) znalazł poprawkę barometru + 0.11 mm., co łącznie z poprawką na cięż-

Digitized by Google

kość +0.39mm. daje stałą poprawkę +0.5 mm., dodawaną do odczytań.

Wiatromierz z deseczką Wilda umieszczony jest na wysokości 14.7m. nad powierzchnią gruntu, w miejscu niezasłoniętem i bywa oświetlany przy odczytaniach wieczornych lampą na bloku kolejowym.

Deszczomierz od października 1904 r. systemu G. O. F. na wysokości 2.0 m. nad poziomem gruntu; poprzednio na tejże wysokości używano deszczomierza systemu Hellmanna.

Funkcyonuje również stale od 1 maja do 1 października deszczomierz samopiszący Hellmanna, lecz te, ważne pod względem klimatologicznym dane nie są dostarczane Stacyi Centralnej przez Zarząd D. Ż. W. W,

d) Stacya Centralna w Warszawie.

1. *Przyrządy i obserwacye.*

Spostrzeżenia terminowe nad stanem ciśnienia (o 7 rano, 1 pop. i 9 wiecz.) prowadzone z pomocą barometru rtęciowego, kontrolującego (Fuess N. 226), którego poprawka stała, wyznaczona w kwietniu 1904 roku, wynosiła —0,07 mm. Barometr ten systemu Wilda-Fuessa, posiada noniusz, podzielony na sto części z działkami bezpośredniemi co 0,05 mm. Termometr attaché Celsyusza (M. N. 326, OF. 21464) posiada poprawkę $0^0.0$ w zakresie skali od $0^0.0$ do $30^0.0$ (maj. 1901). Uwzględniając poprawkę na ciężkość dla Warszawy (+0,47), utworzono łącznie z poprzednią jednę poprawkę stałą, którą w postaci zaokrąglonej +0,4 mm. dodawano do bezpośrednich odczytań barometru, niezależnie od poprawek na sprowadzenie do 0^0.

Niezależnie od barometru rtęciowego działał barograf samopiszący systemu Richarda.

W budce psychrometrycznej, umieszczonej w klatce z żaluzyami przy oknie balkonu bocznego Stacyi Centralnej, działały termometry: suchy (M. 7221, OF. 26304) z poprawką $0^0,0$ od $+30^0,0$ do $-13^0,3$ i popr. $-0^0,1$ od $-13^0,4$ do $-20^0,0$ (październik 1902 r.); zwilgocony (M. 7221*, OF. 26305) z poprawką $0^0,0$ od $-20^0,0$ do $+30^0,0$ (październik 1902 r.); termometr maximum (M. 7126, OF.

Digitized by Google

25606) bez poprawki i termometr minimum (№ 8198) z popr. $0^0,0$ od $-20^0,0$ do $+15^0,7$ i $-0^0,1$ od $+15^0,8$ do $+20^0,0$ (marzec 1904 r.) W środku klatki drewnianej umieszczony był hygrometr włosowy systemu Fuessa, sprawdzany od czasu do czasu na punkt 100 przez umieszczenie w przestrzeni nasyconej. Również w tem miejscu działały czasowo: termograf samopiszący Richarda i ewaporograf systemu Houdaille'a.

Niezależnie od odczytań termometrów psychrometrycznych w budce, posiadających nadto wentylator sprężynowy, prowadzono stałe spostrzeżenia w godzinach terminowych z psychrometrem aspiracyjnym Assmanna, zawieszanym na balkonie bocznym w blizkości budki. Przyrządy te, pochodzące z pracowni Fuessa w Berlinie, znajdowały się w dwóch egzemplarzach N. 78 i 157, które, jak widać z dołączanych świadectw, były sprawdzone przez ich wynalazcę, prof. Assmanna. Poprawki termometrów są mniejsze od $0^0,05$.

W zestawieniach miesięcznych dla Warszawy wpisywano spostrzeżenia z psychrometrem aspiracyjnym; tylko dane maximum i minimum temperatury brane były z spostrzeżeń termometrów w budce. Wilgotność bezwzględną i względną obliczano z danych przyrządu Assmanna, na zasadzie wzoru uproszczonego $f = f' - \frac{1}{2}(t - t')$, t. j. pomijając czynnik $\frac{b}{755}$ [1].

Wiatromierz systemu Wilda działał na balkonie górnym Stacyi Centralnej.

Opad mierzono trzy razy dziennie w godzinach terminowych, przyczem jeden z deszczomierzy (systemu Hellmanna) znajdował się na balkonie górnym, drugi (systemu Deutsche-Seewarte z kranikiem) na balkonie bocznym. Sumę dzienną otrzymywano z wszystkich obserwacyj, a mianowicie: z 1 pop., 9 wiecz. i 7 rano dnia następnego. Z dwóch jednoczesnych pomiarów z deszczomierzami brano zawsze

---

[1]) We wzorze tym f oznacza wilgotność w mm., f'—ciśnienie pary wodnej, nasyconej w temperaturze t', t—temperaturę według termometru suchego, t'—temperaturę według termometru zwilgoconego, b– ciśnienie powietrza.

Digitized by Google

ten, który dawał wysokość większą. Niezależnie od tych dwóch deszczomierzy odczytywano dla porównań (raz dziennie o 7 rano) wysokość opadu na dole w ogródku, należącym do Muzeum przemysłu i rolnictwa.

Nadto na Stacyi Centralnej znajdował się deszczomierz samopiszący, który jednak funkcyonował z przerwami i dawał wskazania niezadawalające. To samo dotyczy i meteorografu systemu Assmanna z wentylatorem elektrycznym.

Liczby godzin słonecznych notowane były z pomocą heliografu Campbella z ruchomą podstawką do papierków (przekładaną o 1 pop.) oraz heliografu systemu Wieliczki (№1961). Szczególną uwagę zwracano na spostrzeżenia nad natężeniem promieniowania słonecznego, które też były prowadzone w ciągu całego okresu sprawozdawczego w godzinach okołopołudniowych w dni dostatecznie pogodne. Stałe spostrzeżenia prowadzone były z aktynometrem systemu Chwolsona; w czasie od 1 stycznia 1906 r. do 11 kwietnia i od 14 listopada do końca roku 1906 używano aktynometru zimowego (skala od —20° do +30°), złożonego z termometrów №№ 29 i 44. Aktynometr letni (skala od 0° do 50°), złożony z termometrów № 73 i 74, działał od 12 kwietnia do 13 listopada 1906 roku.

Dni obserwacyjnych było w styczniu 3, w lutym 1, w marcu 5, w kwietniu 9, w maju 11, w czerwcu 6, w lipcu 9, w sierpniu 4, we wrześniu 6, w październiku 5, w listopadzie 3 i w grudniu 3. Ogółem dni 65, w ciągu których dokonano 922 pomiary, składające się każdy z 10 odczytań termometrów.

Niezależnie od spostrzeżeń z aktynometrem Chwolsona prowadzone były w różnych czasach jednoczesne pomiary z pyrheliometrem Ångströma. Pomiary te, kontrolujące się wzajemnie, potrzebne były do wyznaczeń spółczynników przejścia dla zamiany wartości, dawanych przez aktynometry, na jednostki bezwzględne.

II. Prace w Biurze stacyjnem.

Prace te obejmowały przedewszystkiem sprawdzanie całego pozostałego materyału spostrzeżeń stacyj Sieci warszawskiej i przygotowywanie poszczególnych wykazów rocznych oraz innych zestawień.

Digitized by Google

Bieżące sprawdzania nadsyłanych spostrzeżeń były z jednej strony potrzebne do miesięcznie ogłaszanych przeglądów pogody, a z drugiej strony pozwalały na dokładniejsze oryentowanie się co do wartości nadsyłanych obserwacyj.

Podobnie jak i w latach poprzednich, udzielane bywały potrzebne wykazy i informacye różnym instytucyom zagranicznym i miejscowym, które się w tym celu do Stacyi Centralnej zwracały.

W biurze stacyjnem prowadzona była w sprawach stacyjnych dość obszerna korespondencya; liczba wykazów spostrzeżeń dosięga 1200.

Po obserwacyi południowej przygotowywane były na Stacyi Centralnej stale buletyny codzienne dla pism warszawskich, a mianowicie: dla „Dziennika dla Wszystkich“ (do lutego), „Gazety Handlowej“, „Gazety Nowej“, „Ludzkości“, „Gazety Polskiej“, „Kuryera Polskiego“ i „Słowa“.

Nadto dla tygodnika „Wszechświat“ przygotowywane były buletyny dziesięciodniowe i miesięczne.

e) Publikacye Stacyi Centralnej.

Z materyałów, przygotowanych w biurze stacyjnem do ogłoszenia, przedewszystkiem wymienić należy opracowanie do druku w tomie XIX „Pamiętnika Fizyograficznego“ spostrzeżeń stacyj meteorologicznych za lata 1901, 1902 i 1903. Druk tych materyałów jest na ukończeniu.

W dziale „Pamiętnika Fizyograficznego“, poświęconym meteorologii i hydrografii krajowej, wydane będą w bieżącym tomie XIX także „Materyały do hypsometryi kraju“, opracowane przez p. J. Witkowskiego.

Przystąpiono do opracowania następnego rocznika Stacyi Centralnej, mającego zawierać spostrzeżenia za lata 1904, 1905 i 1906.

Ze stałych komunikatów Stacyi Centralnej są w okresie sprawozdawczym do wymienienia następujące:

1) 12 sprawozdań miesięcznych o przebiegu pogody w czasopiśmie „Gazeta Cukrownicza“ Rok 13, Tom XXVI №№ 16, 21, 24, 29, 33, 38, 42, 47, 51. Rok 14 T. XXVII №№ 3, 11, 16.

Digitized by Google

2) Buletyny dziesięciodniowe w „Gazecie Cukrowniczej“ w czasie od 1 kwietnia do 1 października 1906 r. tom XXVI (rocznik 13) №№ 30, 31, 32, 34, 35, 36, 38, 39, 41, 43, 44, 45, 46, 48, 50, 52. Tom XXVII (rocznik 14) №№ 1, 2.

3) 12 przeglądów miesięcznych pogody w tygodniku „Gazeta Rolnicza“, rocznik XLVI (1906) №№ 3, 9, 12, 17, 21, 27, 29, 34, 39, 43, 47, 52.

4) Wyniki spostrzeżeń meteorologicznych w organie Tow. Pszczelniczo-Ogrodniczego „Pszczelarz i Ogrodnik“ №№ 1—12.

5) Stacya Centralna meteorologiczna w Warszawie. Sprawozdanie z działalności za rok 1905. Warszawa, 1906, str. 26 (odbicie z „Wiadomości Matematycznych“).

6) Sprawozdanie z działalności Stacyi Meteorologicznej przy Muzeum w roku 1905 (przedstawione na zebraniu ogólnem Sekcyi Cukrowniczej w Warszawie w dniu 22 czerwca 1906 r.), drukowane w „Gazecie Cukrowniczej“ № 39 (tom XXVI).

Poniżej podane są nadto niektóre publikacye, ogłoszone w okresie sprawozdawczym z materyałów stacyjnych lub przez osoby, pracujące na Stacyi Centralnej.

W odbitce z „Wiadomości Matematycznych“ (t. X, str. 169—180) ogłoszona została praca R. Mereckiego p. t. „Okres dzienny temperatury powietrza podczas nocy podbiegunowej“.

W tymże tomie „Wiad. Mat.“ podany został artykuł Wł. Gorczyńskiego p. t. „Wiadomość o organizacyi służby meteorologicznej włoskiej“ (str. 209—221). Tenże autor wydał w okresie sprawozdawczym:

Sur la marche annuelle de l'intensité du rayonnement solaire à Varsovie et sur la théorie des appareils employés. (D'après les mesures faites à la Station Centrale Météorologique de Varsovie pendant les années 1901—1905). Avec 2 Planches. str. 202, 8-o, 1906.

Sur les variations de l'intensité du rayonnement solaire avec la hauteur du soleil. (Extrait du Bull. Mét. de l'Hérault) str. 12, 1906.

Quelques renseignements sur la dépression du rayonnement solaire à Varsovie en 1903 (ibidem). Str. 18 (z 1 fig.) 1906.

Sur les sommes de la chaleur en gr. Cal. pour Varsovie, Treurenberg et Montpellier (ibidem). Str. 22, 1906.

Digitized by Google

Wreszcie z materyałów, znajdujących się w bibliotece stacyjnej, opracowane zostały przez W. Smosarskiego ważne teorye zasłużonego w meteorologii badacza M. Margulesa. W t. X „Wiad. Mat.“ ukazała się (str. 181 – 207) w roku sprawozdawczym pierwsza część artykułu W. Smosarskiego p. t. „Prace M. Margulesa o wahaniach peryodycznych ciśnienia barometrycznego“.

W druku znajdowało się także dziełko „Wiadomości z Nauki o Pogodzie“, opracowane przy współudziale członków Stacyi Centralnej dla „Gazety Rolniczej“.

f) Wymiana wydawnictw. Biblioteka.

W zamian za publikacye Sieci Warszawskiej otrzymała Stacya Centralna w Warszawie następujące roczniki i wydawnictwa:

1. Aachen. Meteorologisches Observatorium: 1) Deutsches Meteorologisches Jahrbuch für 1904. Aachen. Jahrgang X.

2. Berlin. Preuss. Landesanstalt für Gewässerkunde: Jahrbuch für die Gewässerkunde Norddeutschland. Herausgegeben von der Preuss. Landesanstalt für Gewässerkunde. Besondere Mitteilungen. Band I (Heft I). Berlin 1906.

3. Berlin. Kön. Preuss. Meteorologisches Institut: 1) Deutsches Meteorologisches Jahrbuch für 1904, Heft I, II; 1905, Heft I. Preussen und benachbarte Staaten. 2) Berlin und seine Bauten 1896. Das Klima von Berlin bearbeitet von Prof. Dr. Hellmann. 3) Ergebnisse der Magnetischen Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1901, von Ad. Schmidt. Berlin 1905. 4) Die Niederschläge in den Norddeutschen Stromgebieten. Im amtlichen Auftrage bearbeitet von Prof. Dr. G. Hellmann. Erster, zweiter u. dritter Band. Berlin 1906. 5) Bericht über die Tätigkeit des kön. Preuss. Meteorologischen Instituts im Jahre 1904, 1905. 6) Ergebnisse der Niederschlags-Beobachtungen im Jahre 1902 von G. Hellmann. Berlin 1905 7) Ergebnisse der Beobachtungen an der Stationen II und III, Ordnung im Jahre 1900, Heft III, von Kremser, Berlin 1906.

4. Budapest. A. m. kir. országos meteorológiai és földmágnességi intézet: 1) A. m. kir. orsz. meteorológiai és földmágnességi intézet évkönyvei. Hivatalos kiadvány:

Digitized by Google

XXXII kötet 1902 évfolyam IV rész. Csapadek megfig. eredményei;
XXXIII „ 1903 „ I „
XXXIII „ 1903 „ III „ Zivatar „ „
XXXIII „ 1903 „ IV „ Csapadek „ „
XXXIV „ 1904 „ I „
XXXIV „ 1904 „ II „ az O Gyallai Observatoriumon végzett megfigielések;
XXXIV „ 1904 „ III „ Zivatar megfigielések eredményei.

2) V u. VI. Bericht über die Tätigkeit der Kgl. ung. Reichsanstalt für Meteorologie u. Erdmagnetismus und des Central Observatoriums in O. Gyalla im Jahre 1904, 1905. (Deutsche Ausgabe) Zusamengestellt durch Anton Réthly. 3) A. m. kir. országos meteorológiai és földmágnességi intezét Könyvtárába 1904, 1905 évben ajándék és vetel utján szerzett Könyvek 3 ik, 4-ik czimjegyzéke (Egyszermind a könyvtár nev es tárgymutatójának folytatása).

5. Cambrigde (Massachusetts) Observatory of Harvard College: 1. The Climatic Zones and their subdivisions by Robert de C. Ward July 1905. 2. The Hygiene of the Zones by Robert de C. Ward. January 1906. 3. The Characterics of the Zones: I—The Tropiecs. by R. C. Ward. 1906. 4. The Classification of Climates: II—by Robert de C. Ward.

6. Chemnitz. Kön. Sächsiches Meteorologisches Institut: 1. Deutsches Meteorologisches Jahrbuch für 1901. Königreich Sachsen von prof. Dr. Paul Schreiber. Chemnitz 1905.

6 bis) Dresden. Königl. Sächsisches Meteorologisches Institut: 1. Deutsches Meteorologisches Jahrbuch für 1902. von prof. Dr. Paul Schreiber. Dresden 1906.

7) Christiania. Norwegisches Meteorologisches Institut: 1. Jahrbuch des Norwegischen Meteorologischen Institut für 1903. Christiania 1904.

8) Edinburgh. Scotisch Meteorological Society: 1. Meteorological Observations at Stations of the second Order for the Year 1901. With Frontispiece Map. Edinburgh 1906.

9) Granada. Observatorio astronómico, geodinamico y meteorológico: (Dirigido por Padres de la Compania de Jesus). 1. Boletino de Observatorio Astronomico, geodynamico y Meteorologico de Granade. Enero-Noviembre 1906. Anno IV. 2) Sección Astronómica.

Digitized by Google

Observatorio de Cartuja-Estadistica foto-Heliográfica №. 2, 3, Anno. II, 1906. Eclipse de 1905 (fasciculo V).

10. Habana. Observatorio del Colegio de Belen: 1) Observaciones meteorologicas y magneticas hechas en el Observatorio del Colegio de Belen de la Compania de Jesus en la Habana. Anno de 1905.

10 bis) Habana. Secretaria de Agricultura Industria y Comercio: 1. Boletin correspondiente al mes de Agosto-Diciembre 1905. Mes Enéro-Marzo 1906. Estacion Central Habana. Resumen del anno 1905 publicado bajo pe la Direccion de Luis Garcia y Carbonell. Habana 1905. 2. Bolétin Oficial de la Secretaria de Agricultura Industria y Comercio. Vol I, № 1—7.

11) Helsingfors. Meteorologiska Central-Anstalt: 1) Observations météorologiques, publiées par l'Institut Météorologique Central de la Societé des sciences de Finlande. 1895—1896. Helsingfors 1906.

12) Innsbruck. Meteorologisches Observatorium der Universität: 1) Beobachtungen des Meteorologischen Observatoriums der Universität Innsbruck im Jahre 1901, 1902. Innsbruck 1905—1906.

13) Jurjef. (Dorpat). Station Météorologique de l'École Reale: 1) Observations de la Station Météorologique de l'École Reale de Jurjef, 1906 août-octobre.

14) Kraków. Akademia Umiejętności: 1) Rozprawy Wydziału matematyczno,przyrodniczego Akademii Umiejętności. Serya III. Tom 5. Dział A. Serya III, Tom 5, Dział B. 2) Buletin International de l'Academie des Sciences de Cracovie. Classe des sciences mathématiques et naturelles № 8, 9, 10, 1905, № 1, 2, 3, 1906. 3) Meteorologische Beobachtungen angestellt auf der K. K. Sternwarte in Krakau. Januar—Juin, September—October 1906

15) Leon (Mexico). Observatorio Meteorologico: Bôletin Mensual del Observatorio Meteorologico de Leon. Mes Enero, Marzo-Octubre de 1906.

16) London. Meteorological Office: 1) Weekly Weather Report of the Meteorological Office, vol. XXIII (New Series) № 1—52.

17) Madrid. Observatorio Meteorologico del Colegio de Nuestro Sennora del Recuerdo: 1) Boletin del Observ. Meteorolog. de Nuestra del Sennora Recuerdo. Anno III, 1905 № 3—12. Anno IV, 1906 № 1—6.

Digitized by Google

18) Modena. Osservatorio geofisico della R. Universita: Publicazioni del R. Osserv. geofisico di Modena: 1) № 13 Ciro Christoni. Elementi del magnetismo terrestre determinatia Corleto nell'estate 1897. Modena 1900. 2) № 14. Dante Pantanelli. Efflusso dell'acqua per le sabbie. Modena 1902. 3) № 15, Ciro Christoni. Osservazioni meteorologische fatto negli anni 1899 e 1900 all' Osservatorio Geofisico della R. Università di Modena. Calcolate dall' Ing. Angelo Manzini. Modena (1902). 4) № 16. Parafulmini del R. Osservatorio Meteorologico di Sestola di Ciro Christoni. Modena 1903. 5) № 17. Ciro Christoni. Osservazioni meteorologische fatte negli 1901—1902 all' Osserv. Geofis. della R. Univers. di Modena. Modena 1906. 6) №18. Dante Pantanelli. Oscillazioni nella composizione dell' acqua del pozzo di Piazza Magiore in Modena. Modena 1906.

19) Mont Blanc. Observatoire météorologique du Mont Blanc: Mr. I. Vallot (Paris, rue de Champs-Elysés 114). 1) Annales de l'Observatoire Météorologique, physique et glaciaire du Mont Blanc, publiées sous la direction.

20. Montevideo. ObservatorioMeteorológico del Colegio Pio de Villa-Colon: 1) Boletino Mensual del Observatorio Meteorológico del Colegio Pio de Villa Colon. Anno XIX. Nums. 1—9. 1905. Montevideo 1905.

21. Montpellier. Commission météorologique de l'Herault: 1) Bulletin météorologique du Department de l'Herault. Année 1876, 1877, 1879, 1880, 1881, 1887, 1888 (16 année), 1890, 1891—1904, 1905. 2) Table générale des Matières du Bulletin météorologique de l'Herault depuis sa fondation 1873—1903. Montpellier 1903. 3) Annuaire de l'association amicale des anciens élèves de l'École d'Agriculture de Montpellier 1899, 1900. 4) Ministère de l'Agriculture. Annales de l'École Nationale d'Agriculture de Montpellier. Tome IV, 1888—1889. Tome V, 1889. Tome VI, 1891. Nouvelle Serie Tome I, Fasc. II, 1 Octobre 1901.

22. Niżni-Olczedajew. Station Météorologique de Nijni-Oltschedajef du Comte Iracly Morcoff: 1) Buletin metéorologique mensuel 1906, janvier—novembre.

23. Petersburg. Observatoire physique Central Nicolas: 1) Lietopisi Nikołajewskoj Gławnoj Fiziczeskoj Obserwatorii 1903, II (wypusk II), 1904 czaśt I i II (wypusk I). Petersburg 1906.— „Komi-

Digitized by Google

tet dlia pomoszczi pomoram russkawo Siewiera." 1. L. L. Breitfuss. Wissenschaftlich-praktische Murman Expedition. Bericht über die Tätigkeit pro 1903. „Gławnoje Uprawlenje Ziemleustrojstwa i Ziemledielja: 1) Trudy opytnych leśniczestw, czetwiortyj wypusk, 1906. — „Russkoje Obszczestwo ochranienia narodnowo zdrawia." 1) Trudy II wsierossijskawo sjezda diejatielej po klimatologii, hidrologii i balneologii. W pamiat' Pietra Wielikawo. Tom I i II. Petersburg (1905-1906).

24. Praha. Královské české společnosti náuk: 1) Obecny rejstřik spisu král. čes. společ. ná k 1884—1894. sestavil Jiři Wegner 2) Vestnik královské české společnosti nauk. Třida mathematicko-přirodovédecká. 1904—1905. 3) Vyročni Zprawa král. čes. společ. náuk za rok 1904, 1905.

25) Roma. R. Ufficio Centrale di Meteorologia e di Geodinamica all Collegio Romano, Via del Caravita № 7: 1) Annali dell' Ufficio Centrale Meteorologico e Geodinamico Italiano. Serie Seconda. Vol. XV, Partie II, 1893. Serie Seconda, Vol. XVI, Partie III, 1894. 2) Rivista Meteorico-Agraria 1905. Anno XXVI № 26, 1906. Anno XXVII № 1—34. 3) Boletino Meteorico dell' Ufficio Centr. di Meteorologia e di Geodinamica. Anno XXVIII, 1906, № 1—365.

26. Salonique. Gymnase Bulgare des Garçons St. Cyrille et Methode: 1. Bulletin annuaire de la Station météorologique près du Gymnase Bulgare des Garçons St. Cyrille et Methode à Salonique pour l'année 1904, 1905.

27. Sofia. Institut météorologique central de Bulgarie: 1) Annuaire de l'institut météorologique de Bulgarie publié par Spas Watzof. Année 1901, 1902, 1903, 1904, 1905. Sofia (1906). 2) Résumés mensuels et annuels des observations météorologiques faites à Sofia, Pleven, Gabrovo, Bourgas et Philippopoli pendant les années 1894—1903 publiés par Spas Watzof. 3) Tremblements de terre observés pendant l'année 1904, 1905. 4) Ziemledielczesko-meteorologiczeski biuletin № 7—12, 1905, № 1—9, 1906.

28. Stockholm. Meteorologiska Centralanstalten: 1) Meteorologiska Jaktagelser i Sverige. Vol. 46, 2 siéme série. Vol. 32, 1904. Vol 47, 2 siéme, série: Vol. 33, 1905.

29. Sobieszyn. Stacya doświadczalna Rolnicza: 1) Wyniki prac i doświadczeń, wykonanych od d. 1 lipca 1904 do d. 1 stycznia

Digitized by Google

1906 r. przez Stacyę doświadczalną w Sobieszynie, podał St. Leśniowski. Warszawa, 1906.

30. Tiflis. Fiziczeskaja Obserwatorja (Physikalisches Observatorium): 1) Meteorołogiczeskij biułetin Tifliskoj Obserwatorji. Obzor pogody na Kawkazie za 1905 god, № 13. Tiflis 1906. 2) Jeżemiesiacznyj Meteorołogiczeskij biuleteń Tifliskoj Meteorołogiczeskoj Obserwatorji. Obzor pogody na Kawkazie. God IX, № 1—9, 1906.

31. Uccle. Observatoire Royal de Belgique: 1) Annuaire météorologique pour 1906, publié par les soins de A. Lancaster. Bruxelles 1906.

32. Upsala. Observatoire météorologique de l'Université 1) Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal. Vol. XXXVII. Année 1905.

33. Warszawa. Red. Wiadomości Matematycznych (Marszałkowska 117): 1) Wiadomości Matematyczne. Red. i wydawca S. Dickstein. Tom. X. Warszawa 1906.

34. Washington. S. Departement of Agriculture. Weather Bureau: 1) Monthly Weather Review. Volume XXXIII № 12 1905. Volume XXXIV, № 1—8, 1904. 2) Experiment Station Record Volume XVIII, 1906 (Subject index). Volume XVIII № 1—3, 1906, 3) Monthly Listof publications, june-october, 1906.

35. Wien. K. K. Zentral-Anstalt für Meteorologie und Geodynamik: 1) Jahrbücher der K. K. Zentral-Anstalt für Meteorologie und Geodynamik. Jahrgang 1904, Neue Folge XLI, Band. Anhang. Jahrg. 1904, Neue Folge XLI Band. Wien 1906.

36. Xalapa (Mexico). Observatorio Meteorológico Central del Estado de Veracruz Llave. 1) Resumen de las observaciones verificadas en el Observatorio Meteorológico Central de Veracruz Llave. Anno de 1905. Mes Enero-Octubre. Xalapa-Mexico 1905.

37. Zi-Ka-Wei (Chine). Observatoire magnétique et météorologique: 1) Réductions des observations de température 1873 — 1903 par le P. I. de Moidrey, S. J. Chang-Hai 1905. 2) Bulletin des observations. Tome XXIX. Année 1903. Chang-Hai 1906.

Biblioteka Stacyi wzrosła blizko o 200 numerów; katalog kartkowy w dalszym ciągu był prowadzony.

Digitized by Google

Zarząd Stacyi Centralnej w Warszawie uważa za swój obowiązek wyrazić podziękowanie wszystkim osobom i instytucyom, które moralnie i materyalnie popierały rozwój Stacyi Centralnej, a także kierownikom i obserwatorom stacyj prowincyonalnych.

R. Merecki.

Warszawa, w lutym 1907 r.

Digitized by Google

Samuel Pierpont Lingley.

Zmarły w dniu 27 lutego 1906 r., sekretarz Smithsonian Institution S. P. Langley należał do wysoce zasłużonych i utalentowanych pracowników w dziedzinie Fizyki atmosfery ziemskiej i w ogóle w Fizyce i Meteorologii. Urodzony w dniu 22 sierpnia 1834 r. w Roxbury (Massachusetts), ukończył w roku 1851 Boston High Schol i zajmował się początkowo inżynieryą i architekturą, poświęcając jednak cały czas wolny studyom astronomicznym. W latach 1864 i 1865 odbył podróż naukową po Europie dla zapoznania się z urządzeniami różnych instytutów naukowych; po powrocie, mając już 31 rok życia, poświęcił się wyłącznie nauce. Początkowo był asystentem w Harvard College, w r. 1866 był już dyrektorem Alleghany-Observatory w Pittsburgu, skąd w r. 1887 udał się do Waszyngtonu w charakterze [1] sekretarza Smithsonian Institution.

Z pierwszego okresu działalności naukowej Langley'a można wymienić jego nadzwyczaj czynne uczestnictwo w komisyi dla zaprowadzenia czasu normalnego dla całej Ameryki Północnej, zamiast poprzednio używanych czasów miejscowych. O wiele jednak ważniejszym faktem naukowym było rozpoczęcie w Pittsburgu rozległych studyów nad promieniowaniem słonecznem, nad którem on, zwłaszcza od r. 1880, aż do końca życia stale i niezmordowanie pracował. W ciągu tego, z górą dwudziestopięcioletniego okresu, ogłosił Langley wiele nader cennych prac naukowych, o których w niniejszej krótkiej notatce tylko pobieżną wzmiankę dać możemy.

---

*) Warto przypomnieć, iż w Anglii, w Ameryce Północnej oraz w ogóle w krajach angielskiej kultury tytuł sekretarza („secretary") nie jest w ogóle używany w znaczeniu, przyjmowanem w Europie, lecz najczęściej oznacza faktycznego kierownika, zarządzającego sprawami danego stowarzyszenia lub instytucyi. S. P. Langley stał właśnie na czele w kierownictwie Smithsonian Institution.

Digitized by Google

Przedewszystkiem jednak, aby badać promieniowanie słoneczne należało posiadać odpowiednio czuły przyrząd, a przyrządem tym był jeszcze w r. 1880 skonstruowany przez Langleya bolometr. Wprawdzie idea tego nadzwyczaj czułego instrumentu była już około r. 1850 wynaleziona i opisana przez Svanberga, lecz dopiero Langley zbadał bolometr z całą dokładnością i nadał mu całą możliwą doskonałość techniczną, pozwalającą na szersze zastosowanie tego przyrządu do badań eksperymentalnych.

Za wielką zasługę naukową Langley'a poczytujemy także tę gruntowność i drobiazgowość, z jaką on, teoretycznie i doświadczalnie, badał rozmaite części przyrządu oraz granice dokładności jego wskazań, i dopiero wtenczas przystępował do pomiarów, gdy możliwe błędy w otrzymanych wartościach były z góry oznaczone i wiadome. Zasada ta wydawałaby się sama przez się zrozumiałą i bezwarunkowo konieczną, a jednak jak często dotychczas, zwłaszcza w Meteorologii, publikowane są pomiary, których stopień dokładności nie jest ani badany, ani też wiadomy.

W większych pracach Langley'a uderzała wprost ta okoliczność, że przeważająca część treści poświęcona jest wstępnym badaniom nad teoryą i wskazaniami przyrządów, a rezultaty pomiarów podawane były w końcowej, stosunkowo niewielkiej rozmiarami treści. Ten nierównomierny podział jest aż nadto usprawiedliwiony ogromną zawiłością i trudnością otrzymywania bologramów. Zwłaszcza wiele pracy poświęcił Langley skonstruowaniu odpowiednio czułego galwanometru, pomiarom nad dyspersyą soli kamiennej i ulepszeniu automatycznego mechanizmu do otrzymywania na drodze fotograficznej krzywych energii widmowej.

Głośna ekspedycya z roku 1881 na Mount Whitney w Kaliforni doprowadziła Langley'a do wniosku o nader wielkiej absorbcyi promieniowania słonecznego przez atmosferę ziemską, a także że widmo słoneczne sięga do daleko większych długości fali, niż to dotychczas przypuszczano. Badacz amerykański „odkrył" nowe rozległe dziedziny w infraczerwonej części widma i w sposób ścisły i gruntowny „opisał" oraz przedstawił krzywą energii spektralnej nietylko w przedziale od od 0,4 do 0,8μ, ale także i dalej, aż do 5μ; około 500 nowych linij Fraunhofera zostało w ten sposób „uwidocznionych" i uprzystęp-

Digitized by Google

nionych dla badań naukowych. Spektralno-balometryczne badania Langley'a zostały następnie rozszerzone aż do 8μ.

Długoletnie prace Langleya przedstawione są głównie w dwóch dużych pracach, a mianowicie:

„Researches on solar heat and its absorption by the earth's atmosphere" Report of the Mount Whitnej Expedition. (U. S. Sign. Serv. Prof. Papers, 15, Washington 1884).

„Annals of the Astrophysical Observatory of the Smithsonian Institution" (Washington, **1**, 1900).

Te ostatnie „Annals", wydane jako rocznik pierwszy obserwatoryum astronomicznego w Waszyngtonie, są całkowicie wypełnione pracami swego dyrektora S. Langley'a nad infraczerwoną częścią widma. Rocznik ten, wydany w postaci dużego tomu in 4-o, jest bogato ilustrowany, a np. mapa widmowa w dużej skali dołączona jest na płótnie. Należy także wspomnieć, że najbliższym współpracownikiem Langley'a był jego asystent Abbot; również i z F. Very ogłosił on wspólnie kilka rozpraw.

Poniżej przytaczamy wykaz prac, ogłoszonych przez Langley'a w ciągu jego płodnej działalności; potrzebne dane zaczerpnięte zostały częściowo z „Biographisch-Literarisches Handwörterbuch" Poggendorffa (w wydaniu A. V. Oettingena), częściowo zaś (dla prac z lat ostatnich) z własnych notatek przy czytaniu literatury naukowej.

Wykaz ten podany jest z możliwemi skróceniami i ułożony według czasopism, w których Langley głównie publikował swe badania. Rozprawy, streszczane lub referowane w innych publikacyach, są zaznaczone w odnośnikach.

Wykaz prac naukowych S. P. Langleya.

a) Amer. Ac. Proc. Solar physics, 13 p.—Remarkable groups in the lower spectrum, 14 p.—Temper [6]) of the sun, 7 p. (**14**, 1879).—Bolometer [9]) and radiant energy, 17 p. (**16**, 1881).

b) Amer. Electr. Soc. J. Electric [5]) time service, 9 p. (**2**, 1879).

c) Amer. Exchange and Review. Uniform railway time, 5 p, (**24**, 1874).

d) Amer. Meteor. Soc. Proc. Bolometer (tom i rok nie podany).

Digitized by Google

e) Amer. Scientifc. The Sun, 9 p. (1878—79).

f) Ann. Chem. Phys. Spectres invisibles, 74 p. (**9**, 1886).

g) Astron. Soc. Month. Not. Structure[3]) of the solar photosphere 6 p. (**34**, 1874). — Direct [1]) [1 8]) effect of sun-spots on terrest. climates, 7 p. (**37**, 1877).—Transit of Venus 1882; Allegheny Observ., 3 p. (**43**, 1883).

h) Brit. Ass. Rep. On [12]) [1 19]) recent researches in the infrared spectrum, 10 p. (1894).

i) Chicago, Astrophys. Journal. The heat radiation of the corona, 2 p. (**12**, 1900. — The solar constant [8]) and related problems (**17**, 1903).—On a possible variation [8]) of the solar radiation and itd probable effect on terrestrial temperatures (**19**, 1904).

j) Exner, Rep. Phys. Betrag des atmosphärischen Absorption 19, p. (**21**, 1885).

k) Franklin Inst. Journ. Note on the total eclipse of 1870.—New form of solar eye-piece, 2 p. (**61**, 1871). — External aspects of the sun etc., 16 p. (**68**, 1874).

l) London, Roy. Inst. Proc. Sunlight [12]) and the earth's atmosph. 18 p. (**11**, 1885).

m) Nature (London). The American Eclipse Exped. (**3**, 1871). The Mount Whitney Exped., 2 p. (**26**, 1882). — Sunlight Colors (36, 1887). Struct. of the Inner Corona (**61**, 1900). Variation of atmospheric absorption (**69**, 1903; **70**, 1904).

n) Paris (Comptes Rendus). Temp. relative des diverses régions du soleil, 3 & 2 p. (**80**, 1875). — Radiat. superfic. du soleil; 2 p. (**81**, 1875). — Nouv. méthode spectroscopique, 3 p. (**84**, 1877). — Distribution [9]) de l'énergie dans le spectre solaire, 5 p. (**92**, **93**, 1881). Observ. du spectre solaire, 5 p. (**95**, 1882).—Rech. expér. aerodyn etc. **113**, 1891). — La région infrarouge du spectre solaire (3 rozprawy), 13 p. (**119** i **131**, 1894 i 1900). — Descript. du vol. mécan., 2 p. **126**, 1896).

o) Pop. Sc. monthly. Photosphere & sun-spots, 10 p.—Transit of Venus, 13 p. (1874).

p) Science. Spectrum of an Argand Burner (**1**, 1883).—Temper. of the Moon. (**7**, 1886).—Adress (**10**, 1887).—Total Solar Eclipse 1900, Smithsonian Inst. (**11**, 1900).

r) Sidereal Messenger. A vaste dust enveloppe (**3**, 1884).

Digitized by Google

t) Smitsohn. Contribut t. Knowl. Experiments in Aeorodynamics (**701**, 1891).

s) Silliman, Amer. J. Allegheny system of electr. time signals 10 p. (**4**, 1872).—Minute [1]) [1 3]) Strut. of the solar photosph., 14 p. (**7**, 1874.—Comparis[4]) of theories of solar struct. with observ, 6 p. (**9**, 1875). Solar atmosphere, 8 p. (**10**. 1875). — Possibility of transit observ. without personal error, 5 p.—New [1]) [1 3]) method in solar spectr. analysis, 7 p. (**14**, 1877). — Jansen's solar photograph. opt. studies, 5 p. Transit[7]) of Mercury 2p. (**15**, 1878). Observ. on Mt. Etna, 11 p. (**20**, 1880). The actinic balance, 11 p. (**21**, 1881).—Selective [10]) absorpt. of solar energy, 28 p. (**25**, 1883). Sunlight[12]) and Skylight at high alt. (**24**, 1882). Experim. [10] i [11]) determinat of wave-lengths in the invisible prismatic spectrum, 20 p. (**27**, 1884). Amount [10]) of the atmosph. absorpt. 18 p. (**28**, 1884). — Transmission of light by wire gauze screens, 2 p. — Opt. propert. of rock-salt, 4 p. (**30**, 1886). — Observ. [10]) [13]) i [3]) on invisible heat-spectra etc., 11 p. (**31**, 1886). — Hitherto [10]) unrecognized wave-lengths, 24 p. (**32**, id.) — Energy [10]). [11]) i [9]) and vision, 21 p.—Invisible [10], [11], [14] i [9]) solar and lunar spectrum, 13 p. (**36**, 18·8). History of a doctrine [3]), 22 p. (**37**, 1889). — Obs. of sudden phenom. 7 p.—Temperat [10]) of the moon., 19 p. (**38**, id.)— Cheapest [10]) form of light (razem z F. W. Very), 17 p. (**40**, 1890). — Internal [15]) work of the wind 22 p. (**47**, 1894). — Bolometer, 4 p. (**5**, 1898). — New Spectrum, 11 p. (**11**, 1901).— Possible variation in solar radiation; report for the year, ending June 30, 1904 (**19**, 1905).

u) U. S. Coast. Surv. Rep. Total. eclipse 1869. Total solar Eclipse 1870 (1870).

w) U. S. Sign. Serv. Prof. Papers. Solar Heat; Report of the Mount Whitney Exped. (**15**, 1884).

x) Washington, Acad. Mem. Proitchard's Wedge Photomete (wraz z Pickeringem & Youngem), (**11**, 1887).

y) Washington, Nat. Acad. Mem. Temperature of the Moon, 30 p. (**3**, 1884).

z) Wied. Ann. Phys. Experiment. [9]) Bestimungen der Wellenlängen in unsichtb. prism. Spectrum 14 p. (**22**, 1884).

Napisał on również: Observ. on Pikes Peak, Colorado, tot Edipse 1878.—The New Astronomy (również w Century), 1884—1885.—The meteor. Work of the Smithson. Inst. Congress-Chicago, 1893. — Annals

Digitized by Google

of the Astrophysical observatory of the Smithonian Institution (Washington, 1900).

Uwaga. Postawione przy tytułach odnośniki oznaczają, że odnośne rozprawy były także streszczane lub tłomaczone w: [1]) J. de Phys.; [2]) Genève, Arch. sc. phys; [3]) Amer. Asoc. Proc.; [4]) Soc. Spettr. Italiani; Mem.; [5]) Harper's Mag.; [6]) J. of Science; [7]) Astr. Soc. Month. Not.; [8]) Wien, Met. Zeit ; [9]) Ann. chim. phys.; [10]) Phil. Mag.; [11]) Wash. Nat. Ac. Mem.; [12]) Nature (London); [13]) Paris, C. R.; [14]) Exner, Rep.; [15]) Revue de l'Aeronautique; [16]) Pop. Science Monthly.

Z wykazu tego widać, że znakomita większość prac należy wprawdzie do badań nad promieniowaniem, lecz że kilkanaście rozpraw poświęconych jest także rozbiorowi różnych kwestyj nad czasem normalnym, nad obserwacyą różnych zaćmień słonecznych, a również nad zawiłą kwestyą machin powietrznych. Ta ostatnia sprawa stale interesowała Langley'a, który w r. 1891 i 1893 ogłosił dwie prace nad oporem powietrza, a później w r. 1896 skonstruował nawet stosowny mechanizm swego pomysłu.

Również i kwestye bardziej meteorologiczne były przedmiotem poszukiwań tego niestrudzonego badacza. W ostatnich latach szczególniej interesowała go ważna kwestya znacznej depresyi w wartościach natężenia promieniowania słonecznego, którą wykryto zarówno w Waszyngtonie, jak i w Lozannie, Warszawie, Modenie i niektórych innych miejscowościach.

Langley pragnął wykryć wpływ tej „perturbacyi" radiacyjnej na przebieg elementów meteorologicznych i w tej sprawie ogłosił w r. 1904 ciekawą rozprawę p. t. „On a possible variation of the solar radiation and its probable effect on terrestrial temperatures" (Astrophysical Journal, T. 19, Chicago).

Była to jedna z ostatnich prac zasłużonego badacza; do dalszego badania tej kwestyi zbierał on w dalszym ciągu materyały, aż śmierć w dniu 30 sierpnia 1906 r. wyrwała nauce zasłużone życie po 72-letniem pracowitem i płodnem istnienin. *Wł. G.*

Digitized by Google

PRZEGLĄD LITERATURY. BIBLIOGRAFIA.

Ladislas Gorczyński, Docteur ès Sciences. „Sur la marche annuelle de l'intensité du rayonnement solaire à Varsovie et sur la théorie des appareils employés. Str. VIII+202, 8-ka większa, 1906. Z 2-ma figurami poza tekstem.

Praca ta, wydana w języku francuskim, opiera się na materyałach z pięciu lat (1901—1905) pomiarów pyrheliometrycznych i aktynometrycznych w Warszawie. Składa się ona z dwóch głównych części, z których pierwsza (A) poświęcona jest teoretycznemu i doświadczalnemu rozbiorowi i dyskusyi wskazań pyrheliometru elektrycznego kompensacyjnego oraz aktynometru systemu Angströma-Chwolsona-część druga (B) zawiera rezultaty opracowań materyału pomiarów warszawskich.

Część I-sza pod tytułem „O stopniu dokładności pomiarów pyrheliometrycznych i aktynometrycznych w Warszawie i o zmienności spółczynnika przejścia dla aktynometru systemu Angströma-Chwolsona" składa się z sześciu rozdziałów. Jeden z nich zajmuje się bliższą dyskusyą wskazań pyrheliometrów o kompensacyi elektrycznej, podaje literaturę i zasadę przyrządu oraz „stałe" egzemplarzy warszawskich. Łącznie z dyskusyą teoretyczną o błędach prawdopodobnych w pomiarach pyrheliometrycznych, podane są rezultaty obliczeń błędów prawdopodobnych przypadkowych według materyałów spostrzeżeń. Ogólnie dokonano w Warszawie 1023 pomiary pyrheliometryczne.

Pozostałe rozdziały części A poświęcone są teoryi aktynometru systemu Angströma-Chwolsona oraz dyskusyi błędów tego przyrządu i wyznaczeniu jego „spółczynnników przejścia". Ta część pracy na-

Digitized by Google

stręczała daleko więcej trudności i wymagała daleko liczniejszych rozważań teoretycznych i doświadczalnych, niż dyskusya wskazań pyrheliometrycznych; pochodziło to stąd, że pierwotna teorya aktynometru, podana przez Chwolsona i dotychczas ogólnie przyjmowana, okazuje się niewyczerpującą. Autor wykazuje, że dotychczasowe wartości promieniowania, obliczane ze wskazań aktynometru według wzorów Chwolsona, nie mogą być dokładne i że błąd ich dochodzić może łatwo do 10% wartości mierzonej.

Niedostateczność wzorów Chwolsona polegała w swej części zasadniczej krótko na tem, że w równaniu różniczkowem dla zmiennego stanu cieplnego oraz w jego całkach brano temperaturę ciała według wskazań części termometrycznej przyrządu odbiorczego. tj. według masy rtęci, gdy tymczasem źródło właściwe zmian cieplnych leży w powierzchniach wyczernionych, absorbujących promieniowanie. Takie uproszczenie może być dozwolone np. dla nadzwyczaj cienkich płytek termoelektrycznych pyrheliometrów, lecz jest niedopuszczalne dla ciał aktynometrycznych o budowie złożonej. Wypadało więc zbadać rozkład temperatur dla tych ciał, uwzględniając wpływ perturbacyjny ścianek szklanych rezerwoarów, oddzielających powierzchnie absorbujące od masy rtęci. Autor przedstawia równania różniczkowe w postaci zmodyfikowanej, wprowadzając nowe wielkości: grubość ścianek szklanych i spółczynnik ich przewodnictwa cieplnego. Całki tych nowych równań są tego samego typu co i poprzednie, lecz wchodzi tam nowy mnożnik, zależny od wartości spółczynnika zewnętrznego przewodnictwa cieplnego, zmiennego, jak wiadomo, z temperaturą. Stąd otrzymuje się wniosek, że założenie dotychczasowej teoryi co do istnienia „stałej“ przyrządu, dającej się wyznaczyć z porównań pyrheliometrycznych, nie da się utrzymać, oraz że aktynometr wymaga wyznaczeń „spółczynników przejścia“, które będą wzrastały wraz z samą wartością mierzoną.

Nadto została podana teorya błędów, zależnych od przedziałów czasu, pominięta przez Chwolsona. Inne źródła błędów, rozpatrywane już dawniej, zostały pokrótce rozważone z dołączeniem przykładów liczbowych, zaczerpniętych z materyałów warszawskich.

W końcu części A podane są rezultaty licznych seryj porównań pyrheliometrów z aktynometrami i wyznaczone są nowe spółczynniki przejścia, które pozwalają otrzymać dane, według wskazań aktynome-

Digitized by Google

trycznych, rzeczywiście w jednostkach bezwzględnych. Autor wskazuje, że opracowując odpowiednie dane i tworząc średnie, przy pomocy aktynometru systemu Angströma-Chwalsona osiągamy dokładność do 1 %, i że może być on uważany nadal za narzędzie precyzyjne do pomiarów natężenia promieniowania słonecznego. Zdobycie tego zasadniczego rezultatu, który wymagał całej seryi rozważań teoretycznyh i doświadczalnych, było niezbędne, ale zarazem i dostateczne, aby przejść do opracowania pomiarów radiacyi w Warszawie w celach meteorologicznych, czemu też poświęcona jest część następna pracy niniejszej. Dodamy, że materyał aktynometryczny, zebrany w Warszawie w ciągu okresu 1901—1905, obejmuje 8622 pomiary z 389 dni obserwacyjnych.

Rozdział VII zajmuje się wyprowadzeniem zasadniczych redukcyj dla wartości natężenia promieniowania słonecznego według pomiarów w Warszawie i w niektórych innych miejscowościach. Za to ostatnie wzięto dane z Guimar (wyspa oceaniczna Teneryffa), z Zakopanego i z Treurenberga (Spitzbergen), gdzie pomiary prowadzone były z pyrheliometrem kompensacyjnym. Redukcye na wysokość słońca dają wartości blizkie dla wszystkich tych miejscowości.

Większe trudności nastręczało wyznaczenie wpływu wilgotności na natężenie promieniowania słonecznego. Autor wskazuje, że stosowanie zwykłej metody grup średnich nie prowadzi tu do pożądanych wyników i posiłkuje się metodą wartości najwyższych. Dane, otrzymane tą drogą dla Warszawy i Treurenberga, prowadzą do rezultatów zupełnie zbliżonych.

Rozdziały VIII i IX poświęcone są zamianom rocznym natężenia promieniowania słonecznego w ciągu pięciolecia 1901—1905 w Warszawie oraz depresyi radiacyjnej w tym okresie. Po podaniu uwag o tworzeniu wartości dziennych i miesięcznych omawiane są zestawienia miesięczne i roczne. W związku z ogólnym charakterem przebiegu rocznego w Warszawie z jego trzema maximami podane są wiadomości o depresyi radiacyjnej, która trwała od grudnia 1902 do lutego 1904 r. włącznie. Miała ona charakter ogólny i była skonstatowana w kilku punktach Europy i Ameryki. Autor podaje przeciętny wykaz roczny dla przebiegu natężenia promieniowania słonecznego w Warszawie, porównywuje dane te z wynikami pomiarów w Guimar,

Digitized by Google

Modenie i Treurenbergu oraz charakteryzuje liczbowo przebieg depresyi radiacyjnej.

Rozdział X omawia schemat liczbowy dla Warszawy, przy posiłkowaniu się poprzednio wyprowadzonemi redukcyami na wysokość słońca, odległość ziemi i wilgotność bezwzględną; wykazuje się, że te trzy redukcye są wystarczające, aby wytłómaczyć maxima wiosenne i jesienne dla szerokości Europy oraz jednostajny bieg w okolicach podbiegunowych (Treurenberg). Pozatem autor rozpatruje materyały pomiarów z Ameryki (Providence, Asheville, Black Mountain), z Włoch (Modena), z Zakopanego, z Hald w Jutlandyi; we wszystkich tych miejscowościach prowadzone były pomiary z pyrheliometrem o kompensacyi elektrycznej. Wreszcie podane są krótkie uwagi o charakterze przebiegu rocznego w kilku miejscowościach, gdzie posiłkowano się aktynometrycznemi, których wskazania nie mogą być uważane jako sprowadzone do gr.-cal.

Rozdział XI poświęcony jest obliczeniom miesięcznych i rocznych sum ciepła w kaloryach gramowych według pomiarów natężenia promieniowania słonecznego i danych usłonecznienia według heliografów. Po uwadze co do wartości insolacyjnych i t. zw. stałej słonecznej, autor podaje sposoby obliczania sum ciepła, dostarczanego do powierzchni ziemi w razie stałego usłonecznienia, a następnie z uwzględnieniem wskazań heliograficznych; nadto wszystkie dane są obliczane także dla powierzchni poziomej ziemi (w składowych pionowych).

W osobnej tabeli podane są sumy insolacyjne dla r. 1903, 1904 i 1905 w Warszawie, z których wynika, że centymetr kwadratowy pionowej powierzchni ziemi otrzymał tam w ciągu tych trzech lat: 36890, 55230 i 50920 gr.-cal. Ponieważ w razie stałego usłonecznienia suma ta wynosiłaby 106800 gr.-cal., więc sumy rzeczywiste dają tylko 35% (1907), 51% (1904) i 48 % (1905) wartości możliwie najwyższych. Te liczby procentowe okazują się blizkie dla procentów usłonecznienia możliwego.

Autor nie ograniczył się na Warszawie, lecz przytoczył rezultaty podobnych rachunków dla Treurenberga (Spitzbergen) i Montpellier. Wszystkie te dane zestawione są w tabeli końcowej.

Do tekstu dołączony jest wykaz literatury do r. 1905 włącznie, obejmujący znaczną liczbę tytułów. Nadto na końcu książki umiesz-

Digitized by Google

czone są na osobnych stronicach dwie figury, z których pierwsza przedstawia wizerunek pyrheliometru oraz aktynometru, używanych do pomiarów warszawskich; figura druga daje krzywe zmian natężenia promieniowania słonecznego w Warszawie w ciągu okresu 1901—1905.

Wł. Gosiewski. „Zasady Rachuuku prawdopodobieństwa", napisał.... Mag. Nauk mat.-fiz. b. Szkoły Głównej Warszawskiej, członek-koresp. Akad. Um. w Krakowie. Serya III, t. 1 Biblioteki matematyczno-fizycznej, wydawanej przez A. Czajewicza i S. Dicksteina, z zapomogi Kasy pomocy im. J. Mianowskiego. Warszawa. Skład główny w księgarni E. Wendego i Spk. 1906. 8-o, str. X, 265. Cena rb. 2

Pozostawiając do późniejszych zeszytów rozbiór tej wybitnej książki, pozwolimy sobie na tem miejscu przytoczyć niektóre wyjątki z przedmowy Autora, w której on sam charakteryzuje zadanie i układ swej pracy. Przedstawiwszy w krótkich słowach treść krytyki, wymierzonej przed laty przez Bertranda i Poincarégo przeciwko dotychczasowym definicyom zasadniczym teoryi prawdopodobieństwa, Autor mówi w ten sposób:

„Tak stały rzeczy podówczas, kiedy przygotowywałem materyały do dziełka niniejszego. Miałem więc do wyboru jedno z dwojga: albo przedstawić w tem dziełku stan aktualny Rachunku prawdopodobieństwa z uwzględnieniem wszystkiego, co w tej materyi zdziałano pro i contra, jak to np. uczynił E. Czuber w dziele p. t.: „Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung i t. d.", Lipsk 1902; albo też ograniczyć się do wyłożenia samych tylko zasad, usiłując natomiast zagrożone przez krytykę strony teoryi prawdopodobieństwa tak ugruntować, aby już nie wzbudzały żadnych wątpliwości. Może nad moje siły, ale nie zdołałem oprzeć się pokusie wzięcia za to drugie zadanie.

Owocem kilkunastoletniej pracy w tym właśnie kierunku jest dziełko niniejsze".

W rozdziale I-ym ustanawia autor definicye i reguły prawdopodobieństwa, opierając te reguły na definicyi Bernoulli'ego, że prawdopodobieństwo jest częścią przeciwności.

Po wykładzie reguł prawdopodobieństwa, następuje dopiero klasyczna definicya prawdopodobieństwa, w której znany warunek: „aby przypadki możliwe były oraz jednakowo możliwe", Autor proponuje zastąpić następującym: „aby oznaczenie różnicy pomiędzy sposobem realizowania się tego lub owego przypadku możliwego było już niemożliwe".

Rozdział II-gi poświęcony jest pojęciu nadziei matematycznej i opartemu na niem wyznaczeniu prawdopodobnej wartości niewiadomej za pośrednictwem jej wartości możliwych i przynależnych im prawdopodobieństw oraz wyznaczeniu wartości t. zw. zboczenia średniego.

Digitized by Google

W rozdziale III, poświęconym prawu wielkich liczb, znajdujemy przyczynki oryginalne Autora.

W rozdziale IV-m rozważane jest pojęcie prawdopodobieństwa w związku z pojęciem „przyczyny", umożliwiającej stanie się zdarzenia ewentualnego.

W rozdziale V-m powraca autor do prawa wielkich liczb, rozpatrując je a posteriori, t.j. rozwiązuje zadanie odwrotne zadaniu, rozpatrzonemu w rozd. III.

Wreszcie rozdział VI-ty poświęcony jest szczegółowemu uzasadnieniu teoryi błędów dostrzeżeń, przyczem znana teorya Gaussa wynika jako przypadek szczególny z bardzo ogólnych rozważań Autora.

Na str. 237—240 podana jest tablica wartości całki

$$\theta(t_1) = \frac{2}{\pi}\int_0^{t_1} e^{-t^2}\,dt,$$

mającej ważne i liczne zastosowania w Rachunku prawdopodobieństwa.

Wreszcie na str. 241--265 podana jest, według Czubera literatura Rachunku prawdopodobieństwa, uzupełniona pracami polskiemi i niektóremi obcemi.

Czytelnicy, którzy czytali dawniejsze rozprawy i artykuły Autora, ogłoszone przeważnie w „Pracach matematyczno-fizycz.", „Wiadomościach matematycznych" i „Przeglądzie filozoficznym", znajdą tu z zadowoleniem całokształt pomysłów i badań Gosiewskiego, podany w formie systematycznego wykładu, wprowadzającego do najważniejszych dziedzin teoryi prawdopodobieństwa.

Z publikacyj Towarzystw naukowych i czasopism.

Journal of Meteorological Society of Japan (Tokio, Central Meteorological Observatory). 25-th Year, 1906.

Peryodyczne to czasopismo wychodzi stale w zeszytach miesięcznych, od 1881 r. Każdy numer zawiera kilka krótkich artykułów, noty oraz przegląd pogody za miesiąc ubiegły na terytoryum wysp japońskich.

Oryentowanie się w tem ważnem wydawnictwie peryodycznem jest dla europejczyka utrudnione tą okolicznością, że artykuły są pisane specyalnemi czcionkami w języku japońskim; na szczęście we wszelkich tabelach oraz w rachunkach matematycznych używany jest alfabet łaciński i cyfry arabskie. Zresztą od czasu do czasu pojawiają się prace w języku angielskim, niemieckim i francuskim. Wymienimy kilka bardziej interesujących artykułów z 25-go rocznika (1906 r.). Tytuły prac, ogłoszonych tylko po japońsku, podajemy w polskiem tłómaczeniu:

K. Akai. O wpływach klimatycznych na kulturę ryżu.

H. Mukasa. Das Temperaturverhältniss von Tsimulpo, Korea.

T. Okada. Contribution to the studies of Psychrometr covering. (W tym interesującym artykule autor radzi pokrywać termometr zwilgocony nie muślinem, ale specyalnym rodzajem papieru japońskiego „Yoshinogami").

Digitized by Google

K. Abe. O metodach obserwacyj psychrometrycznych.

T. Ikenouye. O silnem trzęsieniu ziemi w Formozie środkowej w dniu 17 marca 1906 r.

R. Uyeda. O zjawiskach fenu w Kanazawa.

C. Tajima. O zmianach w wartościach wilgotności względnej.

T. Sato. O konstrukcyi map z izobarami dla płaskowzgórz i o ich znaczeniu dla Meteorologii dynamicznej.

C. Kaneko. O peryodyczności w trzęsieniach ziemi.

Rozpatrzone numery sięgają do października 1906 r., dalsze dwa zeszyty nie nadeszły jeszcze do Europy w chwili (styczeń 1907 r.), gdy piszemy tę notatkę.

Na zakończenie nie będzie od rzeczy wspomnieć w kilku słowach o obecnej organizacyi sieci meteorologicznej japońskiej.

W r. 1875 służba meteorologiczna zorganizowana została przy Biurze geograficznem. Po różnych zmianach cały system był zreorganizowany w r. 1887 pod kierownictwem ministeryum spraw wewnętrznych, a ostatecznie ustalony w r. 1892. Obserwatoryum centralne było w tym czasie założone w Tokio; liczne stacye prowincyonalne, komunikujące swe dane Obserwatoryum centralnemu, są także pod kontrolą odpowiednią prefektur. Dyrektorem Obserwatoryum od r. 1891 jest K. Kobayashi. Sieć w r 1898 posiadała 25 stacyj rzędu I, 49 rzędu II i znaczną liczbę stacyj rzędu III, z których niektóre obserwują tylko temperaturę, a niektóre tylko opady. Wreszcie jest 84 stacyj portowych, które prowadzą jedynie spostrzeżenia nad wiatrem.

Dla celów „Weather telegraphy" jest 214 punktów, sygnalizujących dane. Prognozy są wydawane codziennie, a procent udatnych prawdopodobieństw wynosi 82 dla przebiegu pogody i wiatru, a dla sygnalizacyi burz tylko 67.

Przeprowadzono także liczne poszukiwania nad klimatem wysp japońskich. Budżet roczny sieci japońskiej wynosi 7632 funf. szterl, (191000 franków); porto telegraficzne i pocztowe jest bezpłatne. *W. G.*

Rapporto annuale dello I. R. Osservatorio Astronomico Meteorologico di Trieste, contenente le osservazioni meteorologiche di Trieste e di alcune altre stazioni adriatiche. XIX volume (per l'anno 1902). Trieste 1905.

Wydawnictwo to ukazuje się od r. 1884 w postaci roczników i stanowi publikacyę stałą Obserwatoryum morskiego w Tryjeście. Roczniki te podzielone są na dwie części, z których pierwsza podaje (in extenso) wyniki trzech dziennych spostrzeżeń (7^h_a. 2^h_p. 9^h_p) dla 6 do 8 stacyj rzędu II, położonych w różnych punktach, głównie na wybrzeżach Dalmacyi i Istryi. Za r. 1902 w tomie XIX tych roczników ogłoszone są wyniki spostrzeżeń meteorologicznych dla następujących 8 stacyj: Trieste, Pozer, Lissa, Punta d'Ostro, Basovizza, Opeina, Barcola i Servola. Te punkty obserwacyjne leżą między 45°,7 i 42°,4 szer. półn. oraz 13°,7 i 18°,6 długości wschodniej od Greenwich; wzniesienia nad poziom mo-

Digitized by Google

rza nie przenoszą 400 m. Stacye te funkcyonują przy semaforach portowych oraz szkołach morskich. Schemat publikacyj jest ściśle międzynarodowy; narzędzia odpowiadają wzorom, używanym na stacyach sieci wiedeńskiej.

Część druga roczników podaje „Valori orari rilevati dagli apparati registratori dell' I. R. Osservatorio", a mianowicie: wartości godzinne ciśnienia (barograf rtęciowy systemu Sprunga), temperatury (termograf Richarda), kierunki i szybkość wiatru (anemograf Casella i atmometr Wilka), opadów (ombrograf Runga) i wreszcie tablice usłonecznienia według wskazań heliografu Campbella-Stokesa.

Zauważymy, że w dawniejszych rocznikach „Rapporto annuale" podawane były także obserwacye stacyj w Pola oraz w Fiume i okolicach, obecnie ogłaszane w specyalnych wydawnictwach Instytutu hydrograficznego w Pola oraz Akademii morskiej w Fiume.

Przy Obserwatoryum w Tryjeście, zgodnie z jego charakterem jako „Osservatorio maritimo", zorganizowany jest także oddział do sprawdzania chronometrów okrętowych. Do wyznaczania czasu służy osobny pawilon astronomiczny oraz kilka wielkich chronometrów normalnych najnowszych konstrukcyj.

W osobnym pawilonie seismograficznym znajdują się seismografy regestrujące (systemu Vicentini); wreszcie opracowywane są w Obserwatoryum dane mareografu w porcie w Tryjeście, a także wydawane są specyalne roczniki efemeryd na użytek marynarki austro-węgierskiej.

Na użytek głównie okrętowy zorganizowany jest przy Obserwatoryum w Tryjeście oddział synoptyczny, który od r. 1887 wydaje codzienne karty, zawierające bieg izobarów dla terytoryum Europy. Prognozy wydawane są dla dwóch dzielnic: Tryjestu z Istryą i południową Gorycyą oraz dla Dalmacyi.

Dyrektorem obserwatoryum w Tryjeście jest Ed. Mazelle, jego głównym pomocnikiem w dziale meteorologii instrumentalnej jest inż. Ad. Faidiga Służbą chronometryczną zawiaduje dr. F. Bidschof, wreszcie osobny urzędnik zajmuje się odcyfrowywaniem depesz synoptycznych i układaniem map.

KRONIKA.

Akademia Umiejętności w Krakowie. Wydział matematyczno-przyrodniczy. [1])

Posiedzenie dnia 2 kwietnia 1906 r.

Przewodniczący wspomniał o stracie, jaką Wydział poniósł przez śmierć czynnego członka F. Karlińskiego, którego pamięć uczczono przez powstanie i postanowiono zapisać ten fakt w protokóle.

Br. Radziszewski przesyła referat o pracy K. Ciesielskiego p. t. „O kilku pochodnych p-ksylolu".

[1]) Według „Sprawozdań z czynności i posiedzeń Akad. Um. w Krakowie."

Digitized by Google

Br. Radziszewski przesyła referat o pracy T. Nowosielskiego p. t. O kondensacyi piperylu z aldehydem benzoesowym i amoniakiem".

Br. Radziszewski przesyła referat o pracy E. Blumenfelda p. t. „O orto-tolyloetylaminie".

E. Bandrowski referuje o pracy A. Ehrenpreisa p. t. „O działaniu żelazocynku potasowego na sole dwuazonowe".

Wydział matematyczno-przyrodniczy na posiedzeniu ściślejszem zatwierdził wybory W. Dybowskiego, W. Gorczyńskiego i R. Mereckiego na współpracowników Komisyi fizyograficznej.

Posiedzenie dnia 7 maja 1906 r.

L. Marchlewski przedstawia pracę J. Latkowskiego p. t. „O wpływie białka surowicy krwi na punkt marznięcia krwi".

Posiedzenie dnia 11 czerwca 1906 r.

L. Marchlewski przedstawia pracę J. Kozaka p. t. „O niektórych pochodnych arto- i parabutylotoluoli trzeciorzędnych".

N. Cybulski referuje o swojej pracy, wykonanej przy współudziale W. Weissglasa, p t. „O oznaczeniu pojemności nerwów".

Autor wyznacza pojemność nerwów za pomocą aparatu Nernsta do wyznaczania stałej dielektrycznej w rozczynach. Doświadczenia wykazały, że pojemność elektryczna nerwów nie jest właściwością zależną od budowy, lecz powstaje tylko pod wpływem przepływającego prądu i jest zależna od jego natężenia

Posiedzenie dnia 2 i 9 lipca 1906 r.

K. Olszewski referuje o pracy L. Brunera p. t. „Przyczynek do teoryi działania siarkowodoru na sole metali ciężkich".

Autor uzupełnia teoryę, podaną przez W. Ostwalda, opartą na odwracalności działania siarkowodoru na sole i kwasów na siarczki, zwracając uwagę na to, że teorya ta o tyle zgadzać się może z doświadczeniem, o ile szybkość działania w obu reakcyach jest dostatecznie wielka. Powszechnie znaną anomalię stanowi, jak wiadomo, zachowanie się soli niklu i kobaltu. Autor zapomocą doświadczeń nad równowagą między ZnS a kwasem H_2SO_4, oraz doświadczeń nad szybkością reakcyi między H_2S a kwaśnemi solami cynku dowodzi, że nasycanie się roztworu cynku nie zależy zupełnie od przekroczenia rozpuszczalności, lecz jedynie od zwolnienia szybkości reakcyi. Kwaśne, niestrącające się roztwory cynku znajdują się w stanie fałszywej równowagi, a między niklem i kobaltem z jednej a cynkiem z drugiej strony istnieją tylko różnice ilościowe co do długości trwania owych równowag fałszywych.

W. Natanson przedstawia pracę M. Smoluchowskiego p. t. „Zarys teoryi kinetycznej ruchów Browna i roztworów mętnych".

Za pomocą mikroskopu silnie powiększającego można dostrzedz zjawisko, odkryte w 1825 przez botanika Browna, a do dziś dnia uważane za zagadkowe: drobne ciałka, jakiegobądź rodzaju, zawieszone w cieczach, znajdują się w bezustannym ruchu trzęsienia się.

Digitized by Google

Autor pracy niniejszej, na podstawie analizy dotychczasowych badań na tem polu, dochodzi do wniosku, że żaden z proponowanych sposobów tłómaczenia nie da się utrzymać z wyjątkiem tłómaczenia z punktu widzenia teoryi kinetycznej. W dalszym ciągu autor rozwija teoryę matematyczną i dochodzi do wzoru, który całkiem odmienną metodą został wyprowadzony przez Einsteina z rozważań kinetycznych i który zgadza się z faktami doświadczalnemi.

Przemawia to za słusznością zapatrywania, według którego ruch owych cząstek powstaje wskutek nadzwyczajnie drobnych przesunięć we wszystkich kierunkach, spowodowanych ruchem cząsteczkowym cieczy, które, składając się według prawideł prawdopodobieństwa, wywołują z czasem wychylenie widoczne. Zjawisko to możnaby zatem uważać za widoczny dowód teoryj kinetyczno-molekularnych.

Autor dowodzi, że także w gazach takie ruchy muszą się okazać i że do nich częściowo odmienne prawa będą się stosowały, i wskazuje pewne spostrzeżenia Bodaszewskiego i Lehmanna, które może w ten sposób interpretować należy. Z teoryi kinetycznej wynika też, że w takich zawiesinach czyli roztworach mętnych, owe zjawiska ciśnienia osmotycznego, dyfuzyi, obniżenia prężności pary i t. p. muszą występować choć w bardzo drobnym stopniu, które się zwykle uważa za charakterystyczne dla właściwych roztworów, i że niema pod tym względem między niemi zasadniczej różnicy; również pewne zjawiska t. zw. stałości roztworów mętnych można przewidzieć na podstawie teoryi.

J. Morozewicz referuje o pracy Z. Weyberga p. t. „Kryształy klasy bisfenoidu tetragonalnego".

Dotychczas nie znano przykładu kryształów tej klasy, których możliwość teorya jednak przewidywała. Autor, topiąc kaolin w nadmiarze bromku wapniowego (1 : 10), otrzymał drobne kryształki tetragonalne (0·6X0·4 mm) w kombinacyi słupa, dwuścianu podstawowego i bisfenoidu tetragonalnego. Metoda trawienia dowiodła, że kryształki te należą istotnie do klasy bisfenoidu tetragonalnego, t. j. posiadają tylko jedną jedyną oś symetryi dwukrotną.

Posiedzenie dnia 15 października 1906 r.

P. Marchlewski referuje o pracy J. Merunowicza i J. Zaleskiego p. t. „O redukcyi pochodnych barwnika krwi za pomocą Zn i HCl".

Posiedzenie dnia 5 listopada 1906 r.

K. Żorawski referuje o własnej pracy p. t. „O niezmiennikach różniczkowych powierzchni ze względu na grupę liniową i o powierzchniach translacyjnych".

Wiele wywodów z ogólnej teoryi powierzchni, a zwłaszcza przy użyciu parametralnego przedstawienia powierzchni, można scharakteryzować jako rozważania, odnoszące się do rozmaitych kategoryj niezmienników różniczkowych grupy ruchów euklidesowych. Stąd sama przez się nastręcza się myśl badania analogicznych kategoryj niezmienników różniczkowych ze względu na inne grupy przekształceń przestrzeni. W szczególności nie jest pozbawione interesu przeprowadzenie takich wywodów dla grup rzutowych i właśnie w tej pracy zajmuje

Digitized by Google

się autor niezmiennikami różniczkowemi ze względu na grupę liniową, mając zamiar później traktować także pewne inne przedmioty z tego zakresu. Należy zauważyć, że niezmienniki różniczkowe powierzchni, ze względu na grupę rzutową, biorąc za podstawę jedno równanie pomiędzy spółrzędnemi kartezyuszowskiemi, badał A. Tresse (Acta math. 18, str. 69 i nast.) Rzecz jasna, iż stosunek wywodów autora do wywodów Tresse'a jest taki, jak np. stosunek ogólnych rozważań z teoryi powierzchni przy użyciu parametralnego przedstawienia do wzorów krzywiznowych w spółrzędnych Kartezyusza.

Zakończenie pracy niniejszej stanowi zastosowanie rzeczonych niezmienników do powierzchni translacyjnych. W jednej z prac poprzednich (Leipz. Ber. 57, str. 233—245) traktował autor mianowicie zadanie wyznaczenia na powierzchni rodzin krzywych do siebie przystających i równoległych a obecnie przeprowadza te wywody przy użyciu równań, w których figurują niezmienniki grupy liniowej.

K. Olszewski podaje wiadomość tymczasową o swej pracy p. t. „Temperatura inwersyi zjawiska Joule'a-Kelvina w powietrzu i azocie".

Autor, który już w r. 1901 wyznaczył temperaturę inwersyi zjawiska Joule'a-Kelvina w wodzie, rozszerzył obecnie swe badania także i na inne gazy, zwracając szczególną uwagę na zależność temperatury inwersyi od ciśnienia początkowego badanego gazu. Autor ukończył dotychczas odpowiednie doświadczenia z powietrzem i z azotem atmosferycznym i dochodzi na podstawie tychże do następujących wniosków. 1) Temperatura inwersyi w powietrzu jest znacznie niższa od wartości, otrzymanych przez obliczenie za pomocą empirycznego wzoru Rose-Innesa, jakoteż za pomocą formuły van der Waalsa. 2) Wyniki doświadczeń potwierdzają w zupełności przypuszczenia Witkowskiego i Portera, że temperatury inwersyi zjawiska Joule'a-Kelvina w gazach są funkcyą ciśnienia. 3) Zdaje się zachodzić ścisły związek między przebiegiem linii krzywej, wykazującej zależność temperatur inwersyi w powietrzu od ciśnień początkowych, a skraplaniem się go w przyrządzie, polegającym na odwracalnem rozprężeniu.

J. Morozewicz przedstawił pracę własną p. t. „O metodzie oddzielania potasu od sodu w postaci chloroplatynianów".

Autor na podstawie doświadczeń dochodzi do wniosku, że chloroplatynian sodowy należy oddzielać od potasowego w alkoholu 80-procentowym. Używanie do tej reakcyi alkoholu absolutnego nie jest właściwe, albowiem odczynnik ten powoduje częściowy rozkład chloroplatynianu sodowego na nierozpuszczalny w nim chlorek sodowy i rozpuszczalny chlorek platynowy, przez co oznaczanie potasu staje się nieścisłem, bo wyniki stają się za wysokie. W celu sprawdzenia czystości oddzielanego osadu, uciekać się zawsze należy do pomocy mikroskopu z polaryzacyą.

S. Zaremba przedstawia własną pracę p. t. „Funkcya Greena i niektóre zastosowania tej funkcyi".

Digitized by Google

Autor, rozważając równanie o cząstkowych pochodnych:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - m^2 u = 0,$$

gdzie m oznacza liczbę rzeczywistą, oraz obszar płaski (D), którego ograniczenie czyni zadość założeniom bardzo ogólnego charakteru, uzupełnia ogólną teoryę odnośnej funkcyi Greena, uzasadnia istnienie i ciągłość pewnych pochodnych tej funkcyi w sąsiedztwie ograniczenia obszaru (D) i wyznacza górne granice wartości bezwzględnych tych pochodnych. Następnie, oznaczając przez h funkcyę punktu ograniczenia (S) obszaru (D), a przez ds element łuku tego obszaru, autor stosuje uzyskane wyniki do dyskusyi funkcyi u, określonej wzorem następującym:

$$u = \int_{(S)} h \frac{dG}{dN} ds,$$

gdzie $\frac{dG}{dN}$ oznacza pochodną funkcyi Greena w kierunku normalnej do linii (S)

Posiedzenie dnia 3 grudnia 1906 r.

M. Raciborski przesyła referat o pracy B. Niklewskiego p. t. „Przyczynek do znajomości mikrobów utleniających wodór".

Posiedzenie dnia 7 stycznia 1907 r.

L. Marchlewski referuje o pracy swej p. t. „Nowy dowód chemicznego pokrewieństwa barwnika krwi i chlorofilu".

L. Marchlewski referuje o pracy Wincentego Humnickiego p. t. „O kondesacyi acetoguanaminy z aldehydami aromatycznemi".

M. P. Rudzki przedstawia swoją pracę p. t. „O głębokości ogniska trzęsienia ziemi w Kalabryi w dniu 8 września 1905 r."

Korzystając ze wzorów, podanych w jednej ze swych dawniejszych prac, autor oblicza, że ognisko wymienionego w nagłówku trzęsienia ziemi znajdowało się na głębokości 7—11 kilometrów.

Sekretarz zawiadamia, że w dniu 20 listopada 1806 r. odbyło się posiedzenie Komisyi bibliograficznej pod przewodnictwem prof. Władysława Natansona.

Na tem posiedzeniu po wysłuchaniu sprawozdania wybrano na przewodniczącego Wł. Natansona, na przewodniczącego Sekcyi historyi nauk L. Birkenmajera, na sekretarza dra L. Brunera. Wreszcie proponowano na członków Komisyi z miejscowych: dra Seweryna Krzemieniewskiego i dra Lucyana Grabowskiego, z zamiejscowych: dra Władysława Zaborskiego (Wilno), oraz dra F. Giedroycia (Warszawa).

Wł. Natanson referował na grudniowem posiedzeniu pracę Maryana Smoluchowskiego p. t. „Przyczynek do teoryi ruchów cieczy lepkich, a zwłaszcza zagadnień dwuwymiarowych".

W pierwszej części tej pracy autor roztrząsa warunki graniczne, określające w sposób jednoznaczny ruch powolny stateczny cieczy lepkiej. Wiadomo,

Digitized by Google

że według badań Helmholtza, Kortewega i Rayleigha do określenia zagadnień tego rodzaju służyć ma podanie rozkładu prędkości na powierzchni, otaczającej badaną część przestrzeni. Autor czyni jednak uwagę, że sposób ten nie daje się zastosować w razie, jeżeli owa powierzchnia obejmuje przestrzeń nieskończoną; z drugiej strony, że w praktyce doświadczalnej dane są nie prędkości, lecz ciśnienia hydrostatyczne, które, działając na powierzchnię cieczy w zbiornikach (ile możności dużych) powodują ruch określony w przewodzie łączącym. Autor wprowadza w obec tego pojęcie ruchów „skończonych", do których należą wszystkie w praktyce możliwe, i dowodzi, że istotnie do jednoznacznego określenia takiego ruchu „skończonego" wystarcza w ogólności podanie rozkładu ciśnień, działającego w odległości nieskończonej.

W drugiej części autor zajmuje się specyalnie ruchami dwuwymiarowemi, które dotychczas stosunkowo mało były badane. Wyprowadza pewną, dogodną do użytku postać ogólnego rozwiązania takich zagadnień i pokazuje zastosowania jej na kilku przykładach ruchu, odbywającego się w obecności nieskończonej ściany płaskiej, mianowicie: przepływ cieczy lepkiej przez otwór (szparę) w ścianie płaskiej; ruch wzdłuż takiej ściany zaopatrzonej w otwór; oraz dalsze przykłady, z tamtych otrzymane przez specyalizacyę, jak ruch cieczy w blizkości krawędzi matematycznie ostrej, wypływ cieczy do przestrzeni między ścianami, stykającemi się pod kątem ostrym, z źródła znajdującego się w miejscu jej przecięcia. Autor wskazuje także związek otrzymanych wyników z innemi nieco analogicznemi obliczeniami Rayleigha i Sampsona.

Posiedzenie dnia 4 lutego 1907 r.

A. Witkowski referuje o pracy J. Lauba p. t. „O wtórnych promieniach katodowych".

Jeżeli promienie katodowe padają na metal połączony z ziemią, znaczna część zostaje odbita od platyny, np. około 70%. Oprócz tego ciało trafione przez promienie katodowe wysyła wtórne promienie katodowe, których prędkość jest bardzo mała. Mała prędkość promieni wtórnych jest dla wszystkich metali tego samego rzędu. Doświadczenia wskazują wprawdzie, że ilość promieni wtórnych jest zależna od kąta podania i od prędkości promieni pierwotnych, mimo to można wykazać, że zależność ta jest tylko pozorna. Każdy elektron powoduje emisyę tej samej ilości elektronów wtórnych. Energia wtórnych promieni katodowych nie pochodzi od energii promieni pierwotnych; energia promieni wtórnych musi raczej już być zawartą w jakiejkolwiek postaci we wnętrzu atomów.

Na posiedzeniu ściślejszem postanowiono, między innemi, wydrukować projekt słownictwa chemicznego chemii organicznej, wypracowany przez p. Bandrowskiego i rozesłać go chemikom polskim.

Posiedzenie dnia 4 marca 1907 r.

S. Zaremba referuje o własnej pracy p. t. „Równanie biharmonijne i pewien szczególny rodzaj funkcyj harmonijnych zasadniczych".

Do każdego ograniczonego obszaru (D), położonego w przestrzeni lub

Digitized by Google

w płaszczyźnie, można, jak wiadomo, różnemi sposobami dobrać taki ciąg nieskończony

$$V_1, V_2, V_3, \ldots\ldots$$

funkcyj harmonijnych, t. j. funkcyj czyniących zadość w obrębie rozważanego obszaru równaniu Laplace'a, iżby wszelka funkcya harmonijna w obrębie obszaru (D) mogła być przedstawiona przez szereg kształtu następującego:

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k V_k,$$

gdzie $c_0, c_1, c_2, \ldots$ oznaczają spółczynniki stałe, zależne od warunków zadania. Taki ciąg funkcyj harmornijnych autor nazywa ogólnie układem funkcyj harmonijnych zasadniczych i wykazuje, że do każdego obszaru (D) można dobrać taki układ funkcyj zasadniczych, który nadawałby się do rozwiązania w stosunku do obszaru (D) nietylko zagadnienia Dirichleta i zadania hydrodynamicznego, ale jeszcze, ważnego w teoryi sprężystości, zagadnienia następującego: tak wyznaczyć funkcyę v biharmonijną w obrębie obszaru (D) (t. j. czyniącą zadość równaniu rzędu 4-go $\Delta^2 v = 0$, gdzie Δ oznacza laplacyan), żeby pochodna tej funkcyi w kierunku normalnej do ograniczenia obszaru (D) i wartość okrężna samej tej funkcyi równały się odpowiednio danym à priori funkcyom. Następnie, odkładając do innej pracy szczegółowy wykład ogólnej teoryi funkcyi zasadniczych przez siebie wprowadzonych, autor wyznacza rzeczone funkcye w kilku przypadkach szczególnych.

Astroskop[1]). Przyrząd ma służyć do ułatwienia nauki kosmografii i rozpoznawania na niebie tak pojedyńczych gwiazd stałych, jakoteż ich gromad. Składa on się z dwóch głównych części: pierwszą z nich jest glob, wyobrażający w miniaturze kulę niebieską; drugą podstawa, składająca się z dodatków, potrzebnych do ustawienia i kierowania globu tak, iżby każdego dnia i o każdej godzinie obserwator miał przed sobą tę część nieba, która przedstawia się w rzeczywistości. Jest zatem busolka do ustawiania w południku, libelka do poziomowania, łuk do ustawiania globu na szerokość geograficzną, tarczki do ustawiania na dni i godziny, ruchome koło godzinowe (południk), łuk połączony z lunetką do nastawiania na pojedyńcze gwiazdy na niebie i wskazania tychże na globie. Cały przyrząd przedstawia się jako mały, przenośny ekwatoreał, nie wymagający wielkich zachodów przy użyciu, z którem w kilka minut czasu można się zaznajomić. Model astroskopu jest już gotowy, na jego wykonanie w większych rozmiarach będą porobione starania. *Jan Kowalczyk.*

---

[1]) Bardziej szczegółowy opis swego przyrządu ogłosił autor w № 23 „Przeglądu Technicznego" z r. b. (Przyp. Red.)

Digitized by Google

ZADANIE.

podał

A. Łaparewicz.

Dowieść, że w szeregu najmniejszych bezwzględnie reszt q $2q,\ldots,\frac{p-1}{2}q$ według modułu p, gdzie p i q są liczbami pierwszemi nieparzystemi, liczbę reszt ujemnych (μ) otrzymamy jako nadmiar sumy wyrazów o skaźnikach parzystych nad sumą wyrazów o wskaźnikach nieparzystych z pośród szeregu całkowitych części ilorazów p, $2p,\ldots,(q-1)p$ przez $2q$, t. j.

$$\mu = \sum_{i=1}^{i=q-1} (-1)^i E\left(\frac{ip}{2q}\right).$$

W szeregu p, $2p$, $3p,\ldots(q-1)p$ dwa wyrazy równooddalone od jego początku i końca, t. j. ip i $(q-i)p$, których najmniejszemi resztami dodatniemi według mod. $2q$ są r_i i r_{q-i}, dają się wyrazić w sposób następujący:

$$pi = 2qE\left(\frac{ip}{2q}\right) + r_i,$$

$$p(q-i) = 2qE\left(\frac{(q-i)p}{2q}\right) - r_{q-i},$$

a ich suma:

$$pq = 2q\left\{E\left(\frac{ip}{2q}\right) + E\frac{(q-i)p}{2q}\right\} + (r_i + r_{q-i}).$$

Stąd wnosimy, że $r_i + r_{q-i}$ jest nieparzystą wielokrotnością liczby q, zatem $= q$ lub $3q$, przyczem obie te reszty są jednocześnie $<$ lub $> q$. Przekształcając ostatnią równość na:

$$\frac{p-1}{2} = E\left(\frac{ip}{2p}\right) + E\left(\frac{(q-i)p}{2q}\right) + (0 \text{ lub } 1),$$

Digitized by Google

i stosując ją do wszystkich par powyższego szeregu, znajdujemy ostatecznie:

$$\frac{p-1}{2}\,\frac{q-1}{2}=\sum_{i=1}^{i=q-1}E\left(\frac{ip}{2q}\right)+\nu,$$

gdzie ν jest liczbą wskazującą, ile razy przy powyższem sumowaniu powtarza się 1, t. j. w ilu parach powyższych wyrazów otrzymujemy reszty $> q$. Zastosowując więc z każdej pary tylko wyraz o wskaźniku parzystym, powiemy. że liczba ν odpowiada liczbie najmniejszych, większych od q, reszt według mod. $2q$ szeregu wyrazów:

$$2p,\ 4p,\ldots(q-1)\,p,$$

czyli, co wychodzi na to samo, liczbie najmniejszych, większych od $\frac{q}{2}$ reszt według mod. q szeregu wyrazów:

$$p,\ 2p,\ldots\ldots\frac{q-1}{2}\,p,$$

czyli krócej: liczbie reszt ujemnych w tymże szeregu. Oznaczając przez μ liczbę reszt ujemnych w szeregu reszt najmniejszych liczb q, $2q$, $\ldots\frac{p-1}{2}\,q$ według mod. p, mamy według prawa wzajemności:

$$\mu+\nu\equiv\frac{p-1}{2}\,\frac{q-1}{2}\ (\text{mod. } 2)$$

tak, iż jeżeli okażemy, że:

$$\sum_{i=1}^{i=q-1}E\left(\frac{ip}{2q}\right)\equiv\mu\ (\text{mod. } 2),$$

uzyskamy w ten sposób najprostszy dowód prawa wzajemności.

Digitized by Google

KRONIKA. — CHRONIQUE.

Akademia Umiejętności w Krakowie. Wydział matematyczno-przydniczy. Posiedzenia: kwiecień, maj, lipiec, październik, listopad, grudzień 1906 r.; styczeń, luty, marzec 1907 r.
Académie des sciences de Cracovie. Classe des sciences mathématiques et naturelles: avril, mai, juillet, octobre, novembre et décembre 1906; janvier, février et mars 1907. . 202—208
Astroskop J. Kowalczyka.
L'astroscope de M. J. Kowalczyk 208

DODATEK — SUPPLÉMENT.

Sprawozdania z posiedzeń Koła matematyczno-fizycznego w Warszawie, redagowane przez L. Zarzeckiego. Rok 1906/7. 2.
Comptes rendus des séances du Cercle mathématique et physique à Varsovie, rédigés par L. Zarzecki, Année 1906/7. 2.
Posiedzenie d. 17 listopada 1906. Séance du 17 novembre 1906. 25—27
Posiedzenie d. 29 grudnia 1906. Séance du 29 décembre 1906 . 28
Lista członków, Ciąg dalszy. Liste des membres, Suite . . 29
Kwestyonaryusz Koła matem.-fiz. Le questionnaire du Cercle math. et phys. . . . . 30—31
J.1. B. Danielewicz. O wykładzie ilości niewymiernych w szkole średniej.
La théorie des quantités irrationnelles dans l'enseignement secondaire . . . . . 33—38
T.5.6.7. M. Pożaryski. O nauce elektryczności i magnetyzmu w szkołach średnich.
Le chapitre sur l'électricité et le magnétisme dans l'enseignement secondaire . . . . . 39—43
J.2. T. Banachiewicz. Parę uwag o szeregach harmonicznych.
Quelques remarques sur les séries harmoniques . . 44—48

MISCELLANEA.

K.9.b. L. Z. Twierdzenie Poinsota o wielokątach foremnych.
Le théorème de Poinsot sur les polygones réguliers . 49—53
J.12. Z Arl. Zadanie. — Un problème . . . . . 54—56

SPRAWOZDANIA Z LITERATURY. RECENZYE. BIBLIOGRAFIA ANALYSES et BIBLIOGRAPHIE.

A. J. Stodółkiewicz. Wykład Trygonometryi prostokreślnej (G. Zawadzki) . . . . . 57—59
E. Borel. Géométrie. Premier et second cycles (L. Z.) . : 59—61
M. Stuyvaert. Les nombres positifs, Esposé des théories modernes de l'Arithmétique élémentaire (S. D.) . . 61—62
KORESPONDENCYA.— CORRESPONDANCE 63
ZADANIA DO ROZWIĄZANIA.—PROBLÈMES à RÈSOUDRE . . 64

Digitized by Google

DZIEŁA MATEMATYCZNE

WYDANE

z zapomogi Kasy pomocy dla osób pracujących na polu naukowem

im. D-ra Józefa Mianowskiego

do nabycia we wszystkich księgarniach.

A. BIBLIOTEKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNA,

wydawana pod redakcyą

M. A. Baranieckiego i A. Czajewicza.

Serya I tom II i III. Kramsztyk S. Wiadomości początkowe z fizyki Książeczka I, wydanie drugie str. XII. 105, drzeworytów 61. Cena w oprawie kop. 40. Książeczka II, wydanie drugie str. XI. 171, drzeworytów 77. Cena w oprawie kop. 65

Serya I tom IV. Witkowski A. W. Wiadomości początkowe z geografii fizycznej i meteorologii. Warszawa 1884 w 12-ce str. X. 108, drzeworytów 22, litt 4. Cena w oprawie kop. 25.

Serya III tom V. Baraniecki M. A. Początkowy wykład syntetyczny własności przecięć stożkowych, na podstawie ich pokrewieństwa harmonicznego z kołem. Warszawa 1885 w 8-ce str. XVI. 151, drzeworytów 63 Cena kop. 40.

Serya III tom VI. Czajewicz A. Trygonometrya płaska i kulista. Warszawa 1891 w 8-ce str. XX, 389, drzeworytów 86. Cena rb. 2.

Serya III tom VIII. Witkowski August. Zasady fizyki. Tom. I. Warszawa 1892 w 8-ce str. X. 469. Cena rb. 2.

Serya IV tom II Sochocki J. Rozwiązywanie równań liczebnych. Warszawa 1884 w 8-ce lex. str. XII, 212. Cena kop. 60.

Serya IV tom IV. Zajączkowski Wł. Geometrya analityczna. Warszawa 1884 w 8-ce lex. str. XL. 411, drzeworytów 85. Cena rb. 1.

Serya IV tom X. Franke J. N. Mechanika teoretyczna. Warszawa 1889 w 8-ce str. XXXI. 645, drzeworytów 72. Cena rb. 3.

B. BIBLIOTEKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNA,

wydawana przez

A. Czajewicza i S. Dicksteina.

I. Badowski I. Geometrya elementarna. Warszawa 1894. LVIII. 338 drzeworytów w tekście IX. 344. Cena rb. 1 kop. 35.

II. Baraniecki M. A. Arytmetyka, wykład szczegółowy, wydanie drugie znacznie zmienione. Warszawa 1894, str. LXIV. 408. Cena rb. 1.35.

III. Danielewicz A. B. Podstawy matematyczne ubezpieczeń życiowych. Warszawa 1896, str. 335. Tablic X. Cena rb. 2.

IV. Witkowski August. Zasady Fizyki. Tom II zeszyt pierwszy. Warszawa 1897 w 8-ce str. 301. Cena rb. 1 kop. 35.

V. Kowalczyk J. O sposobach obliczania przeszkód biegu ciał niebieskich. Warszawa 1901, str. 624. Tablic III. Cena rb. 7 kop. 50.

VI. Schur F. Podręcznik geometryi analitycznej, przekład z niemieckiego przez T. Łopuszańskiego. Warszawa 1901, str. 249 z licznemi rysunkami w tekście. Cena rb. 1.

VII. Feldblum M. Geometrya wykreślna. Warszawa. 1902. str. XVI, 325 z 172 rysunkami w tekście. Cena rb. 2.

VIII. Danielewicz A. B. Metoda najmniejszych kwadratów. Warszawa 1904, str. XII, str. XII, 186. Tablic IV. Cena rb. 1 kop. 20. (T. II w druku)

IX. Witkowski August. Zasady Fizyki. Tom II, zeszyt drugi. Warszawa 1904. Cena rb. 1 kop. 35.

X. Folkierski Wł. Zasady Rachunku różniczkowego całkowego. Wydanie II. Tom I. Warszawa 1904. Cena rb. 2 kop 40.

XI. Witkowski August. Zasady Fizyki. Tom I, wydanie drugie. Warszawa 1904. Cena rb. 2.

XII. Merczyng K. Teorya prądu elektrycznego. Warszawa 1905, 8-o, str. 92. Cena 75 kop.

XIII. Gosiewski Wł. Zasady rachunku prawdopodobieństwa. Warszawa, 1906, 8-o, str. 265 Cena rubli 2.

XIV. Jędrzejewicz J. Kosmografia. Wydanie drugie, opracowane przez M. Ernsta. Warszawa, 1907, 8-o, str. 152, figur 246 i tablic 11. Cena rubli 3.

Digitized by Google

Sci 923.

WIADOMOŚCI

MATEMATYCZNE.

Redaktor i Wydawca

S. DICKSTEIN.

TOM XI.

Zeszyt 5 — 6.

WARSZAWA.

Druk Józefa Sikorskiego, Warecka Nr. 14.

1907.

Digitized by Google

Treść Zeszytu.

H11b. W. Sierpiński. Wzór analityczny na pewną funkcyę liczbową.
Une formule analytique pour une fonction numérique 225—231

T7. M, Wolfke. Elektron uważany jako środek ciśnień w eterze.
L'electron considéré comme un centre des pressions dans l'éther . . . . . 234—246

I 2b. A. Łaparewicz. Cecha podzielności Lucasa.
Le caractère de divisibilité donné par Lucas . . 247—256

I 2b. A. Łaparewicz. Gaston Tarry. Tablettes des cotes relatives à la base 20580 des facteurs premiers etc. . . 257—283

V10. Wł. Gorczyński. Wiadomość o sieci meteorologicznej serbskiej i o obserwatoryum w Belgradzie.
Notice sur le réseau météorologique de la servie et sur l'Observatoire de Belgrade . . . . . 265—269

Przegląd literatury. Bibliografia
(Analyses et Comptes rendus. Bibliographie). 271—278

KRONIKA. — CHRONIQUE.

X-ty Zjazd przyrodników i lekarzy polskich we Lwowie . . 278—285
Zapisy na cele naukowe . . . . . 285—287

DODATEK — SUPPLÉMENT.

Sprawozdania z posiedzeń Koła matematyczno-fizycznego w Warszawie. Rok 1906/7. 3.

Comptes rendus des séances du Cercle mathématique et physique à Varsovie, Année 1906/7. 3.

Posiedzenie d. 26 stycznia 1907 r. Séance du 26 janvier 1907.
„ „ 23 lutego „ „ „ 23 février „
„ „ 23 marca „ „ „ 23 mars „
„ „ 27 kwietnia „ „ „ 27 avril „
„ „ 25 maja „ „ „ 25 mai „
„ „ 15 czerwca „ „ „ 15 juin „

V910. M. Halpern. Stanisław Kramsztyk. (Wspomnienie pośmiertne.—Notice nécrologique) . . . . 73 — 80

Va7. Z. Czubalski. (A. Laisant. „L'initiation mathématique) . 81 — 86

Dalszy ciąg na stronicy 3-ej.

Digitized by Google

W. SIERPIŃSKI.

Wzór analityczny na pewną funkcyę liczbową.

Celem niniejszego artykułu jest dowód następującego twierdzenia:

Funkcya liczbowa $\tau_r(n)$, wyrażająca liczbę rozkładów liczby całkowitej, nie ujemnej n na sumę kwadratów r liczb całkowitych, rozwija się na szereg:

$$\tau_r(n) = \frac{(2r)^n}{n!}\left[a_0(n) + \frac{a_1(n)}{r} + \frac{a_2(n)}{r^2} + \ldots\ldots\right]$$

gdzie $a_i(n)$ oznacza wielomian całkowity względem n, stopnia $2i$, o spółczynnikach wymiernych, liczbowych (dla $i=0, 1, 2, \ldots\ldots$).

Oznaczmy przez $b_i(x)$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$ wielomiany całkowite względem x, określone w następujący sposób:

$$b_0(x) = 1,$$

zaś dla $p=1, 2, 3, \ldots\ldots$:

$$(1)\quad b_p(x) = -\sum_{k=2}^{p+1}\frac{1}{k!}\,W_{p+1-k}(x) + 2\sum_{k=2}^{E\sqrt{p+1}}\frac{1}{2^{k^2}}\,W_{p+1-k^2}(x-k^2) + c_p,$$

gdzie $W_m(x)$ jest wielomianem całkowitym względem x, spełniającym równania:

Digitized by Google

(2) $W_m(x) - W_m(x-1) = b_m(x)$[1]; $W_m(0)=0$, dla $m=0,1,2,\ldots$,

zaś c_p oznacza stałą, tak wyznaczoną, iżby było:

(3) $$\tau_1(p) = 2^p \left[b_p(p) + \frac{1}{1!} b_{p-1}(p) + \ldots + \frac{1}{p!} b_0(p) \right].$$ [2]

Powyższe warunki wyznaczają w zupełności wielomiany $b_i(x)$ $(i=0,1,2,\ldots)$; drogą indukcyi matematycznej moglibyśmy nadto z łatwością udowodnić, że $b_i(x)$ jest wielomianem stopnia i o spółczynnikach wymiernych. Wzory (1), (2), (3) mogą też służyć do kolejnego obliczania uważanych wielomianów.

Zakładając np. $p=1$, ze wzoru (1) znajdziemy:

$$b_1(x) = -\tfrac{1}{2} W_0(x) + c_1;$$

równania (2) dają na $W_0(x)$ warunki:

$$W_0(x) - W_0(x-1) = 1, \quad W_0(0) = 0,$$

skąd:

$$W_0(x) = x,$$

i przeto:

$$b_1(x) = -\frac{x}{2} + c_1.$$

Stałą c_1 powinniśmy tak wyznaczyć, iżby było:

$$\tau_1(1) = 2[b_1(1) + b_0(1)],$$

czyli:

$$2 = 2[-\tfrac{1}{2} + c_1 + 1],$$

skąd:

$$c_1 = \tfrac{1}{2} \quad \text{i przeto} \quad b_1(x) = -\frac{x-1}{2}.$$

---

[1]) Równanie to wskazuje, że stopień wielomianu $W_m(x)$ jest o jednośc wyższy od stopnia wielomianu $b_m(x)$.

[2]) Przez $\tau_1(0)$ należy rozumieć 1, zaś dla $p>0$: $\tau_1(p) = 2(E\sqrt{p} - E\sqrt{p-1})$

Digitized by Google

Kładąc $p=2$ będziemy, na mocy (1), mieli:

$$b_2(x) = -\frac{1}{2} W_1(x) - \frac{1}{6} W_0(x) + c_2;$$

lecz $W_0(x)=x$, zaś na $W_1(x)$ mamy warunki:

$$W_1(x) - W_1(x-1) = -\frac{x-1}{2}; \quad W_1(0)=0,$$

skąd, kładąc $W_1(x)=\alpha x^2+\beta x$, otrzymalibyśmy $\alpha=-\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{1}{4}$, przeto $W_1(x) = -\frac{x(x-1)}{4}$, oraz:

$$b_2(x) = \frac{x(x-1)}{8} - \frac{x}{6} + c_2.$$

Stałą c_2 musimy wyznaczyć tak, iżby było:

$$\tau_1(2) = 2^2[b_2(2) + b_1(2) + \tfrac{1}{2} b_0(2)],$$

czyli:

$$0 = 2^2\left[-\frac{1}{12} + c_2\right], \quad \text{skąd } c_2 = \frac{1}{12},$$

przeto:

$$b_2(x) = \frac{x(x-1)}{8} - \frac{x}{6} + \frac{1}{12} = \frac{(x-2)(3x-1)}{24} \text{ i t. d.}$$

Załóżmy dalej:

$$a_0(x) = 1, \tag{4}$$

oraz

$$a_i(x) = x(x-1)\ldots\ldots(x-i+1)b_i(x). \qquad (i=1,2,3,\ldots)$$

Z łatwością widzimy, iż $a_i(x)$ $(i=0,1,2,\ldots)$ jest wielomianem całkowitym stopnia $2i$ o spółczynnikach wymiernych.

Oznaczmy:

$$f_r(n) = \frac{(2r)^n}{n!}\left[a_0(n) + \frac{a_1(n)}{r} + \frac{a_2(n)}{r^2} + \ldots\ldots\right]. \tag{5}$$

Ponieważ, na mocy wzoru (4), przy wszelkiem całkowitem $n \geqslant 0$ dla $i > n$ mamy stale:

$$a_i(n) = 0,$$

Digitized by Google

przeto szereg $f_r(n)$ przy wszelkiem całkowitem, nieujemnem n będzie napewno zbieżny i możemy napisać:

$$(6) \qquad f_r(n) = \frac{2^n}{n!} \sum_{i=0}^{n} a_i(n) r^{n-i}.$$

Kładąc w tym wzorze $r = 1$ i biorąc pod uwagę, iż na mocy (4):

$$a_i(n) = \frac{n!}{(n-i)!} b_i(n), \qquad (\text{dla } i = 0, 1, \ldots n)^{1)}$$

znajdziemy:

$$f_1(n) = 2^n \sum_{i=0}^{n} \frac{b_i(n)}{(n-i)!},$$

co, przez porównanie ze wzorem (3), daje:

$$(7) \qquad f_1(n) = \tau_1(n)$$

przy wszelkiem całkowitem, nieujemnem n.

Załóżmy, że mamy:

$$(8) \qquad f_r(n) = \tau_r(n);$$

okażemy, że będziemy mieli:

$$f_{r+1}(n) = \tau_{r+1}(n).$$

W tym celu zauważmy, że:

$$\tau_{r+1}(n) = \tau_r(n) + 2 \sum_{k=1}^{E\sqrt{n}} \tau_r(n-k^2),$$

a więc, na mocy (8):

$$\tau_{r+1}(n) = f_r(n) + 2 \sum_{k=1}^{E\sqrt{n}} f_r(n-k^2).$$

Prawa strona napisanej równości jest, na mocy (6), sumą wielomianów całkowitych względem r; po łatwej redukcyi, otrzymamy:

$$(9) \qquad \tau_{r+1}(n) = 2^n \sum_{i=0}^{n} K_i(n) \frac{r^{n-i}}{(n-i)!},$$

---

1) Przez 0! należy rozumieć jedność.

Digitized by Google

gdzie:

$$K_i(n) = b_i(n) + 2\sum_{k=1}^{E\sqrt{i}} b_{i-k^2}(n-k^2).$$

Z drugiej strony, kładąc we wzorze (6) $r+1$ zamiast r, i porządkując podług malejących potęg liczby r, otrzymamy:

$$f_{r+1}(n) = 2^n \sum_{i=0}^{n} L_i(n) \frac{r^{n-i}}{(n-i)!}, \tag{10}$$

gdzie:

$$L_i(n) = \sum_{k=0}^{i} \frac{b_{i-k}(n)}{k!}.$$

Powiadamy, że przy wszelkiem całkowitem nieujemnem n oraz wszelkiem całkowitem, nieujemnem $i \leqslant n$:

$$L_i(n) = K_i(n).$$

Załóżmy najprzód, że $i > 1$ i obliczmy różnicę:

$$b_{i-1}(n) - b_{i-1}(n-1),$$

na mocy wzoru (1), Biorąc pod uwagę wzór (2), otrzymamy z łatwością:

$$b_{i-1}(n) - b_{i-1}(n-1) = -\sum_{k=2}^{i} \frac{1}{k!} b_{i-k}(n) + 2\sum_{k=2}^{E\sqrt{i}} \frac{1}{2^{k^2}} b_{i-k^2}(n-k^2),$$

albo:

$$\sum_{k=0}^{i} \frac{1}{k!} b_{i-k}(n) = b_i(n) + 2\sum_{k=1}^{E\sqrt{i}} \frac{1}{2^{k^2}} b_{i-k^2}(n-k^2),$$

czyli:

$$L_i(n) = K_i(n), \quad \text{dla} \quad i > 1.$$

Lecz dla $i=0$ mamy:

$$K_0(n) = b_0(n), \quad \text{oraz} \quad L_0(n) = b_0(n),$$

więc:

$$L_0(n) = K_0(n),$$

Digitized by Google

zaś dla $i = 1$:

$$K_1(n) = b_1(n) + b_0(n-1), \quad L_1(n) = b_1(n) + b_0(n),$$

przeto, ponieważ $b_0(n) = b_0(n-1)$:

$$L_1(n) = K_1(n).$$

Równość:

$$L_i(n) = K_i(n),$$

zachodzi więc przy wszelkiem całkowitem, nie ujemnem $i \leqslant n$, c. b. d. o.

Mamy więc, na mocy (9) i (10):

$$\tau_{r+1}(n) = f_{r+1}(n).$$

Jeżeli zatem równość $\tau_r(n) = f_r(n)$ zachodzi dla pewnego (naturalnie całkowitego, dodatniego) r, to zachodzić będzie i dla r o jedność większego, a że, na mocy wzoru (7) zachodzi dla $r = 1$, przeto zachodzić musi całkiem ogólnie, t. j. na mocy wzoru (5):

$$(11) \qquad \tau_r(n) = \frac{(2r)^n}{n!}\left[a_0(n) + \frac{a_0(n)}{r} + \frac{a_2(n)}{r^2} + \ldots\ldots\right],$$

przy wszelkiem całkowitem, dodatniem r, oraz wszelkiem całkowitem, nieujemnem n.

Oto wyrażenie na kilka pierwszych spółczynników wypisanego rozwinięcia:

$$a_0(n) = 1,$$

$$a_1(n) = -\frac{n(n-1)}{2},$$

$$a_2(n) = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-1)}{24},$$

$$a_3(n) = -\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^2(n+2)}{48}$$

Digitized by Google

Rozwinięcie tego samego kształtu co (11) daje funkcya liczbowa:

$$\varphi_r(n) = \tau_r(0) + \tau_r(1) + \ldots\ldots + \tau_r(n),$$

wyrażająca liczbę wszystkich całkowitych rozwiązań nierówności:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots x_r^2 \leqslant n.$$

Mamy mianowicie:

$$\varphi_r(n) = \frac{(2r)^n}{n!}\left[A_0(n) + \frac{A_1(n)}{r} + \frac{A_2(n)}{r^2} + \ldots\ldots\right],$$

gdzie:

$$A_0(n) = 1,$$

$$A_1(n) = -\frac{n(n-2)}{2},$$

$$A_2(n) = \frac{n(n-1)(3n^2-13n+20)}{24},$$

i t. d., ogólnie:

$$A_i(n) = a_i(n) + \frac{n}{2} A_{i-1}(n-1).$$

Getynga, d. 24. VI 1907.

Digitized by Google

Digitized by Google

MIECZYSŁAW WOLFKE.

Elektron uważany jako środek ciśnień w eterze.[1]

I. Wstęp. Definicyę elektronu i rozwinięcie jej analityczne musimy poprzedzić ogólnem rozważaniem nad „polem energetycznem“, które jest pojęciem zupełnie nowem i służy za podstawę tej pracy.

Wyobraźmy sobie dwa ciała, znajdujące się w przestrzeni w pewnej odległości i wywierające na siebie wpływ wzajemny: przyciągając się, odpychając lub też dążąc do pewnego położenia jedno względem drugiego. Odrzuciwszy hypotezę działania na odległość, z nowożytnemi poglądami niezgodną, musimy przyjąć za przyczynę zjawiska wpływ ośrodka, wypełniającego przestrzeń, a tem samem badać zjawiska podobne, jako rezultaty odpowiednich odkształceń w tym ośrodku.

Układ takich ciał, związanych ze sobą pewnemi siłami, posiada określoną energię wewnętrzną, która, na zasadzie powyższego założenia, będzie rezultatem przekształceń ośrodka. Ponieważ układ posiada funkcyę sił, ilość energii wewnętrznej takiego układu ciał będzie energią potencyalną, t. j. zależną jedynie od względnych położeń ciał rozważanych. Te to proste rozważania doprowadziły nas do pojęcia pola energetycznego.

Niechaj będzie ośrodek izotropowy, wypełniający w sposób jednolity przestrzeń bez granic i mogący ulegać przekształceniom.

---

[1]) Praca, drukowana po raz pierwszy w „Eclairage éléctrique“ 20 kwietnia 1907 r. Paryż.

Digitized by Google

Dane odkształcenie w pewnym punkcie ośrodka może być wyrażone odpowiednim wektorem, którego natężenie i kierunek będą odpowiadały natężeniu i kierunkowi odkształcenia ośrodka w tym punkcie przestrzeni. Otóż pewne rozmieszczenie odkształcenia ośrodka w przestrzeni, lub to, co nazywamy „polem odkształcenia", będzie się wyrażało przez odnośne pole wektoryalne. Zakładając, że każde odkształcenie wymaga odpowiedniej pracy, wnioskujemy, że każdemu polu odkształcenia odpowiada określone rozmieszczenie energii w różnych punktach ośrodka. Takie to rozmieszczenie energii w polu odkształcenia nazywamy „polem energetycznem".

Ilość energii, zawarta w jednostce przestrzeni jednorodnego pola energetycznego, nie może być zależna od położenia pola odkształcenia w danym obszarze przestrzeni, a to dzięki izotropowości ośrodka, a jest jedynie zależna od natężenia tego pola w rozważanym obszarze. Funkcyę, która wyraża zależność między ilością energii w danym obszarze pola energetycznego a natężeniem jego pola odkształcenia, nazywamy „funkcyą charakterystyczną" danego pola.

Wyobraźmy sobie pewne pole energetyczne, odniesione do układu osi względnych, stałe w stosunku do tych osi, lecz mogące swobodnie przesuwać się w przestrzeni wraz ze swym układem osi względnych. Takie pole energetyczne nazywamy „polem elementarnem". Jeżeli w przestrzeni znajduje się kilka pól elementarnych, to wytworzą one pole wypadkowe w ten sposób, że wektor pola odkształcenia wypadkowego będzie sumą wektorów pól elementarnych w danym punkcie, ilość zaś energii pola wypadkowego w danym punkcie przestrzeni wyrazi się przez funkcyę charakterystyczną natężenia pola odkształcenia wypadkowego. Widoczna zatem, że suma całkowitej energii pola energetycznego, w ten sposób wytworzonego, będzie zależna od wzajemnych położeń pól elementarnych jednych względem drugich, a to z powodu, że ilość energii tego pola w danym punkcie przestrzeni będzie zależna od sumy geometrycznej pól elementarnych odkształcenia.

Jeżeli zatem wyobrazimy sobie pewne nieskończenie małe przesunięcie ds jakiegoś punktu jednego z pól elementarnych, przyczem przyrost całkowitej energii pola wypadkowego niechaj

Digitized by Google

będzie dE, to na zasadzie prawa zachowania energii będziemy mogli powiedzieć, że wzdłuż danego przesunięcia została wykonana pewna praca $d\mathfrak{T}$, którą określi następujące równanie:

$$d\mathfrak{T} = -de.$$

Ponieważ pojęcie pracy jest ściśle związane z pojęciem siły, możemy przypuścić, że przez dany punkt pola elementarnego przechodzi siła, której składowa F_s wzdłuż przesunięcia wyrazi się przez następujące równanie:

$$(1) \qquad \frac{d\mathfrak{T}}{ds} = -\frac{de}{ds};$$

składowa ta jest zatem ilościowo równa pochodnej całkowitej ilości energii pola wypadkowego, wziętej wzdłuż przesunięcia i ze znakiem przeciwnym.

Ponieważ pochodna $\frac{de}{ds}$ może być określona dla każdego punktu jednego z pól elementarnych i to we wszystkich punktach przestrzeni jako funkcya parametrów bezwzględnych, więc pola te mogą być rozważane pod względem statycznym, jako ciała stałe niezmienne, związane układem sił, posiadających funkcye sił.

Widzimy zatem, że wszelkie pozorne działanie na odległość może być rozważane jako odpowiednie nałożenie na siebie pewnych pól elementarnych.

II. Definicya. Obecnie postaramy się dać definicyę atomu elektrycznego czyli elektronu, opartą na poprzedzających rozważaniach, a to raczej w celu konkretnej ilustracyi naszego pojęcia ogólnego pola energetycznego, aniżeli utworzenia podstawy dla jakiejś nowej teoryi zjawisk elektrycznych, która odpowiedzieć by mogła wszystkim wymaganiom obecnego stanu tej gałęzi wiedzy.

Zakładając istnienie ośrodka izotropowego, przypuszczamy, że odkształcenie, polegające na odchyleniu pewnych punktów tego ośrodka od ich normalnego stanu równowagi, wytwarza pracę,

Digitized by Google

określoną przez działanie siły przeciwnej odchyleniu. Przyjmujemy zasadę tę samą, którą się przyjmuje w teoryi dźwięku i w teoryi drgań świetlnych, t. j. że siła ta, dążąca do sprowadzenia punktów odchylenia ośrodka do ich normalnego stanu równowagi jest proporcyonalna do wielkości odchylenia i do objętości wszystkich elementów odchylonych.

Dajmy nato, że mamy w danym punkcie ośrodka: f—siłę, odpowiadającą danemu odchyleniu δ, i k—stałą, wyrażającą proporcyonalność między siłą a odchyleniem. Według przyjętej zasady, będzie:

$$f = k \,.\, \delta; \quad \delta = \frac{1}{k} \,.\, f. \tag{2}$$

W elemencie $d\tau$ pola sił ciągłego, o natężeniu H, ilość energii wyrazi się równaniem następującem:

$$de = h \,.\, d\tau \int_0^{\delta} H d\delta = \frac{kh}{2} \delta^2 \,.\, d\tau = \frac{h}{2k} \,.\, H^2 . d\tau, \tag{3}$$

gdzie h jest stała, wyrażająca proporcyonalność między ilością energii a objętością pola. Widzimy, że równanie (3) daje nam ilość energii z jednej strony w zależności od odchylenia δ, a z drugiej strony w zależności od natężenia pola sił H. Całkowitą ilość energii danego pola otrzyma się drogą całkowania:

$$e = \frac{k \,.\, h}{2} \iiint \delta \,.\, d\tau = \frac{h}{2k} \iiint H^2 . d\tau \,.$$

Przejdźmy do samej definicyi naszego elektronu.

Elektron jest to środek ciśnień w eterze o przepływie stałym, to znaczy, że przepływ sił ciśnień jest stały poprzez jakąkolwiek powierzchnię zamkniętą na około środka. Następnie zakładamy, że elektron dodatni jest środkiem ciśnień odśrodkowych, a elektron ujemny środkiem ciśnień dośrodkowych.

Obliczmy ilość całkowitą energii jednego elektronu. Niechaj przypływ całkowity będzie Φ; natężenie pola sił dla punktu, znaj-

Digitized by Google

dującego się od środka w odległości R, jak również i odchylenie, wyrażą się przez następujące równania:

$$(4) \qquad H = \frac{\Phi}{4\pi R^2}; \qquad \delta = \frac{1}{k} \cdot \frac{\Phi}{4\pi R^2},$$

w przyjęciu, że elektron jest idealnie symetryczny.

Ilość energii w elemencie przestrzeni pola wyrazi się na za sadzie (3) przez następujące równanie:

$$(4\text{bis}) \qquad de = \frac{h}{2k} \cdot \frac{\Phi^2}{16\pi^2 R^4} \cdot d\tau .$$

Zakładając dla granicy niższej całkowania energii elektronu dodatniego wielkość r_1, a dla elektronu ujemnego r_2, gdzie r_1 i r_2 są promieniami kul centralnych, otrzymamy ilości energii pól e_1—elektronu dodatniego, a e_2—elektronu ujemnego:

$$(5) \qquad \begin{cases} e_1 = \dfrac{h}{2k} \cdot \dfrac{\Phi^2}{16\pi^2} \displaystyle\int_{r_1}^{\infty} \frac{1}{R^4} \cdot 4\pi R^2 . dR = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{h}{k . r_1} \cdot \Phi^2, \\[2ex] e_2 = \dfrac{h}{2k} \cdot \dfrac{\Phi^2}{16\pi^2} \displaystyle\int_{r_2}^{\infty} \frac{1}{R^4} \cdot 4\pi R^2 . dR = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{h}{k . r_2} \cdot \Phi^2, \end{cases}$$

gdyż dla elementu przestrzeni $d\tau$ mamy w tym przypadku proste wyrażenie następujące:

$$d\tau = 4\pi R^2 dR.$$

Dla obydwóch elektronów zakładamy jednę i tę samą wielkość Φ, gdyż, jak później zobaczymy, Φ przedstawia ładunek elektronu, który, jak wiadomo, jest ten sam dla obydwóch elektronów.

III. Odpychanie. Rozważmy dwa elektrony jednakowego znaku, np. obydwa dodatnie i znajdujące się w pewnej od siebie odległości. Niechaj to będą elektrony A i B (fig. 1). Jako zmienne, określające dany punkt przestrzeni M, przyjmiemy: odległość $AM = R$; kąt, jaki tworzy linia AM z linią AB, t. j. $\angle MAB = \omega$.

Digitized by Google

i kąt dwuścienny, utworzony przez płaszczyznę, zawierającą punkt M i linię AB z pewną płaszczyzną stałą, przechodzącą przez linię AB; oznaczmy kąt ten przez η.

Widoczne jest, że pole wypadkowe będzie miało dwa elementy symetryi: oś AB i płaszczyznę PQ, prostopadłą do osi AB i przechodzącą przez jej środek. Niechaj odległość AB między

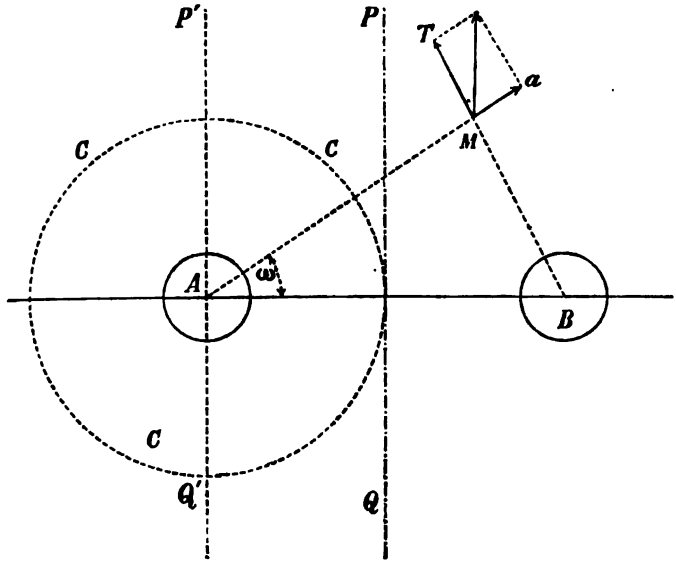


Fig. 1.

elektronami będzie s. Na zasadzie równania (4) będziemy mieli następujące wyrażenia na pola sił każdego elektronu H_A i H_B:

$$H_A = \frac{\Phi}{4\pi R^2}; \quad H_B = \frac{\Phi}{4\pi \overline{BM}^2} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^2 - 2Rs\cos\omega + s^2},$$

gdzie BM jest bokiem trójkąta AMB. Jeżeli oznaczymy kąt AMB przez α, tedy pole wypadkowe sił H dwóch tych elektronów wyrazi się w zależności od pól H_A i B_B następującem równaniem:

$$H^2 = H_A^2 + H_B^2 + 2_A . H_B . \cos\alpha. \tag{6}$$

Digitized by Google

Z trójkąta AMB otrzymamy wartość na a:

$$2\cos a = 2 . \frac{R - s\cos\omega}{\sqrt{R^2 - 2Rs\cos\omega + s^2}},$$

skąd ostatecznie znajdujemy natężenie pola sił wypadkowego dwóch elektronów w funkcyi powyższych zmiennych:

$$H^2 = \frac{\Phi^2}{16\pi^2}\left[\frac{1}{R^4} + \frac{1}{(R^2 - 2Rs\cos\omega + s^2)^2} + 2 . \frac{R - s\cos\omega}{R^2(R^2 - 2Rs\cos\omega + s^2)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Na zasadzie równania (4bis) znajdujemy obecnie ilość energii w elemencie $d\tau$ pola wypadkowego dwóch elektronów jednego znaku:

$$de = \frac{h}{2k} \cdot \frac{\Phi^2}{16\pi^2}\left[\frac{1}{R^2} + \frac{1}{(R^2 - 2Rs\cos\omega + s^2)^2} + 2 . \frac{R - s\cos\omega}{R^2(R^2 - 2Rs\cos\omega + s^2)^{\frac{3}{2}}}\right] . d\tau.$$

W przyjętym układzie zmiennych element przestrzeni wyrazi się równaniem:

$$d\tau = R^2 \sin\omega \, dR \, d\omega \, d\eta,$$

tak, że ostatecznie ilości energii pola wypadkowego dwóch elektronów jednakowych wyrazi się wzorem następującym:

$$e = \frac{h}{2k} \cdot \frac{\Phi^2}{16\pi^2}\left[\iiint \frac{\sin\omega}{R^2} \, dR d\omega d\eta + \iiint \frac{R^2 \sin\omega}{(R^2 - 2Rs\cos\omega + s^2)^2} \, dR \, d\omega \, d\eta \right.$$

$$\left. + \iiint \frac{(2R - 2s\cos\omega)\sin\omega}{(R^2 - 2Rs\cos\omega + s^2)^{\frac{3}{2}}} \, dR \, d\omega \, d\eta \right]. \tag{7}$$

Całkując odrazu wyrażenie (7) względem zmiennej η w granicach od 0 do 2π, otrzymujemy:

$$e = \frac{h}{2k} \cdot \frac{\Phi^2}{8\pi}\left[\iint \frac{\sin\omega}{R^2} \, dR\omega + \iint \frac{R^2 \sin\omega}{(R^2 - 2Rs\cos\omega + s^2)^2} \, dR \, d\omega \right.$$

$$\left. + \iint \frac{(2R - 2s\cos\omega)\sin\omega}{(R^2 - 2Rs\cos\omega + s^2)^{\frac{3}{2}}} \, dR \, d\omega \right]. \tag{8}$$

Digitized by Google

Zanim zajmiemy się obliczeniem całek (8), zauważymy, że pole wypadkowe jest symetryczne względem płaszczyzny PQ, i dla tego możemy całkować tylko w obszarze lewym przestrzeni względem błaszczyzny PQ, a następnie pomnożyć otrzymany rezultat przez 2, co nam da w ten sposób całkę rozciągniętą na całą przestrzeń.

Pierwszą całkę wyrażenia (8) będziemy całkowali przedewszystkiem wewnątrz kuli CCC (fig. 1), opisanej ze środka A promieniem $\frac{s}{2}$, czyli w granicach dla ω od 0 do π, a dla R od r_1 do $\frac{s}{2}$. Daje nam to:

$$\text{(a)} \qquad \iint \frac{\sin\omega}{R^2}\, dR d\omega = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{2}{s}\right) . \int \sin\omega\, d\omega = \frac{2}{r_1} - \frac{4}{s}$$

Następnie całkując ją nazewnątrz kuli CCC w lewym obszarze przestrzeni, t. j. w granicach dla ω: od arc $\left(\cos\frac{s}{2R}\right)$ do π, a dla R od $\frac{s}{2}$ do ∞; znajdujemy:

$$\text{(b)} \qquad \iint \frac{\sin\omega}{R^2}\, dR\, d\omega = \int \left(\frac{1}{R^2} + \frac{s}{2R^3}\right) dR = \frac{3}{s}\,.$$

Dodając całki (a) i b) i mnożąc sumę przez 2, otrzymujemy pierwszą całkę wyrażenia (7), rozciągniętą na całą przestrzeń:

$$\text{(9)} \qquad \iint \frac{\sin\omega}{R^2}\, dR\, d\omega = \frac{4}{r_1} - \frac{2}{s}\,.$$

Obliczając następną całkę wewnętrzną kuli CCC, otrzymujemy:

$$\iint \frac{R^2 \sin\omega}{(R^2 - 2Rs\cos\omega + s^2)^2}\, dR\, d\omega = -\frac{1}{2s}\left[\int \frac{R}{(s+R)^2}\, dR - \int \frac{R}{(s-R)^2}\, dR\right]$$

$$\text{(a')} \qquad = \frac{1}{s}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\log 9\right) - \frac{r_1}{s^2 - r_1^2} + \frac{1}{4s}\log\left(\frac{s+r_1}{s-r_1}\right)^2.$$

Nazewnątrz kuli CCC w obszarze lewym mamy:

Digitized by Google

$$\int\int \frac{R^2 \sin\omega}{(R^2-2Rs\omega+s^2)^2}\, dR\, d\omega = -\frac{1}{2s}\left[\int \frac{R}{(s+R)^2}\, dR - \int \frac{1}{R}\, dR\right]$$

(b'')

$$= \frac{1}{s}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\log 9\right),$$

skąd suma całek (a') i (b'), pomnożona przez 2, daje nam całkę drugą wyrażenia (8), rozciągniętą na całą przestrzeń:

$$(10)\quad \int\int \frac{R^2 \sin\omega}{(R^2-2Rs\cos\omega+s)^2}\, dR\, d\omega = \frac{2}{s} - \frac{2r_1}{s^2-r_1^2} + \frac{1}{2s}\log\left(\frac{s+r_1}{s-r_1}\right)^2.$$

Przechodząc do trzeciej całki, zauważymy, że licznik ułamku podcałkowego jest pochodną mianownika względem zmiennej R, i dlatego, dla uproszczenia, całkować będziemy odmiennie, niż przy dwóch poprzednich całkach.

Przedewszystkiem rozciągniemy całkowanie na przestrzeń zawartą między płaszczyzną PQ i płaszczyzną $P'Q'$, równoległą do płaszczyzny PQ i przechodzącą przez środek A, czyli że będziemy całkowali w granicach: dla R od r_1 do $\frac{s}{2\cos\omega}$, a dla ω od 0 do $\frac{\pi}{2}$, co nam daje:

$$\int\int \frac{(2R-2s\cos\omega)\sin\omega}{(R^2-2Rs\cos\omega+s^2)^{\frac{3}{2}}}\, dR\, d\omega = -2\left(\frac{2}{s}\right)\int \sin\omega\cos\omega\, d\omega$$

$$(a'')\quad -\int \frac{\sin\omega}{(r_1^2-2r_1 s\cos\omega+s^2)^{\frac{1}{2}}}\Big)\, d\omega = -2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_1 s}\sqrt{r_1^2+s^2}\right).$$

Następnie całkujemy w lewym obszarze przestrzeni względem płaszczyzny $P'Q'$, t. j. w granicach: dla R od r_1 do ∞, a dla ω od $\frac{\pi}{2}$ do π, skąd otrzymujemy:

$$\int\int \frac{(2R-2s\cos\omega)\sin\omega}{(R^2-2Rs\cos\omega+s^2)^{\frac{3}{2}}}\, dR\, d\omega = -2\left(-\int \frac{\sin\omega}{r_1^2-2r_1 s\cos\omega+s^2)^{\frac{3}{2}}}\, d\omega\right)$$

(b'')

$$= -2\left(\frac{1}{r_1 s}\sqrt{r_1^2+s^2}-\frac{1}{r_1}-\frac{1}{s}\right).$$

Digitized by Google

Suma całek (a″) i (b″), pomnożona przez 2, da nam całkę trzecią rozciągniętą na całą przestrzeń:

$$(11)\qquad \int\int \frac{(2R-2s\cos\omega)\sin\omega}{(R^2-2Rs\cos\omega+s^2)^{\frac{3}{2}}}\,dR\,d\omega=\frac{4}{s}\,.$$

Zastępując obecnie w wyrażeniu (8) całki ich wartościami (9), (10) i (11), otrzymujemy ilość energii pola wypadkowego dwóch elektronów jednakowego znaku:

$$e=\frac{h}{2k}\cdot\frac{\Phi^2}{8\pi}\left[\frac{4}{r_1}+\frac{4}{s}+\frac{2r_1}{s_1^2-r_1^2}+\frac{1}{2s}\log\left(\frac{s+r_1}{s-r_1}\right)^2\right]$$

$$=2\cdot\frac{h}{8\pi k}\cdot\frac{\Phi^2}{r_1}+2\cdot\frac{h}{8\pi k}\cdot\frac{\Phi^2}{s}+\frac{h\Phi^2}{16\pi k}\left[-\frac{2r_1}{s_1^2-r_1^2}+\frac{1}{2s}\log\left(\frac{s+r_1}{s-r_1}\right)^2\right].$$

Promienie kul centralnych elektronów r_1 i r_2 uważamy za bardzo małe w stosunku do odległości s, a to między innemi dla tego, że kule te przy odległości bardzo małej ulegną przekształceniu i zamienią się na wydłużone powierzchnie obrotowe. Możemy tedy w ostatniem wyrażeniu pominąć trzeci wyraz i napisać na wartość energii e wzór:

$$(12)\qquad e=2\cdot\frac{h}{8\pi k}\cdot\frac{\Phi^2}{r_1}+2\cdot\frac{h}{8\pi k}\cdot\frac{\Phi^2}{s}\,.$$

Ponieważ w rozważaniach naszych nie wchodził w grę kierunek pól składowych, możemy przyjąć wyrażenie (12) jako odpowiadające obydwu znaków elektronom, w zależności od tego czy w wyrażeniu tem będzie r_1 lub r_2. Tak że ostatecznie mamy na energię całkowitą pola wypadkowego dwóch elektronów dodatnich E_1 i ujemnych E_2 wyrażenia:

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} e_1&=2\cdot\frac{h}{8\pi k}\cdot\frac{\Phi^2}{r_1}+2\cdot\frac{h}{8\pi k}\cdot\frac{\Phi^2}{s}\\ e_2&=2\cdot\frac{h}{8\pi k}\cdot\frac{\Phi^2}{r_2}+2\cdot\frac{h}{8\pi k}\cdot\frac{\Phi^2}{s}\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

Na zasadzie rozważań wstępnych, które doprowadziły nas do równania (1), znajdujemy wyrażenie na siłę działania między dwoma elektronami jednakowych znaków:

$$F = -\frac{de}{ds} = 2 \cdot \frac{h}{8\pi k} \cdot \frac{\Phi^2}{s^2}. \tag{14}$$

Siła ta jest niezależna od samego znaku obydwóch elektronów, jest dodatnia, czyli skierowana w kierunku s rosnącego, zatem jest odpychająca; co do wielkości, jest ona odwrotnie proporcyonalna do drugiej potęgi odległości, jak tego wymaga prawo Coulomba.

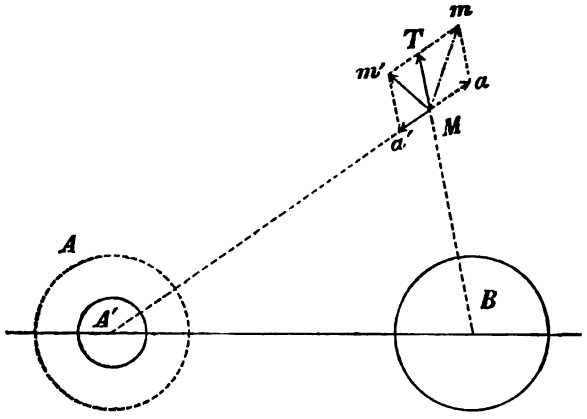


Fig .2

IV. Przyciąganie. Rozważmy teraz dwa elektrony różnych znaków. Dajmy nato, że elektron dodatni A (fig. 2) został zastąpiony przez elektron ujemny A'. Wiadomo, że wielkość elektronu ujemnego jest znacznie mniejsza od wielkości elektronu dodatniego, tak że kula centralna elektronu ujemnego pomieści się wewnątrz kuli centralnej elektronu dodatniego. Ponieważ wielkość przepływu obydwóch elektronów dodatniego i ujemnego jest jednakowa, natężenie pola w danym punkcie M nie ulegnie zmianie, a zmieni się tylko kierunek pola tak, że w danym

Digitized by Google

punkcie poprzedni wektor a, odpowiadający polu elektrona dodatniego zostanie zastąpiony wektorem a', równym wektorowi poprzedniemu, lecz skierowanym do środka. A więc wektor wypadkowy m zostanie zastąpiony wektorem wypadkowym m'.

Przypatrując się wzorowi (6) na pole wypadkowe w zależności od pól składowych, zauważymy, że zmiana kierunku pola ednego z elektronów nie zmienia żadnego z wyrazów tego wzoru, ecz zmienia jedynie znak wyrazu trzeciego, a to dla tego, że kąt a został zastąpiony jego dopełnieniem bMa'. Przechodząc od wyrażenia (6) do wyrażenia (8), zauważymy, że w niem wszystkie wartości całek pozostaną te same, i tylko zmienia się znak całki trzeciej. Pozatem nastąpi zmiana energii, odpowiadająca ilości energii zawartej w przestrzeni między kulą centralną r_1 i r_2; w pierwszym przypadku przestrzeń ta znajdowała się wewnątrz kuli centralnej, nie była zatem wypełniona polem energetycznem, w drugim zaś przypadku znajduje się ona nazewnątrz kuli centralnej, jest zatem wypełniona polem energetycznem. Zmiana ta wyrazi się sumą całek (8), rozciągniętych w przestrzeni między kulami centralnemi, t. j. wziętych w granicach: dla R od r_2 do r_1, a dla ω od 0 do π. Dla pierwszej całki znajdujemy:

$$\pm\int\int\frac{\sin\omega}{R^2}\,dR\,d\omega=\pm\left(\frac{2}{r_2}-\frac{2}{r_1}\right).$$

Dla drugiej całki mamy:

$$\pm\int\int\frac{R^2\sin\omega}{(R^2-2Rs\cos\omega+s^2)^2}\,dR\,d\omega$$

$$=\pm\left[\frac{r_1}{s^2-r_1^2}-\frac{r_2}{s^2-r_2^2}+\frac{1}{4s}\log\left(\frac{s+r_2}{s-r_2}\right)^2-\frac{1}{4s}\log\left(\frac{s+r_1}{s-r_1}\right)^2\right],$$

Całka ta w tych granicach może być pominięta, ponieważ r_1 i r_2 są bardzo małe w stosunku do s.

Dla trzeciej całki mamy:

$$\pm\int\int\frac{(2R-2s\cos\omega)\sin\omega}{(R^2-2Rs\cos\omega+s^2)^{\frac{3}{2}}}\,dR\,d\omega=0.$$

Digitized by Google

Tym sposobem ilość energii całkowitej pola wypadkowego dwóch elementów o znakach przeciwnych wyrazi się tak:

$$(15) \qquad e' = \frac{h}{2\pi k} \; \Phi^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) - 2 \cdot \frac{h}{8\pi k} \cdot \frac{\Phi^2}{s^2} \, .$$

Znajdujemy stąd siłę, działającą między temi elektronami, na zasadzie (1):

$$(16) \qquad F' = -\frac{dE'}{ds} = -2 \cdot \frac{h}{8\pi k} \cdot \frac{\Phi^2}{s^2} \, .$$

Siła ta jest ujemna, t. j. skierowana w stronę s malejącego—jest więc przyciągająca; ilościowo jest ona równa sile odpychającej pomiędzy dwoma elektronami jednakowemi i jest odwrotnie proporcyonalna do drugiej potęgi odległości, jak tego wymaga prawo Coulomba.

Jeżeli rozważymy jakiekolwiek dwa środki o przepływach równych Φ_1 i Φ_2 i o promieniach kuli centralnych r_1 i r_2, otrzymamy następujące wyrażenie na ilość pola wypadkowego:

$$(17) \qquad e = \frac{h}{8\pi k} \cdot \Phi_1 \cdot \Phi_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \pm 2 \cdot \frac{h}{8\pi k} \cdot \frac{\Phi_1 \cdot \Phi_2}{s} \, ,$$

a siła, działająca między temi środkami, będzie miała wyrażenie

$$(18) \qquad F = \pm 2 \cdot \frac{h}{8\pi k} \cdot \frac{\Phi_1 \cdot \Phi_2}{s^2} \, ;$$

gdzie znak + odnosi się do przypadku kierunków jednakowych, a znak — do przypadku przeciwnych kierunków pól.

Wyrażenie (18) jest analogiczne do ogólnego wzoru Coulomba, gdzie masa elektryczna została zastąpiona wielkością przepływów Φ_1 i Φ_2.

Znajdźmy wymiary naszych stałych k i h. Z równania (2):

$$f = k\delta;$$

znajdujemy dla k:

$$[k] = [\mathrm{M}](\mathrm{T}^{-2}] \, .$$

Digitized by Google

Z wyrażenia (3) znajdujemy dla h:

$$[h] = (L^{-3}).$$

W ten sposób otrzymaliśmy prawo Coulomba w całej jego rozciągłości, wychodząc z naszej definicyi.

Warto zauważyć, że siła F (18) jest niezależna od wielkości promieni r_1 i r_2 i pozostanie dla pól energetycznych takich, których kula centralna redukuje się do punktu geometrycznego.

Digitized by Google

A. ŁAPAREWICZ.

CECHA PODZIELNOŚCI LUCASA.

Jakkolwiek swą cechę podzielności, dogodną szczególniej względem liczb wzoru $2^n \pm 1$, ogłosił był Lucas[1]) już przed 30 tu niemal laty, ze względu jednak na to, że nigdzie dotąd u nas nie została ona uwzględniona, a stosunek jej do liczb $2^n - 1$, związanych z nazwiskiem naszego uczonego Jana Brożka, którego prace na tem polu przyczyniły się niewątpliwie do wykrycia przez Fermata twierdzenia ogólnego, czyni ją dla nas podwójnie ciekawą, uważam za właściwe temat ten obecnie poruszyć.

Weźmy dwie funkcye liczebne:

$$(1) \qquad U_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \quad V_n = a^n + b^n,$$

gdzie a i b są pierwiastkami równania kwadratowego:

$$x^2 = Px - Q,$$

o spółczynnikach P i Q całkowitych i niespółdzielnych.

Ponieważ w ten sposób $a+b=P$, $ab=Q$, przeto: $\sqrt{P^2-4Q}=a-b$, którą to różnicę oznaczamy przez δ; własności powyższego równania

[1]) Lucas „Théorie des fonctions numériques simplement périodiques“ (Amer. Journ., t. I).

Digitized by Google

w znacznej mierze zależą od kwadratu tej różnicy, zwanego wyróżnikiem równania i oznaczanego przez Δ, tak, iż:

$$\Delta = P^2 - 4Q. \tag{2}$$

Z określenia wielkości U i V wynika bezpośrednio:

$$V_n + \delta U_n = 2a^n, \quad V_n - \delta U_n = 2b^n, \tag{3}$$

tak, iż kładąc raz $n = \alpha$, następnie $n = \beta$, i mnożąc otrzymane wypadki stronami, kładąc wreszcie $n = \alpha + \beta$, znajdziemy:

$$(V_\alpha \pm \delta U_\alpha)(V_\beta \pm \delta U_\beta) = 2(V_{\alpha+\beta} \pm \delta V_{\alpha+\beta}), \tag{4}$$

z zachowaniem odpowiedniości znaków.

Z (4) w razie $\beta = \alpha$ wynika:

$$V_{2\alpha} \pm \delta U_{2\alpha} = \tfrac{1}{2}(V_\alpha^2 \pm 2\delta U_\alpha V_\alpha + \Delta V_\alpha^2)$$

tak iż:

$$U_{2\alpha} = U_\alpha V_\alpha, \quad 2V_{2\alpha} = V_\alpha^2 + \Delta U_\alpha^2. \tag{5}$$

Że zaś mnożąc (3) stronami, mamy:

$$V_\alpha^2 - \Delta U_\alpha^2 = 4Q^\alpha, \tag{6}$$

przeto drugi ze wzorów (5) można przedstawić w postaci:

$$V_{2\alpha} = V^2_\alpha - 2Q^\alpha. \tag{5a}$$

Z (4) wreszcie, po wykonaniu wskazanego mnożenia, dodając i odejmując otrzymane wzory stronami, znajdziemy:

$$2V_{\alpha+\beta} = V_\alpha V_\beta + \Delta U_\alpha U_\beta; \quad 2U_{\alpha+\beta} = U_\alpha V_\beta + V_\alpha U_\beta. \tag{7}$$

Wzór (6) wskazuje, że wspólny dzielnik liczb U_n i V_n jest również dzielnikiem liczby Q; z rozwinięcia zaś $(a+b)^n = P^n$, po połączeniu wyrazów równooddalonych od jego początku i końca, wynika $V_n \equiv P^n$ (mod Q), co dowodzi, że wspólny dzielnik liczb V_n i Q jest dzielnikiem liczby P. Zatem wspólny dzielnik liczb U_n i V_n jest zarazem i wspólnym dzielnikiem liczb P i Q; że zaś te ostatnie, według założenia są niespółdzielne, przeto

Digitized by Google

I. Liczby U_n i V_n są niespółdzielne.

Ponieważ drugi ze wzorów (7) wskazuje, że jeżeli $U_{\alpha+\beta}$ i U_β mają wspólny dzielnik, przez tenże będzie podzielny i iloczyn $U_\alpha V_\beta$, przeto na zasadzie I wnosimy, że ten wspólny dzielnik będzie dzielnikiem liczby U_α. Stąd wynika, że jeżeli U_m i U_n, gdzie $m > n$, mają wspólny dzielnik, będzie przez niego podzielną i U_{m-n}; następnie, wspólny dzielnik liczby U_n i U_{m-n} będzie także dzielnikiem liczby U_{m-2n} i t. d.: wnosząc w końcu, że wspólny dzielnik liczby U_m i U_n będzie wspólnym dzielnikiem liczb U_{n_1} i U_m, gdzie $n_1 = m - kn$. Podobnież, wspólny dzielnik liczb U_n i U_{n_1} będzie wspólnym dzielnikiem liczb U_{n_1} i U_{n_2}, gdzie $n_2 = n - k_1 n_1 < n_1$ i t. d. Zatem ostatecznie:

II. Wspólny dzielnik liczby U_m i U_n jest zarazem dzielnikiem liczby U_l gdzie l jest największym wspólnym dzielnikiem liczby m i n

Zważywszy, że $2a = P + \delta$, $2b = P - \delta$ mamy:

$$2^n a^n = P^n + \frac{n}{1} P^{n-1}\delta + \frac{n(n-1)}{2!} P^{n-2}\delta^2 + \ldots + \frac{n}{1} P\delta^{n-1} + \delta^n,$$

$$2^n b^n = P^n - \frac{n}{1} P^{n-1}\delta + \frac{n(n-1)}{2!} P^{n-2}\delta^2 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{n}{1} P\delta^{n-1} + (-1)^n\delta^n;$$

odejmując stronami i dzieląc przez δ, znajdziemy:

$$(8)\quad \begin{aligned} 2^{n-1} U_n = \frac{n}{1} P^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} P^{n-3}\Delta + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} P^{n-5}\Delta^2 + \ldots \end{aligned}$$

przyczem ostatnim wyrazem będzie $\frac{n}{1} P\Delta^{\frac{n-2}{2}}$ lub $\Delta^{\frac{n-1}{2}}$, stosownie do tego, czy n jest liczbą parzystą czy nieparzystą.

Kładąc teraz $n = p \pm 1$, gdzie p jest liczbą bezwzględnie pierwszą nieparzystą, mamy stąd:

$$(9)\quad \begin{cases} 2^p U_{p+1} = \frac{p+1}{1} P^p + \frac{(p+1)p(p-1)}{3!}\Delta P^{p-2} + \ldots + \frac{p+1}{1}\Delta^{\frac{p-1}{2}} P \\ 2^{p-2} U_{p-1} = \frac{p-1}{1} P^{p-2} + \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{3!}\Delta P^{p-4} + \ldots + \frac{p-1}{1}\Delta^{\frac{p-3}{2}} P. \end{cases}$$

Digitized by Google

Pierwsza z tych równości, w której wszystkie wyrazy prawej strony, z wyjątkiem dwu skrajnych, są podzielne przez p, prowadzi do kongruencyi $2^p U_{p+1} \equiv P(P^{p-1} + \Delta^{\frac{p-1}{2}}) \pmod p$. Co zaś do drugiej, to zważając, że wszystkie spółczynniki, których wzorem ogólnym jest $\frac{(p-1)\ldots(p-k)}{k!} = A_k$, są liczbami całkowitemi, a $(p-1)\ldots\ldots(p-k) = pf_{k-1}(p) + (-1)^k k!$ gdzie $f_{k-1}(p)$ jest funkcyą całkowitą $k-1$ stopnia względem p, mamy $A_k = p\frac{f_{k-1}(p)}{k!} + (-1)^k$, tak iż $\frac{f_{k-1}(p)}{k!}$ jest również liczbą całkowitą i $A_k \equiv (-1)^k \pmod p$, zatem według mod p jest:

$$2^{p-2} U_{p-1} \equiv -P^{p-2} - \Delta P^{p-4} - \ldots - \Delta^{\frac{p-3}{2}} P = -P\frac{P^{p-1} - \Delta^{\frac{p-1}{2}}}{P^2 - \Delta}.$$

Zamiast więc równości (9), mamy do rozważania kongruencye:

$$2^p U_{p+1} \equiv P(P^{p-1} + \Delta^{\frac{p-1}{2}}), \quad 2^{p-2} U_{p-1} \equiv -P\frac{P^{p-1} - \Delta^{\frac{p-1}{2}}}{P^2 - \Delta} \pmod p.$$

Ponieważ P zawsze możemy obrać liczbą niespółdzielną p, tak iż $P^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, przeto, stosownie do tego, czy:

$$\Delta^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \quad \text{czy} \quad +1 \pmod p$$

otrzymamy ostatecznie:

$$U_{p+1} \equiv 0 \quad \text{lub} \quad U_{p-1} \equiv 0 \pmod p, \text{ t. j.}$$

III. W szeregu liczb U o wskaźnikach kolejnych zawsze znajdzie się wyraz U_{p-1} lub U_{p+1} podzielny przez liczbę pierwszą p; przyczem wyrazem takim będzie U_{p-1}, jeżeli wyróżnik równania, z którego pierwiastków funkcye te tworzymy, będzie resztą, a U_{p+1} jeżeli nieresztą liczby pierwszej p.

Z teoryi reszt potęgowych wynika, że jeżeli p jest liczbą pierwszą, a c niespółdzielną z p, to kongruencya $c^x \equiv 1 \pmod p$, zawsze mająca miejsce, według Fermata, dla $x = p-1$, może się sprawdzać i dla $x < p-1$. Zatem kongruencya $U_x \equiv 0 \pmod p$. gdzie p jest liczbą pierwszą, prócz $x = p \pm 1$, może mieć miejsce i dla $x = m < p \pm 1$. Lecz z podzielności liczb $U_{p\mp1}$ i U_m przez p, według II, wynika podziel-

Digitized by Google

ność przez p i liczby U_n, gdzie n jest największym wspólnym dzieln. $p \pm 1$ i m. Stąd wnosimy, że $\frac{p \mp 1}{n} = k$ jest liczbą całkowitą, tak iż dzielnik liczby U_n winien być wzoru $p = nk \pm 1$, gdzie 1 należy wziąć z $+1$ lub -1, stosownie do tego, czy Δ jest resztą czy nieresztą liczby p, co wyrazimy pisząc $p = nk + \left(\frac{\Delta}{p}\right)$. Że zaś $U_{2n} = U_n V_n$, a U_n i V_n są niespółdzielne, przeto dzielnik liczb V_n winien być wzoru $p = 2nk + \left(\frac{\Delta}{p}\right)$.

Że zaś nadto, według (6) $V_n^2 - 4Q \equiv 0 \pmod{U_n}$ lub $\Delta^2 U_n^2 + 4Q^n \Delta \equiv 0 \pmod{V_n}$, przeto dzielniki liczby U_n dla nieparzystych wskaźników są dzielnikami formy $x^2 - Qy^2$, dzielniki zaś liczby V_n są dzielnikami formy $x^2 + \Delta y^2$ lub $x^2 + \Delta Qy^2$, stosownie do tego, czy n jest liczbą parzystą czy nie. Zatem:

IV. Liczby U_n są podzielne przez liczby pierwsze wzoru $kn + \left(\frac{\Delta}{p}\right)$, które jednocześnie są dzielnikami formy $x^2 - Qy^2$, liczby zaś V_n—przez liczby pierwsze $p = 2kn + \left(\frac{\Delta}{p}\right)$, które jednocześnie są dzielnikami formy $x^2 + \Delta y^2$, gdy n jest liczbą parzystą, lub $x^2 + \Delta Qy^2$, gdy nieparzystą.

Zauważmy, że, jak to wynika ze sposobu dowodzenia tw. III kongruencya $U_{p \mp 1} \equiv 0 \pmod{p}$ jest niemożliwą bez założenia, że p jest liczbą pierwszą. Co zaś do kongruencyi $U_n \equiv 0 \pmod{p}$ gdy $n < p \pm 1$, a p jest liczbą złożoną, to można okazać, że w niektórych przypadkach szczególnych dałaby się ona urzeczywistnić. Np. jeżeli przypuścimy że $p = lm$, gdzie l i m są liczbami pierwszemi, tak iż według III $U_{l \mp 1} \equiv 0 \pmod{l}$, $U_{m \mp 1} \equiv 0 \pmod{p}$ czyli $m U_{l \mp 1} \equiv 0$ $l U_{m \mp 1} \equiv 0 \pmod{p}$, to zakładając $m \equiv V_{m \mp 1}$, $l \equiv V_{l \mp 1} \pmod{p}$, na zasadzie (7) otrzymalibyśmy $U_n \equiv 0 \pmod{p}$, gdzie $n = (l \mp 1) + (m \mp 1) < p \mp 1$ [1].

---

[1]) Stąd wynika, że błędnem jest twierdzenie odwrotne względem twierdzenia III, które Lucas w następny wyraził sposób: Jeżeli kongruencya $U_n \equiv 0 \pmod{p}$ ma miejsce dopiero dla $n = p \mp 1$, a dla żadnej wartości na $n < p \mp 1$ nie daje się urzeczywistnić, wówczas liczba p jest bezwzględnie pierwszą. Przez dziwne jakieś niedopatrzenie Lucas w warunkach obecnego twier-

Digitized by Google

Z twierdzenia III wynika bardzo piękna cecha podzielności liczb wzoru $2^n \pm 1$. Jakoż, jeżeli położymy na Δ wartość taką, aby $\left(\frac{\Delta}{2^n \pm 1}\right) = \pm 1$ (z zachowaniem odpowiedniości znaków), wtedy warunek konieczny, by liczba $2^n \pm 1$ była pierwszą, wyrazi się w postaci kongruencyi $U_{2^n} \equiv 0 \pmod{2^n \pm 1}$. Lecz na zasadzie (5) i z uwzględnienieniem, że $U_{2^0} = 1$, warunek ten prowadzi do tego, aby w szeregu

$$(10) \qquad V_{2^0},\ V_{2^1},\ V_{2^2}, \ldots\ldots V_{2^{n-1}},$$

jeden z wyrazów był podzielny przez $2^n \pm 1$. Ten ostatni warunek nie jest jednak w tym celu dostateczny, ponieważ, jak widzieliśmy, kongruencya $U_m \equiv 0 \pmod{p}$ może niekiedy się sprawdzać i w razie gdy p jest liczbą złożoną, tak iż podzielność przez $2^n \pm 1$ któregokolwiek wyrazu w szeregu (10) nie dowodzi jeszcze, aby $2^n \pm 1$ było liczbą pierwszą.

Wiedząc to, przypuśćmy, że $V_{2^\alpha} \equiv 0 \pmod{2^n \pm 1}$ i że $2^n \pm 1$ jest liczbą złożoną; w takim razie czynniki liczby $2^n \pm 1$ winne być czynnikami liczby V_{2^α}, które, według twierdz. IV, mają być wzoru $2^{\alpha+1}k + \left(\frac{\Delta}{2_n \pm 1}\right)$, że zaś przynajmniej jeden z nich jest $< \sqrt{2^n \pm 1}$, przeto jeżeli przy najmniejszej wartości na k, t. j. 1, wyrażeniu $2^{\alpha+1}k + \left(\frac{\Delta}{2^n \pm 1}\right)$ nadamy największą możliwą wartość, t. j. $\sqrt{2^n \pm 1}$, to równość $\left\{2^{\alpha+1} + \left(\frac{\Delta}{2^n \pm 1}\right)\right\}^2 = 2^n \pm 1$ przyczyni się do określenia największej wartości na α, dla której podzielność liczby V_{2^α} przez $2^n \pm 1$ pozwala na przypuszczenie, że $2^n \pm 1$ może być liczbą złożoną. Zważając zaś, że w przytoczonej równości drugie wyrazy obu stron nikną w porównaniu z pierwszemi, znajdziemy stąd $2(\alpha + 1) = n$, tak iż $\alpha < \frac{n-1}{2}$. Zatem:

---

dzenia zaprzeczył temu, co sam przyjął za pewnik, dowodząc twierdzenia IV, dowód zaś oparł widocznie na własności $U_\alpha U_\beta U_\gamma \ldots = U_{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}$, której, jak wskazuje wzór (7), funkcya U nie posiada. Na szczęście twierdzenie to na dalsze wnioski z twierdzenia III nie wpływa.

Digitized by Google

V. Jeżeli w szeregu (10) pierwszym wyrazem podzielnym przez $2^n \pm 1$, jest V_{2^a}, to, o ile $a \geqq \frac{n-1}{2}$, liczba $2^n \pm 1$ jest liczbą pierwszą, w razie zaś $a < \frac{n-1}{2}$ liczba $2^n \pm 1$ może być liczbą złożoną, podzielną przez $2^{a+1} + \left(\frac{\Delta}{2^n \pm 1}\right)$ (lecz również może być i liczbą pierwszą); jeżeli wreszcie żaden z n wyrazów szeregu (10) nie jest przez $2^n + 1$ podzielnym, wtedy liczba $2^n \pm 1$ jest liczbą złożoną, lecz czynników jej tą drogą nie wykryjemy [1].

---

[1]) Wrazie $a < \frac{n-1}{2}$, zdaniem Lucasa, liczba $2^n \pm 1$, będąc dzielnikiem liczby V_{2^a}) stanowczo jest liczbą złożoną; z dowodzenia jednak powyższego pewność ta bynajmniej nie wypływa. Co większa, z tak kategorycznego twierdzenia możnaby wyprowadzić wniosek, że szereg $2^{2^m} + 1$, w którym Fermat upatrywał jedynie liczby pierwsze, począwszy od pewnej wartości na m zawierałby tylko liczby złożone, tak iż sławne twierdzenie Eisensteina, że szereg $2+1$, 2^2+1, $2^{2^2}+1$, $2^{2^{2^2}}+1$ ..... przedstawia same liczby pierwsze, byłoby ostatecznie rozstrzygnięte w sensie odmownym. Jakoż przy wyborze liczb V, potrzebnych do określenia składu liczby $2^n + 1$, winno być $\left(\frac{\Delta}{2^n+1}\right) = +1$; warunkowi temu odpowiada równanie o pierwiastkach wymiernych, ponieważ Δ w takim razie jest liczbą kwadratową, z równań zaś takich najprostszem jest równanie, dla którego $a=2$, $b=1$, szereg zaś (10) staje się szeregiem $2^{2^0}+1$, $2^{2^1}+1$,....$2^{2^{n-1}}+1$. Przy takim wyborze szeregu V, pierwsza część twierdzenia Lucasa sprowadza się do tego, że jeżeli w szeregu $2^{2^0}+1$, $2^{2^1}+1$, $2^{2^2}+1$,... ..$2^{2^n}+1$ wyraz identyczny z 2^n+1, co jest możliwem tylko wrazie, gdy n jest potęgą liczby 2, przypada w pierwszej tegoż połowie, wtedy 2^n+1 jest liczbą złożoną. Lecz jeżeli kładziemy na n kolejne potęgi liczby 2, tak iż liczba wyrazów szeregu stopniowo się podwaja, wtedy wyraz identyczny z 2^n+1 będzie się przesuwał o jedno miejsce ku prawej ręce, tak iż, jakkolwiek w razie niższych potęg wyraz taki będzie się znajdował w drugiej połowie szeregu, stopniowo jednak przejdzie do pierwszej, a raz tam przeszedłszy, już dla wszystkich wyższych potęg liczby 2 w niej pozostanie. Stąd wynika, że liczby $2^{2^m}+1$, pierwsze dla niższych wartości m, dla wszystkich wyższych m winny już być stale liczbami złożonemi. Lecz kładąc po kolei $m=1,2,3,\ldots$, znajdujemy w ten sposób, że już $2^{2^5}+1$ musiałaby być złożoną, gdy wiemy, że dopiero $2^{2^5}+1$ jest podzielną przez 641, a $2^{2^4}+1$ w rzeczy samej jest liczbą pierwszą. Stąd wnosimy, że w warunkach, wyszczególnionych w pierwszej części twierdzenia Lucasa, złożoność rozważanej liczby jest jedynie możliwą, lecz bynajmniej nie udowodnioną w sposób stanowczy.

Digitized by Google

Pozostaje do omówienia kwestya wyboru $\Delta = P^2 - 4Q$. Ponieważ w ten sposób Δ nie zależy od znaku P, z określenia zaś V wynika $V_{2^0} = P$, na dalsze zaś V znak P, według (5a) nie wpływa, przeto można poprzestać na $P > 0$. Co zaś do Q, to wzór (5a) wskazuje, że najdogodniej przyjąć $Q = \pm 1$; zważając bowiem, że w danym razie wszystkie wskaźniki V, z wyjątkiem pierwszego, są parzyste, w razie $Q = +1$ dla wszystkich, a w razie $Q = -1$ poczynając od trzeciego, będziemy mieli: $V_{2a} = V_a^2 - 2$, t. j. każdy z nich będziemy otrzymywali kolejno jako zmniejszony o 2 kwadrat poprzedzającego. (W razie $Q = -1$ drugi wyraz będzie kwadratem pierwszego powiększonym o 2) Kładąc więc $Q = \pm 1$, a za P po kolei 1,2,3,... znajdziemy szereg wartości na Δ które przyjmujemy lub odrzucamy stosownie do tego, czy odpowiadają warunkowi $\left(\frac{\Delta}{2^n \pm 1}\right) = \pm 1$ czy nie.

W razie $P_1 = 1$, stosownie do tego, czy $Q = +1$ czy -1, mamy $\Delta = -3$ lub $+5$. Zważając zaś, że $\left(\frac{-3}{2^n \pm 1}\right) = \left(\frac{2^n \pm 1}{3}\right)$, a $2 \equiv -1$ (mod 3) tak iż $2^n \pm 1 \equiv (-1)^n \pm 1$ (mod 3), wnosimy, że w razie n parzystego $\left(\frac{2^n - 1}{3}\right) = +1$, w pozostałych zaś $2^n \pm 1 \equiv 0$ (mod 3), tak iż -3 w żadnym razie na Δ się nie nadaje. Co zaś do $\Delta = 5$, to zważając, że $\left(\frac{5}{2^n \pm 1}\right) = \left(\frac{2^n \pm 1}{5}\right)$ a $2^2 \equiv -1$ (mod 5), tak iż $2^{2n+1} \pm 1 \equiv 2(-1)^n \pm 1$ (mod 5), skąd w razie n parzystego $2^{2n+1} + 1 \equiv 3$, $2^{2n+1} - 1 \equiv 1$, nieparzystego $2^{2n+1} + 1 \equiv 4$, $2^{2n+1} - 1 \equiv 2$ (mod 5), wnosimy, że $\Delta = 5$ służy do badania liczb $2^{2n+1} \pm 1$ w razie, gdy n jest liczbą nieparzystą, czyli prościej liczb $2^{4m+3} \pm 1$, że zaś $2^{4m+3} + 1$ ak wiemy, zawsze jest złożoną, przeto do $\Delta = 5$ uciekamy się przy badaniu składu liczb $2^{4m+3} - 1$; do tegoż samego wniosku dojdziemy prędzej, wychodząc z kongruencyi $2^4 = 1$ (mod 5). W razie $P = 2$ mamy $\Delta = 0$ lub $\Delta = 8$; w pierwszym razie, na zasadzie wzoru (5) mamy $2V_{2a} = V_a^2$, a że $V_1 = 2$, przeto wszystkie V są równe 2, tak iż w tym razie z góry jest przesądzona niepodzielność każdej liczby V przez $2^n \pm 1$; co zaś do $\Delta = 8$, to zważając, że $\left(\frac{\Delta}{2^n \pm 1}\right) = \pm 1$, a $\left(\frac{8}{2^n \pm 1}\right) = \left(\frac{2}{2^n \pm 1}\right)$, wnosimy, że winno być: $2^n + 1 \equiv 1$ lub 7, $2^n - 1 \equiv 3$, 5

Digitized by Google

(mod 8); lecz kongruencye $2^n+1\equiv 7$, $2^n-1\equiv 5$, prowadząc do $2^n\equiv 6$ (mod 8), niepodobne są osiągnięcia, $2^n-1\equiv 3$ sprawdza się jedynie dla $n=2$, wreszcie $2^n+1\equiv 1$ (mod 8) jest możliwą dla każdej wartości na $n\geqq 3$, tak iż $\Delta=8$ może służyć jedynie do badania 2^n+1, począwszy od $n=3$. Wrazie $P=3$, prócz zbadanego poprzednio $\Delta=5$, otrzymujemy $\Delta=13$; zważając, że stosownie do tego, czy $n\equiv 0,1,2,\ldots 11$ (mod 12), mamy $2^n\equiv 1,2,4,8,3,6,12,11,9,5,10,7$ (mod 13), oraz że resztami 13 są 1, 3, 4, 9, 10 i 12 a $\left(\frac{13}{2^n\pm 1}\right)=\left(\frac{2^n\pm 1}{13}\right)$, wnosimy, że $\Delta=13$ nadaje się do badania składu liczb 2^n-1 w razie $n\equiv 3,4,5,6,8,11$ (mod 12), a liczb 2^n+1 w razie $n\equiv 1,3,5.7.8$(mod 12) W ogóle, jeżeli za wyróżnik przyjmiemy liczbę pierwszą nieco większą warunki jego stosowalności otrzymujemy w formie niełatwej do spamiętania, stąd przenosimy zwykle wyróżniki, złożone z liczb najprostszych. W razie $P=4$, mamy $\Delta=12$ lub $\Delta=20$. Co do pierwszego, to zważając, że $\left(\frac{12}{p}\right)=\left(\frac{3}{p}\right)$ a $\left(\frac{3}{2^n\pm 1}\right)=\pm\left(\frac{2^n\pm 1}{3}\right)$ i rozumując jak powyżej, w razie $\Delta=-3$ wnosimy, że $\Delta=12$ nadaje się do badania liczb 2^n-1 dla nieparzystych n; że zaś dla $2^{4m+3}-1$ przyjęliśmy już $\Delta=5$, przeto do $\Delta=12$ uciekać się będziemy w razie $2^{4m+1}-1$. Co zaś do $\Delta=20$, to ponieważ $\left(\frac{20}{p}\right)=\left(\frac{5}{p}\right)$, wszystko, cośmy znaleźli dla $\Delta=5$, stosuje się i obecnie. Następnie $P=5$ prowadzi do mało dogodnych wyróżników 21 i 29, wreszcie dla $P=6$ otrzymujemy 32 i 40, które łatwo sprowadzić do rozpatrzonych poprzednio 8 i 5. Na tem badanie poszczególnych wyróżników możemy zakończyć, przychodząc do następujących wyników, obejmujących wszelkie możliwe przypadki:

I. Do badania liczb $2^{4m+3}-1$ najdogodniejszym jest wyróżnik $\Delta=5$ równań $x^2=x+1$ lub $x^2=3x-1$; rozważając pierwsze równanie, otrzymujemy kolejno: $V_{2^0}=1$, $V_{2^1}=3$, $V_{2^2}=7\ldots$, z drugiego zaś $V_{2^0}=3$, $V_{2^1}=7\ldots$, tak iż począwszy od wyrazu $=3$, oba szeregi będą zgodne. Można również w tym razie uciekać się do $\Delta=20$ lub 40, z których pierwszy jest wyróżnikiem równania $x^2=4x+1$, wytwarzającego szereg 4, 18, 322... drugi zaś $x^2=6x+1$, prowadzącego do szeregu 6, 38, 1242.....

II. Do badania liczb 2^n-1, gdzie n jest jakąkolwiek liczbą nieparzystą (w szczególnym zaś wypadku do badania liczb $2^{4m+1}-1$),

Digitized by Google

uciekamy się do $\Delta=12$, wyróżnika $x^2=4x-1$, z którego pierwiastków tworzymy szereg V: 4, 14,.....

III. Do badania liczb 2^n+1, gdzie n jest jakąkolwiek liczbą $\geqq 3$, najdogodniej brać $\Delta=8$ lub $\Delta=32$; odpowiednie im równania $x^2=2x+1$ i $x^2=6x-1$ prowadzą do szeregów 2, 6, 34... lub 6, 34..., które, jak widzimy, począwszy od wyrazu $=6$, są zgodne.

Oczywista, że zamiast powyższych liczb, można w rachunek wprowadzać ich bezwzględnie najmniejsze reszty (mod. $2^n \mp 1$).

Do uproszczenia wykonywanych tu rachunków wielce się przyczynia układ dwójkowy, zwłaszcza że unikamy w takim razie dzielenia poszczególnych V przez $2^n \mp 1$: skoro bowiem $2^n \equiv \pm 1$ (mod. $2^n \mp 1$), przeto $2^{n+m} \equiv \pm 2^m$ (mod. $2^n \mp 1$); jeżeli przeto przytrafi się w rachunku jednostka rzędu wyższego nad n, zastępujemy ją zaraz jednostką, której rząd jest nadmiarem tamtego ponad n, przyczem w razie liczb 2^n+1 należy pamiętać, że otrzymana w ten sposób jednostka jest ujemną.

Postępując podanym sposobem, Pierwuszin dowiódł, że liczba:

$$2^{61}-1 = 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951$$

jest liczbą pierwszą [1]), co najwymowniej przekonywa o skuteczności sposobu Lucasa, ponieważ na wypróbowanie podzielności tej liczby przez wszystkie liczby pierwsze, $\equiv 1$ (mod. 61) i $\equiv \pm 1$ (mod. 8), aż do liczb $\sqrt{2^{61}-1}$ włącznie, należałoby poświęcić 15 lat usilnej pracy, czyli że wynik powyższy przy użyciu sposobu dotychczasowego był nie do osiągnięcia.

Przypisek. Wielce zbliżoną do powyższej cechy podzielności liczb $2^n \pm 1$ można bezpośrednio wyprowadzić z twierdzenia Fermata, jak to postaramy się wykazać w następnym artykule, który zawierać będzie i bliższe wyjaśnienie wyżej wspomnianych rachunków w układzie dwójkowym.

---

[1]) Zapiski Imp. Ak. Nauk. t. 48. Bulletin de l'Ac. de SPB. t. XXXI. str. 532

Digitized by Google

A. ŁAPAREWICZ.

Tabelka do pośpiesznego rozkładu liczb na czynniki pierwsze.

Gaston Tarry. Tablettes des cotes relatives à la base 20580 des facteurs premiers d'un nombre inférieur à N et non divisible par 2, 3, 5 ou 7. I partie, $N = 317^2 = 100489$. Paris. Gauthier-Villars. 1906.

Dotychczasowe tablice czynników w układzie Burckharda w porównaniu z pierwotnemi tablicami, układanemi według t. zw. „sita Eratostenesa" bez żadnych nastręczających się uproszczeń, stanowiły tak wybitny krok naprzód, że gdy co do tych ostatnich Euler wyrażał powątpiewanie, by ktokolwiek szereg liczb naturalnych doprowadził w nich kiedy choćby tylko do miliona, tablice Burckharda, obejmujące pierwotnie trzy miliony liczb naturalnych, z czasem przez Dasego rozszerzone zostały do dziewięciu miljonów. Stokroć większe uproszczenie w tym względzie wprowadza nowa tabelka Tarrye'go, stanowiąca początek całego prawdopodobnie szeregu tablic analogicznych. Za pomocą tej tabelki, umieszczonej na dwóch pełnych i czterech ponacinanych stronicach, obejmujących 5856 według pewnego sposobu otrzymanych liczb, można bardzo prostym rachunkiem odnaleść czynniki wszystkich liczb mniejszych od 100489, tak iż wystarczy ułożyć jeszcze sześć dalszych tabelek tego rodzaju, aby szereg liczb pierwszych doprowadzić do 3000, t. j. zawrzeć w nich cały materyał, mieszczący się w ogromnym tomie tablic Dasego. Gdy jednak te ostatnie zawierają czynniki jedynie pierwszych 9 milionów liczb naturalnych, przy pomocy wspomnianych siedmiu tabelek Tarry'ego będziemy mogli określić skład i każdej liczby przenoszącej 9 milionów, o ile w tym składzie mieszczą się czynniki nie większe

Digitized by Google

nad 3000. Słowem, tabelka Tarry'ego w zakresie tablic, podających pierwsze czynniki liczb naturalnych, tem jest niemal, czem tabelki Wrońskiego w zakresie tablic logarytmowych.

Znaczenie to jeszcze się potęguje przez to, że jest zbudowana na nadzwyczaj prostej zasadzie.

Przedewszystkiem zauważyć należy, że przystępując z jej pomocą do rozkładu danej liczby, winniśmy się zawczasu przekonać o niepodzielności tejże przez najmniejsze liczby pierwsze; czynniki takie bowiem najczęściej się przytrafiają, przytem, jak słusznie zauważył Gauss w kwestyi pokrewnej, przykrem i niewłaściwem jest stosowanie całego zasobu najrozmaitszych twierdzeń z teoryi liczb do odnajdywania takich czynników, które niejednokrotnie, dzięki znanym cechom podzielności, same się w oczy rzucają.

Oznaczmy więc takie liczby pierwsze, nie będące czynnikami danej do rozkładu liczby N, przez $p_1, p_2, \ldots p_i$, poczem utworzywszy z nich liczbę $p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \ldots p_i^{\pi_i} = A$ (zwaną zasadą tabelki, do której w następstwie przejdziemy), oznaczmy przez m iloraz, i przez ϱ resztę z dzielenia N przez A, tak iż:

$$N = Am + \varrho. \tag{1}$$

Co do ϱ, to można za nią przyjąć tak najmniejszą dodatnią, jako też i bezwzględnie dodatnią resztę liczby N według mod. A; w pierwszym razie $\varrho < A$, w drugim $|\varrho| < \frac{A}{2}$. Ponieważ N i A są, według założenia, niespółdzielne, przeto i $|\varrho|$ jest liczbą niespółdzielną z A, tak iż ϱ może przybierać jednę z $\varphi(A)$ lub $\varphi\left(\frac{A}{2}\right)$ wartości.

By sprawdzić podzielność liczby N przez jakąkolwiek liczbę pierwszą p, różną od zaznaczonych wyżej i liczb pierwszych, jako więc taką niespółdzielną z A, zauważmy, że wskutek tej niespółdzielności można zawsze znaleść taką liczbę a, któraby zadość czyniła kongruencyi:

$$aA \equiv 1 \pmod{p}, \tag{2}$$

a tem samem również z p była niespółdzielną.

Mnożąc teraz stronami równość (1) przez a i kładąc:

$$a\varrho \equiv r \pmod{p}, \tag{3}$$

Digitized by Google

gdzie przez r rozumiemy bezwzględnie najmniejszą resztę liczby $a\varrho$ według mod. p, znajdziemy:

$$aN \equiv m + \mathrm{r} \pmod{p}, \tag{4}$$

skąd czytamy, że jeżeli:

$$m + \mathrm{r} \equiv 0 \pmod{p}, \tag{5}$$

wtedy $aN \equiv 0 \pmod{p}$, czyli wskutek niespółdzielności liczb a i p:

$$N \equiv 0 \pmod{p}. \tag{6}$$

Przypuśćmy, że dla różnych wartości na ϱ i p określiliśmy odpowiednie wartości na r, zestawiając je w tabelce dwuwejściowej. Mając dla danej liczby N, wobec stałej przyjętej zasady A, określoną wartość na ϱ, w powyższej tabelce w kolumnie, mającej tę wartość $|\varrho|$ w nagłówku, i w wierszu odpowiadającym określonej wartości na p, znajdziemy wartość na r, odpowiadającą kongruencyi (5); wtedy, według (4) liczba pierwsza p będzie szukanym czynnnikiem danej N.

Ponieważ liczba kolumn w takiej tabelce powinna wynosić $\varphi(A)$ lub $\varphi\left(\frac{A}{2}\right)$, za zasadę A winniśmy przyjmować liczbę niezbyt dużą, lecz w takim razie liczba m bywa znaczną, co znów utrudnia sprawdzanie kongruencyi (5), które, o ile możności, wykonywać należy w pamięci.

By więc pozostać w zakresie małych wartości na m, a jednocześnie nie powiększać zbytnio liczby kolumn, weźmy jeszcze pomocniczą zasadę B, stanowiącą jeden z czynników dawnej zasady A, i podzielmy znów $|\varrho|$ przez B, otrzymując $|\varrho| = B\eta + r$, gdzie $r < B$ lub $|r| < \frac{B}{2}$, poczém kładąc $Bqa \equiv Q$, $ra \equiv R \pmod{p}$, zamiast (4) przyjdziemy do kongruencyi:

$$aN \equiv m \pm (Q + R) \pmod{p}, \tag{4a}$$

czyli:

$$\pm aN \equiv \pm m + (Q + R) \pmod{p}, \tag{4b}$$

zachowując znak górny lub dolny, stosownie do tego, czy reszta ϱ była dodatnią czy ujemną. W ten więc sposob o podzielności lub

Digitized by Google

niepodzielności liczby N przez p sądzimy teraz ze stosunku m względem dwóch liczb Q i R.

Druga z nich R względem ϱ, przy liczbie zasadniczej B, ma takież samo znaczenie co i dawna reszta r względem N przy zasadzie A wartości więc jej, odpowiadające różnym wartościom na r i p, zawarte będą w $\varphi(B)$ lub $\varphi\left(\frac{B}{2}\right)$ kolumnach tabelki, o której mowa była powyżej. Dla Q zaś możemy utworzyć podobnąż tabelkę z tą tylko różnicą, że zamieszczać w niej będziemy bezwzględnie najmniejsze według mod. p reszty nie wielokrotności ϱ, lecz Bu, o spółczynnikach dowolnych z szeregu liczb naturalnych.

By uniknąć, przy sprawdzaniu kongruencyi (4b), potrzeby zmiany znaków odczytanych w powyższej tabelce wartości na R i Q, umówmy się, że tylko w wyrażeniu na N uważać będziemy ϱ za resztę bezwzględnie najmniejszą, w wyrażeniu zaś na ϱ przyjmiemy r za resztę najmniejszą dodatnią. Jeżeli nadto się umówimy, że obie tabelki, tak dla R jako i dla Q, mają zawierać po równej liczbie kolumn, czyli po $\varphi(B)$, skutkiem czego za największą wartość q przyjmiemy $\varphi(B)$, to największą wartość na $|\varrho|$ określimy jako $B\varphi(B)+r<B(\varphi(B)+1)$, że zaś, według poprzedniej umowy, $|\varrho|<\frac{A}{2}$, najwłaściwiej i najprościej więc przyjąć: $A=2B(\varphi(B)+1)$.

Przypuśćmy teraz, że kolumny, z których każda dla pewnej wartości na q podaje szereg wartości na Q, odpowiadających kolejnym p, są ruchome, tak iż każdą z nich można umieścić obok odpowiedniej kolumny, podającej przy pewnem r wartości R dla kolejnych p; wtedy jednoczesne wartości na P i Q, które kłaść należy w kongruencyę (4b), znajdą się tuż obok siebie, dzięki czemu sprawdzenie tej kongruencyi będzie wielce ułatwione.

Z szeregu liczb pierwszych najmniejszych, o których wspomniano tu na samym początku, Tarry przyjął 2, 3, 5 i 7, tworząc z nich $B=210$, poczem zważając, że $\varphi(B)=48$, otrzymał $A=2.210.49=20580$. Łatwo zauważyć, że, o ile poprzestajemy na tych 4 co najwyżej liczbach pierwszych, na A otrzymamy liczbę, nie zawierającą innych czynników. Obie tabelki na R i Q zawierają po 48 kolumn, mieszczących dla poszczególnych r i q wartości R i Q, odpowiadające kolejnym liczbom pierwszym, których szereg, poczynając od $p=11$,

Digitized by Google

w obecnej tabelce Tarry doprowadził do $p = 313$. Kolumny na R (nieruchome) mają w nagłówku jednę z 48 liczb, mniejszych od 210 i z 210 niespółdzielnych, na Q zaś (ruchome) jednę z liczb od 1 do 48: idą zaś po sobie w ten sposób, że nagłówkowe ich liczby w pierwszej tabelce dopełniają się do 210, w drugiej do 49, tak iż obok kolumn z nagłówkami r i q mamy w nich odpowiednio kolumny $210-r$ i $49-q$; przy takim bowiem porządku kolumn, z dwóch sąsiednich wartości na R i Q, jako tworzących sumy kongruentne według mod. p z liczbami stałemi 210 w pierwszym i 210.49 w drugim razie, wystarczy jednę z nich znaleźć bezpośrednim rachunkiem, poczem drugą otrzymamy przez proste odejmowanie; w ten więc sposób rachunek przy układaniu tabelki zmniejsza się o połowę. Wreszcie co do tabelki ruchomej (na Q), to ona pomiędzy dwiema takiemi dopełniającemi się kolumnami zawiera kolumnę kolejnych liczb pierwszych (NP), dwie zaś sąsiednie takie trójki kolumn przedzielone są kolumną wyciętą którą umieścić należy na miejscu odpowiedniej kolumny tabelki nieruchomej.

Aby układ i sposób użycia tabelki Tarry'ego dokładniej wyjaśnić, przytaczam tu ją w formie zmniejszonej, biorąc za zasadę liczbę złożoną nie z 4, lecz tylko z 3 liczb pierwszych: 2, 3 i 5, mianowicie: $B = 30$, $\varphi(B) = 8$ i $A = 540$:

NP	1	29	7	23	11	19	13	17
7	1	1	0	2	4	$\overline{2}$	$\overline{1}$	3
11	1	$\overline{4}$	$\overline{4}$	1	0	$\overline{3}$	2	$\overline{5}$
13	2	6	1	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	0	$\overline{5}$
17	4	$\overline{3}$	$\overline{6}$	7	$\overline{7}$	8	1	0
19	$\overline{7}$	6	8	$\overline{9}$	$\overline{1}$	0	4	$\overline{5}$
23	$\overline{2}$	11	9	0	1	8	$\overline{3}$	$\overline{11}$

Tabelka wartości R.

Digitized by Google

1	NP	8		2	NP	7		3	NP	6		4	NP	5
2	7	2		$\overline{3}$	7	0		$\overline{1}$	7	$\overline{2}$		1	7	3
$\overline{3}$	11	$\overline{2}$		5	11	1		2	11	4		$\overline{1}$	11	$\overline{4}$
$\overline{5}$	13	$\overline{1}$		3	13	4		$\overline{2}$	13	$\overline{4}$		6	13	1
1	17	8		2	18	7		3	17	6		4	17	5
$\overline{1}$	19	$\overline{8}$		$\overline{2}$	19	$\overline{7}$		$\overline{3}$	19	$\overline{6}$		$\overline{4}$	19	$\overline{5}$
9	23	3		$\overline{5}$	23	$\overline{6}$		4	23	8		$\overline{10}$	23	$\overline{1}$

Tabelka wartości Q.

Digitized by Google

Przykład 1. $N=731$, $m=1^+$ (w ten sposób zaznaczać będziemy. że $\varrho > 0$); $q=6$, $r=11$. Dla $p=17$ mamy $Q=6$, $R=-7$, tak iż $m+(Q+R)=0$ (mod. 18), co dowodzi, że dana liczba podzielna jest przez 17; jakoż $731=17.43$.

Przykład 2. $N=10013$, $m=19^-$ ($\varrho < 0$); $q=8$, $r=7$. Dla $p=17$ mamy $Q=8$, $R=-6$, tak iż $-m+(Q+R)=0$ (mod. 17); dla $p=19$, $Q=-8$, $R=8$, również $-m+(Q+R)=0$ (mod. 19), $10013=17.19.31$.

W ogóle, aby przy pomocy tabelki Tarry'ego określić skład danej liczby, winniśmy naprzód podzielić ją przez 20580, otrzymany zaś iloraz m oznaczyć znakiem $+$ lub $-$, stosownie do tego, czy na liczebnie najmniejszą resztę otrzymamy liczbę dodatnią czy ujemną; powyższą resztę podzielić znów przez 210, otrzymując q i r; kolumnę q tabelki ruchomej przesunąć do kolumny r tabelki nieruchomej, kolejne ich liczby Q i R kładąc w wyrażeniu $\pm m+(Q+R)$, dopóki nie sprawdzi się kongruencya (4b), wyznaczając czynnik szukany p, lub też nie wyczerpiemy całego szeregu zawartych w tabelce liczb pierwszych.

Zaznaczyć wreszcie należy, że gdy $m > p$, można m zastąpić przez najmniejszą jej dodatnią resztę według mod. p; w obecnej tabelce, którą autor przeznacza dla liczb < 100489, przypadek ten nie zachodzi. W dalszych jednak tabelkach autor zamierza wprowadzić jeszcze dodatkowe kolumny do podobnej zamiany liczby m.

Przypisek. W czasopiśmie „L'Enseignement mathématique" t. IX str. 185—191 E. Lebon opisuje ułożoną przez siebie jeszcze w r. 1905, tabelkę wartości R dla $A=30030=2.3.5.7.11.13$, która jak z powyższego wynika, może jedynie mieć znaczenie jako pierwowzór obecnej tabelki Tarry'ego.

Digitized by Google

Digitized by Google

WŁ. GORCZYŃSKI.

Wiadomość o sieci meteorologicznej serbskiej i o Obserwatoryum w Belgradzie.

Pierwsze zaczątki meteorologii serbskiej datują się od r. 1857, w którym, dzięki inicyatywie i usiłowaniom W. Jakšiča, profesora liceum i późniejszego kierownika biura statystycznego w Belgradzie rozpoczęte zostały systematyczne spostrzeżenia w mieście stołecznem i kilkunastu innych punktach na terytoryum Serbii.

Obserwacye Jakšiča prowadzone były w domu prywatnym i były dorywczo ogłaszane w wydawnictwie literackiem „Szumadinka" (np. za czerwiec 1857); prócz Belgradu, podawane były wyniki średnie z głównych elementów meteorologicznych z 28 innych miejscowości.

W broszurce „Meteorołogijsko zawedenie w Serbii" (Belgrad), str. 16, 1857), napisanej przez wyżej wspomnianego autora, znajdujemy rodzaj odezwy do społeczeństwa serbskiego o poparcie i rozwój klimatologii krajowej; Jakšič, który studyował w Paryżu, powołuje się na przykład Europy Zachodniej i głównie ówczesnych poszukiwań Leverriera w dziale meteorologii synoptycznej.

Dzieje sieci, stworzonej przez Jakšiča, były niestety nader krótkie i już po dwóch latach (1856—7) spostrzeżenia uległy przerwie i, jak się zdaje, nie były kontynuowane aż do r. 1887, w którym rozpoczął swą pracę następny działacz na polu meteorologii serbskiej, obecny dyrektor Obserwatoryum w Belgradzie prof. Milan Nedelkovič.

Od r. 1887 do 1891 spostrzeżenia były prowadzone w lokalu prowizorycznym, poczem przeniesione były do nowozbudowanego Obserwatoryum. Wyniki obserwacyj (7 razy dziennie od 4^h_a do 10^h_p) barometru, termometru, wilgotności bezwzględnej i względnej, wia-

Digitized by Google

tru, zachmurzenia i opadów wraz z zestawieniem miesięcznem i tekstem o przebiegu pogody były in extenso publikowane w wydawnictwie oficyalnem „Prosvetni Głasnik“ od lipca 1887 r. do grudnia 1889 r. Dodamy, że przyrządy i w ogóle sposób prowadzenia wzorowany był na stacyach francuskich.

Od r. 1890 do r. 1901 jest znaczna przerwa w peryodycznych publikacyach spostrzeżeń miesięcznych w Belgradzie; przerwa ta wynika po części z przyczyn natury materyalnej, w części zaś z powodu choroby dyrektora Obserwatoryum M. Nedelkoviča. Dopiero w r. 1902 pojawił się „Bulletin mensuel de l'Observatoire Central de Belgrade“ (vol. I, Année 1902, Belgrad, 4-o.), ukazujący się początkowo w odstępach miesięcznych, następnie jednak roczniki opóźniały się tak, że w roku 1907 ukończone zostało wydawnictwo trzech lat 1902—1903—1904. Następne roczniki są opracowane i przygotowane do druku.

Wypada nadmienić, że w archiwum Obserwatoryum w Belgradzie znajduje się pełny zbiór obserwacyj od r. 1887 do czasów obecnych, tak że, mimo przerwy w publikacyach, seryę spostrzeżeń można uważać za ciągłą. Zresztą obecny dyrektor zamierza, łącznie z bieżącemi rocznikami, wydawać w miarę możności i lata ubiegłe z okresu 1890—1901.

Zabiegom prof. M. Nedelkoviča zawdzięcza literatura i sieć meteorologiczna serbska kilka obszernych rozumowanych instrukcyj, które uważać można poniekąd za podręczniki meteorologii obserwacyjnej. W książce „Meteorologoszka Uputstwa za stacije III reda i niže stacije“ (Instrukcye meteorologiczne dla stacyj rzędu III i rzędów niższych), wydanej w Belgradzie w r. 1895 (str. 237 formatu dużej ósemki) podane są w sposób wyczerpujący i zgodny z ówczesnym stanem nauki wiadomości o urządzaniu i prowadzeniu spostrzeżeń. Broszura p. t. „Uputstwo za posmatranie nepogodskich pojawa“ (Instrukcye o notowaniu pojawów burzowych), wydana w r. 1901, w bardzo dobry sposób poucza o obserwacyach burz. Książka „Kiszomerske stacije“ (stacye deszczowe), wydana w Belgradzie w r. 1903, zawiera dokładny opis (na 256 str.) urządzeń pluwiometrycznych z dodatkiem o notowaniach temperatury. Wreszcie treściwą instrukcyę opracował dyrektor Nedelkovič w broszurze „Dnewnik posmatrania i meseczna tablica stacija II i III reda“ (Belgrad, 1903, str. 48).

Digitized by Google

W książce „Izwesztaj opserwatorije Welike Szkole z nienich meteorołogiszkich stacija 1899—1903“ (Wiadomość o obserwatoryum Uniwersytetu i o jego stacyach meteorologicznych w okresie 1899—1903)" wydanej w r. 1904, podał M. Nedelkovič referat historyczny o pracach i zasobach Obserwatoryum w Belgradzie, kładąc nacisk na okres 1899—1900, w którym od lipca 1899 do października 1900 roku był usunięty od czynności z przyczyn natury politycznej. W tym czasie godność dyrektora piastował niejaki G. M. Stanojevič, który wydawał przez czas krótki publikacyę miesięczną (po serbsku i po francusku), pozbawioną wartości naukowej. W r. 1904 pojawiło się także sprawozdanie z czynności Obserwatoryum za r. 1904 (Izwesztaj opservatorije i meteorołogiszkich stacija 1904); sprawozdania te będą wydawane i za następne okresy.

Rocznik „Bulletin mensuel de l'Obs. Central de Belgrade“ za rok 1902 podaje wyniki miesięczne z 21 stacyj rzędu II, 48 rzędu III i 146 punktów deszczowych. Obserwacye z Obserwatoryum w Belgradzie (czynione bezpośrednio w odstępach godzinnych w ciągu całej doby) podane są in extenso.

Liczba stacyj sieci meteorologicznej serbskiej ulegała wahaniom, wynosząc w maximum do 250; obecnie (w r. 1908) jest 60 stacyj na terytoryum Serbii, z których 14 jest rzędu II, a 12 rzędu III. Przeważna część obserwatorów rekrutuje się ze sfery nauczycielskiej oraz z asystentów przy stacyach doświadczalnych rolnych.

Po tym krótkim wykazie publikacyj meteorologicznych sieci serbskiej, podamy treściwe wiadomości o urządzeniu Obserwatoryum Meteorologicznego w Belgradzie. Obserwatoryum to mieści się w osobnym gmachu na końcu miasta i otoczone jest obszernym parkiem.

W parku tym mieszczą się dwa ogrodzenia: w pierwszem znajduje się ewaporometr Wilda (w osobnej budce), w drugiem są termometry (systemu Baudina) oraz termograf i hygrograf konstrukcyi Richarda, a także hygrometr Koppe. Wspomnimy, że dawniej ustawiony ewaporograf Richarda został, z powodu złego funkcyonowania, usunięty.

W pobliżu budek termometrycznych (systemu francuskiego) znajduje się na osobnym słupku zegar słoneczny, a także serya pluwiografów (Richard, Hellmann), oraz pluwiometr (według Baudina, 70-milimetrowy).

Digitized by Google

Nader obszerna jest serya termometrów na powierzchni ziemi oraz termometrów gruntowych (do głębokości 24 metrów). Ze względu na możliwe zastosowania rolnicze termometry na powierzchni ziemi umieszczone są w różnych warunkach (trawa, piasek, grunt skalisty i t. p.); każdy komplet składa się z trzech termometrów (zwyczajny, max. i min.) i odczytania prowadzone są 3 razy dziennie, a mianowicie o 7^h_a, 2^h_p i 9^h_p.

W pobliżu termometrów gruntowych znajdują się dwa t. zw. „aktynografy" Arago-Davy, a także konstrukcya Richarda. Wspomnieć również należy, że po trzy termometry umieszczone są także (bez osłony) na wysokości 40 cm. oraz 1m. i 2m. nad powierzchnią gruntu.

W osobnym pawilonie mieszczą się przyrządy seismograficzne (samopiszący Vicentini-Konkoly i seismoskop Agamemnone), prócz tego znajduje się pawilon astronomiczny (głównie do wyznaczań czasu) oraz pawilony magnetyczny i do elektryczności atmosferycznej.

W głównym gmachu Obserwatoryum znajduje się, prócz gabinetu dyrektora, biblioteki i biura, pokój z przyrządami normalnymi, z seryą anemografów Richarda i barografami rtęciowymi (Richard i Fues). Części górne anemografów oraz anemometry (Wild i Robinson) mieszczą się na terrasie górnej na dachu, gdzie funkcyonuje także heliograf systemu Campbella.

Obserwatoryum w Belgradzie otrzymuje codziennie depesze synoptyczne z Budapesztu (kumulacyjna dla Europy Zachodniej) oraz z Sofii, Aten, Bukaresztu, Konstantynopola (konsulat francuski) i z 15 stacyj serbskich. Materyały te są zużytkowywane do układania map synoptycznych, które jednak tymczasowo nie są wydawane osobno i mają charakter studyów wstępnych co do widoków powodzenia prognoz synoptycznych dla terytoryum serbskiego.

Dyrektor obserwatoryum w Belgradzie i zarazem profesor tamtejszego uniwersytetu Milan Nedelkovič od długiego szeregu lat pracuje nad zbieraniem materyałów klimatologicznych dla Serbii mimo nadzwyczajnie szczupłych subsydyów rocznych (około 10,000 fr.), otrzymywanych w tym celu od parlamentu. Ten ogromny brak zasobów i łącznie z tem brak odpowiednio wykształconych współpracowników sprawia, że mimo posiadania zasobnego i dobrze zorganizowanego Obserwatoryum, praca publikacyjna i dozór sieci są silnie zahamowane w swym stałym rozwoju.

Digitized by Google

Zaznaczymy, że dyrektor Obserwatoryum posiada do pomocy 1 asystenta, 4 młodszych obserwatorów (notujących co godzina na zmiany w ciągu całej doby) oraz 6 współpracowniczek biurowych; osobny urzędnik telegrafu zajmuje się odbiorem i odcyfrowywaniem depesz synoptycznych.

Przy zwiedzaniu Obserwatoryum w Belgradzie w d. 10, 11 i 12 marca 1907 r. korzystaliśmy z nader uprzejmych i gruntownych wyjaśnień oraz pomocy dyrektora M. Nedelkoviča oraz prof. liceum D. Marianoviča, którym pragniemy też wyrazić przy tej sposobności naszą zupełną wdzięczność i podziękowanie.

Digitized by Google

Digitized by Google

PRZEGLĄD LITERATURY. BIBLIOGRAFIA.

Prace Brunona Abdanka-Abakanowicza. Tom I. Z portretem autora. Warszawa 1907. Staraniem Redakcyi „Prac matematyczno-fizycznych. 8-o, str. 400. Tom ten obejmuje: Zarys Statystyki wykreślnej ogłoszony przez Abakanowicza w r. 1876 i wszystkie jego noty i rozprawy, dotyczące integratrów i integrafów, między innemi przekład dzieła o Integrafach (wydanie francuskie 1886, niemieckie 1887) dokonane przez St. Bouffałła.

St. Bouffałł, W. Gorczyński i R. Merecki. Wiadomości z nauki o pogodzie, według odczytów L. Webera. „Wind und Wetter" oraz F. Houdaille'a: „Météorologie agricole", spolszczył St. Bouffałł i „Szkic klimatologii ziem polskich" przez R. Mereckiego, z Wstępem o prowadzeniu spostrzeżeń meteorologicznych przez W. Gorczyńskiego Warszawa 1907, str. XXXIV, 291.

H. Merczyng. Bieg cieczy w rurociągach przy znacznem przecięciu żyły ciekłej i znacznej chyżości. Osobne odbicie z t. XLVIII seryi A Rozpraw Wydziału mat.-przyr. Akademii Umiejętności w Krakowie, 1907, str. 21.

Lucyan Grabowski. O błędach fizyologicznych przy pomiarach astronomicznych za pomocą mikrometrów okultacyjnych. Osobne odbicie z tomu XLVII Seryi A Rozpraw Wydziału mat.-przyr. Akademii Umiejętności w Krakowie, 1907, str. 21.

Digitized by Google

L. Bruner und J. Dłuska. Chemische Dynamik der Bromierung des Toluols. Extrait du Bulletin de l'Académie des sciences de Cracovie, Classe des sciences mathématiques et naturelles. Juillet 1907, str. 691—730.

L. Bruner. Ueber die elektrolytische Leitfähigkeit von Brom und Jod in Nitrobenzollösungen. Extrait du Bulletin de l'Académie des sciences de Cracovie. Classe des sciences mathématiques et naturelles. Juillet, 1907, p. 731—738

J. Laub, Zur Optik der bewegten Körper. Separatabdruck aus den Annalen der Physik, Vierte Folge, Band 23, 1907, str. 738—744.

H. Czopowski. Wstęp do Termodynamiki. Odbitka z „Przeglądu Technicznego" z r. 1907, 8-ka większa, str. 24. Warszawa, 1907.

Wł. Natanson. Odczyty, szkice przez....., profesora Uniwersytetu Jagiellońskiego. Warszawa. Nakładem księgarni E. Wende i S-ka (T. Hiż i A. Turkuł) 1907. Cena 60 kop. 16-ka, str. 130.

Książeczka ta zawiera pięć odczytów: 1) Pogląd na rodzaje zjawisk w świecie materyalnym. 2) Inercya i koercya; dwa pojęcia ogólne w teoryi zjawisk fizycznych, 3) O teoryach materyi. 4) Szkice z zakresu Fizyki elektronowej. 5) Świat widziany od strony elektrycznej (Odczyt, wygłoszony na pierwszem posiedzeniu ogólnem X-go Zjazdu lekarzy i przyrodników polskich we Lwowie d. 22 lipca 1907 roku).

Dr. St. Kępiński. Podręcznik równań różniczkowych ze szczególnem uwzględnieniem potrzeb techników i fizyków. Część I. Równania różniczkowe zwyczajne. 8-ka, str. VIII, 195.; Część II. Bównania różniczkowe cząstkowe. 8-ka, str. 199 Biblioteki politechnicznej tom XVIII. Nakładem Komisyi wydawniczej Biblioteki politechnicznej, Lwów 1907.

Część pierwsza obejmuje następujące rozdziały: I. Równania różniczkowe zwyczajne rzędu 1-go. II. Punkty osobliwe równań rzędu 1-go. III. Układ dwu równań jednoczesnych rzędu 1-go. IV. Punkty osobliwe układu równań. V. Równania różniczkowe rzędu 2-go. VI. Punkty osobliwe równania liniowego jednorodnego rzędu 1-go. VII. Układ n równań jednoczesnych rzędu 1-go. VIII. Równania różniczkowe n-go. Część druga obejmuje twierdzenie Cauchy'ego o istnieniu całki ogólnéj, rozdziały: I. Równania różniczkowe cząstkowe rzędu 1-go. II. Równania różniczkowe cząstkowe rzędu 2-go oraz nastę-

Digitized by Google

pujące dodatki: I. Jakobian. II. Całki i szeregi Fouriera. III. Funkcye kuliste. IV. Funkcye walcowe Bessela. V. Całki i funkcye eliptyczne.

W. Ehrenfeucht. Miernictwo. Tom I. Warszawa. Druk Tow. Akc. S. Orgelbranda Synów. 1907. 4-o mniejsze, str. VIII, 239.

TREŚĆ. Wstęp- Część pierwsza. Zdjęcie planu. Rozdziały: I. Oznaczanie punktów na gruncie i bezpośrednie pomiary odległości. II. Pomiar kątów na gruncie. III. Wyznaczanie punktów podstawowych zapomocą wielokątowania. IV. Zadanie Pothenota. Zadanie Hansena. V. Węgielnice i ich zastosowanie. Część druga. Poziomowanie. Rozdziały: VI. Poziomowanie zwyczajne (niwelacya). VII. Poziomowanie kątowe. VIII. Poziomowanie barometryczne. Część trzecia. Tachimetrya. Rozdziały: IX. Dalmierz. X. Tachimetry. XI. Fotogrametrya. Część czwarta. XII. Tyczenie prostych zapomocą teodolitu. XIII. Wytykanie łuków kół. XIV. Planimetrya.

Z publikacyj towarzystw naukowych i z czasopism.

Bibliotheca mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. herausgegeben von Gustaf Eneström in Stockholm. Leipzig, Teubner, 1907. Zeszyt 4-y tomu 8-go seryi 3-ej zawiera między innemi artykuł p. t. Eine neue Schrift des Archimedes von J. L. Heiberg und H. G. Zeuthen in Köbenhavn.

Odkrycie nieznanego dotąd pisma Archimedesa sprawiło wielkie wrażenie w świecie naukowym. J. L. Heiberg w lecie roku 1906 badał w Konstantynopolu w metochionie klasztoru Świętego Grobu w Jerozolimie rękopis, który pod modlitewnikiem z 13-go wieku zawiera pismo Archimedesa w pięknych minuskułach 10-go stulecia; po obmyciu, dało ono się czytać przy pomocy lupy. Stary tekst okazał się tekstem Archimedesa. Zawiera ten rękopis dużą część pism znanych, prawie całkowity tekst pisma Περί ὀχουμένων, znanego dotąd tylko z przekładu łacińskiego, dokonanego przez Wilhelma von Moerbecka, początek rozprawy o στομάχιον, ogłoszonej tylko w cząstce przez Sutera z zachowanego przekładu arabskiego. Ale najważniejszą zdobyczą, zawartą w tym rękopisie, jest spora część pisma p. t.: Ἀρχιμήδους περί τῶν μηχανικῶν θεορημάτων πρός Ἐρατοσθένην ἔφοδος. Jest to Ἐφοδικόν, komentowany przez Teodozyusza i cytowany wielokrotnie przez Herona (Μετρικά). Z cytowanego przez Herona twierdzenia o powierzchni odcinka parabolicznego zachował się tylko dowód mechaniczny, zapowiedziany zaś geometryczny (ten sam, który znajduje się w zachowanej Quadratura parabolae) zaginął wraz z końcem dzieła. Natomiast z dowodów innego twierdzenia, cytowanego u Herona (o objętości podkowy walcowej) zachowało się tyle, że można całkowicie odtworzyć tekst. W ogóle luki w części zachowanej nie mają wielkiego znaczenia.

Digitized by Google

Heiberg w omawianym zeszycie podaje przekład niemiecki tego pisma Archimedesa. a odtworzony tekst grecki wraz z komentarzem filologicznym przeznacza do pisma „Hermes". Przekład zajmuje przeszło stron 20. Po przekładzie następuje komentarz, napisany przez Zeuthena, z którego wyjmujemy niektóre ustępy.

To pismo — powiada Zeuthen — pozwala wejrzeć poraz pierwszy w pracownię matematyczną Archimedesa, który zwykł był tylko podawać gotowe twierdzenia i dowody; jest ono niezmiernie nauczającem, bo odsłania nam sposób pracy Archimedesa, jego ujmowanie przedmiotu. a przez to i ujmowanie przedmiotu przez matematyków w starożytności.

Miejsce, które pismo to zajmuje chronologicznie w szeregu znanych prac Archimedesa, nie daje się ustalić z zupełną pewnością. Dowiadujemy się z zakończenia rozdziału I-go, że poprzedziło je inne pismo o kwadraturze paraboli, posłane Dositheosowi w Aleksandryi. Jeszcze dawniejszemi były zagadnienia i twierdzenia, posłane Kononowi w Aleksandryi i powtórzone we wstępie do pisma o spiralnych. W pierwszem z tych zagadnień idzie o wyznaczenie powierzchni płaskiej, równej powierzchni danej kuli. Zadanie to, gdy ukazało się pismo o spiralnych, było już rozwiązane w pierwszej księdze o kuli i walcu, poczem podane było wyznaczenie powierzchni odcinka kulistego, objętości kuli i odcinka kulistego. Prócz twierdzeń, mających być dowiedzionemi o spiralnych, wymienia jeszcze Archimedes pomiędzy twierdzeniami, posłanemi Kononowi, wyznaczenie objętości odcinka paraboli obrotowej. Dowiódł później tego twierdzenia w piśmie o konoidach i sferoidach, i dodał jeszcze wyznaczenie objętości odcinków hyperboloidy dwupowłokowej obrotowej i elipsoidy obrotowej. Nowo odkryte pismo Archimedesa porusza częściowo te same pytania, które są zawarte w pismach o kuli i walcu, oraz w piśmie o konoidach i sferoidach, lecz w sposób zupełnie odmienny.

Początek przedmowy wskazuje, że pismo to zostało posłane znanemu uczonemu Eratostenesowi w Aleksandryi. Archimedes mówi dalej o metodzie mechanicznej, która, obok metody geometrycznej dowodzenia dwóch twierdzeń głównych, stanowi przedmiot główny całej pracy. We wszystkich swoich innych pismach Archimedes opiera swoją ścisłą metodę uzasadnienia (metoda wyczerpania) twierdzeń natury nieskończonostkowej na znanym postulacie (lemma), który dziś nosi nazwę postulatu Archimedesa. W piśmie nowoodkrytem pozwala sobie trójkąt i odcinek paraboli uważać za powstające z szeregów cięciw równoległych, a walec, kulę i stożek z szeregów równoległych przekrojów kołowych. W ten sposób, oszczędzając sobie i czytelnikom trudu długich dowodzeń przy pomocy metody wyczerpania (którą, zresztą, według zwykłych prawideł, łatwo rozwinąć można), wyprowadza na kilku stronicach wielką liczbę twierdzeń. Po przedmowie wymienia założenia statyczne, które stosować będzie w swojej metodzie. Dotyczą one przeważnie założeń o środkach ciężkości figur płaskich (podanych przez samego Archimedesa w pierwszej księdze o równowadze figur płaskich). Zeuthen, oprócz kilku ważnych uwag historycznych o tych założeniach mechanicznych, których tu

Digitized by Google

powtarzać nie możemy, zwraca jeszcze uwagę na to, że użycie środka ciężkość stożka (którego wyznaczenie przez całkowanie wymaga znajomości całki $\int_0^a x^2 dx$) pozwala Archimedesowi wykonać jeszcze inne wyznaczenie, które nas dziś prowadzi do tej samej całki, podobnież jak przy kwadraturze paraboli znajomość środka ciężkości trójkąta zastępuje całkowanie $\int_0^a x^2 dx$.

Sitzungsberichte der Königl. Preussischen Akad. der Wiss. Zeszyt XXVII, XXVIII i XXIX (str. 542—570) zawiera ważną rozprawę M. Plancka p. t. „Zur Dynamik bewegter Systeme". O doniosłości tej pracy świadczy wstęp, który w przekładzie podajemy. Odkąd, powiada autor, nowsze badania nad promieniowaniem cieplnem, tak doświadczalne jak i teoretyczne, doprowadziły zgodnie do wyniku, że układ, wyzuty z jakiejkolwiek materyi ważkiej a utworzony jedynie z promieniowania elektromagnetycznego, podlega tak prawom zasadniczym Mechaniki, jak i dwóm twierdzeniom zasadniczym Termodynamiki z taką dokładnością, że żaden z wniosków, wyprowadzonych dotąd z tych twierdzeń, nie pozostawia nic do życzenia—stało się koniecznem poddanie zasadniczej rewizyi szeregu wyobrażeń i pojęć, które uważano dotąd zwykle za założenia stałe i prawie oczywiste wszelkich spekulacyj teoretycznych w tej dziedzinie. Bliższe rozważanie okazuje, że niektóre z tych najprostszych i najważniejszych pojęć będą mogły mieć w przyszłości charakter przybliżeń, wprawdzie bardzo daleko idących i praktycznie ważnych, nie mogących wszakże rościć pretensyi do bezwzględnej dokładności.

Oto przykłady.

Zwykle uważa się energię poruszającego się ciała ważkiego jako złożoną (przez dodawanie) z wyrazu niezależnego od wewnętrznego stanu ciała i zmieniającą się tylko wraz z jego prędkością (energia ruchu postępowego) i drugiego wyrazu niezależnego od prędkości, lecz zależnego od stanu wewnętrznego, mianowicie od gęstości, temperarury i natury chemicznej (energia wewnętrzna ciała). Rozkład ten wszakże nie jest odtąd zasadniczo dopuszczalny, w żadnym przypadku. Albowiem każde ciało ważkie zawiera we wnętrzu swem skończoną, wyznaczyć się dającą, ilość energii w postaci ciepła promienistego i jeżeli ciału nadajemy pewną prędkość, to promieniowanie cieplne podlega też ruchowi. Dla promieniowania zaś cieplnego, będącego w ruchu, jakkolwiek energia jego zależy wyraźnie od prędkości ruchu, rozdział energii na wewnętrzną i postępową jest niemożliwy, a zatem rozdział ten nie daje się także przeprowadzić i dla energii całkowitej. Lubo więc w większości przypadków pozostałe rodzaje energii przeważają znacznie energię wewnętrzną promieniowania, istnieje ona przecież w ilości wyznaczalnej, a nawet w pewnych okolicznościach zrealizować się dających, jest ona tego samego rzędu wielkości co tamte.

Najwyraźniejszą jest jej wielkość dla ciał gazowych. Jeżeli weźmiemy np spoczywający idealny gaz jednoatomowy pod ciśnieniem p przy temperaturze T, to energia promieniowania istniejąca w gazie jest aVT^4, gdzie w układzie bez-

Digitized by Google

względnym C. G. S. jest $a=7{,}061.10^{-15}$, $V=\frac{RNT}{p}$ (N jest liczbą molów, $T=8{,}31.10^{7}$) Energia zaś wewnętrzna gazu, o ile pochodzi od siły żywej ruchów cząsteczkowych, jest $Nc_v T+$ const, gdzie c_v jest ciepłem molowem przy stałej objętości i w tymże układzie miar równa się $3.4.19.10^{7}=1{,}257.10^{8}$. Jeżeli doprowadzimy ciepło do gazu zewnątrz przy stałej objętości, to ciepło to rozdzieli się pomiędzy dwa wymienione rodzaje energii w stosunku:

$$\frac{4aVT^3}{Nc_v}=\frac{4aRT^4}{c_v p}.$$

Dla ciśnienia 0.001 mm i temperatury topniejącej platyny, a więc w mierze bezwzględnej, $p=1{,}33$, $T=1790+273=2063$; stosunek ten przy użyciu liczb podanych jest równy 0.25. To znaczy, że przy przyjęciu powyższych wartości na ciśnienie i temperaturę, przy ogrzewaniu gazu jednoatomowego, ciepło, służące do powiększenia energii promieniowania, stanowi czwartą część ciepła, przypadającego na ruchy cząsteczkowe.

Drugi przykład dotyczy masy bezwładnej ciała. Pojęcie masy, jako pewnego quantum, bezwzględnie niezmiennego przy działaniach fizykalnych lub chemicznych, należy od czasów Newtona do fundamentów Mechaniki. Jeżeli jakiej wielkości należy się atrybut stałości, to tej przedewszystkiem. Ona to aż do najnowszych czasów, a więc i w Mechanice Hertza, uważana była za własność zasadniczą materyi i dla tego była kamieniem węgielnym prawie w każdym fizykalnym układzie świata.. Mimo to, można dziś dowieść całkiem ogólnie, że masa każdego ciała jest zależna od temperatury, albowiem masa bezwzględna określa się najbezpośredniej przez energię kinetyczną. A ponieważ, jak wyżej okazano, energia ruchu postępowego nie daje się oddzielić w zupełności od jego stanu wewnętrznego, wynika stąd odrazu, że stała o własnościach masy bezwzględnej istnieć nie może. Powód leży znów w energii wewnętrznego promieniowania cieplnego, które ma napewno udział w bezwładności ciała, niewielki wprawdzie lecz wyznaczyć się dający, a to mianowicie przez wyraz, zależny od gęstości promieniowania, t. j. od temperatury. Jeżeli zaś, zamiast przez energię, zechcemy, określić masę przez ilość ruchu, mianowicie jako iloraz ilości ruchu przez prędkość, nie dojdziemy też do innego wyniku, gdyż, według badań H. A. Lorentza, H. Poincarégo i M. Abrahama, promieniowanie wewnętrzne ciepła poruszającego się podobnie. jak każde promieniowanie elektromagnetyczne, posiada oznaczoną skończoną ilość ruchu, zawartą w całkowitej ilości ruchu ciała. Lecz ta, podobnie jak energia promieniowania, zależy od temperatury, a więc zależy od temperatury i zdefiniowana przez nią masa.

Wybieg, polegający na odróżnieniu masy „istotnej“ od „pozornej“, i przyznanie jedynie pierwszej z nich bezwzględnej stałości, jest tylko innem sformułowaniem tego samego stanu rzeczy. Bo jeżeli tylko masa „istotna“ posiada stałość, to z drugiej strony traci ona dotychczasowe znaczenie swoje dla energii kinetycznej i ilości ruchu.

Do tego rozważania przyłącza się odrazu trzeci przykład, mianowicie pytanie, dotyczące tożsamości masy bezwzględnej i masy ważkiej. Promie-

Digitized by Google

niowanie cieplne w przestrzeni całkowicie próżnej, ograniczonej ścianami zwierciadlanemi, posiada masę bezwładną, lecz czy posiada masę ważką? Jeżeli na pytanie to dać odpowiedź przeczącą—co wydawałoby się najwłaściwszem—to przez to oczywiście zniesiemy stwierdzoną wszelkiemi dotychczasowemi doświadczeniami i powszechnie przyjmowaną tożsamość masy bezwładnej i ważkiej. Nie można tego odeprzeć, twierdząc, że bezwładność promieniowania w przestrzeni próżnej jest nieskończenie mała względem bezwładności ścian materyalnych, stanowiących ograniczenie. Rzecz się ma przeciwnie: przy dostatecznie wielkiej objętości przestrzeni próżnej bezwładność promieniowania można nawet uczynić dowolnie wielką w porównaniu z bezwładnością ścian. Takie promieniowanie w próżni, odcięte zupełnie od przestrzeni zewnętrznej przy pomocy cienkich, sztywnych, zwierciadlanych ścian, zresztą dowolnie poruszających się, daje naoczny przykład ciała sztywnego, którego prawa ruchu całkowicie odbiegają od praw zwykłej Mechaniki. Bo jakkolwiek zewnętrznie uważane, ciało to niczem się nie różni od innych ciał sztywnych, posiada pewną masę bezładną i ulega prawu bezwładności (zachowania), to wszakże masa jego zmienia się wyraźnie z temperaturą; prócz tego zależy w sposób określić się dający od wielkości prędkości i od kierunku, jaki siła poruszająca tworzy z prędkością. Przytem własności tego ciała nie mają w sobie nic hypotetycznego, lecz dają się ilościowo wyprowadzić we wszystkich szczegółach z praw znanych.

Wobec takiego stanu rzeczy, gdy niektóre z poglądów i twierdzeń, uważanych dotąd za najtrwalszą podporę rozważań teoretycznych wszelkiego rodzaju, tracą swój charakter ogólny, staje przed nami zadanie niezwykłej ważności, by z pośród twierdzeń, które stanowiły dotąd podstawę Dynamiki ogólnej, wydzielić i postawić na widoku te, które utrzymały swoją bezwzględną dokładność wobec wyników badań najnowszych; gdyż tylko te twierdzenia będzie można stosować i nadal przy budowaniu fundamentów Mechaniki. Nie znaczy to bynajmniej, że twierdzenia, które wyżej przedstawiliśmy jako wyraźnie niedokładne, mają być w przyszłości wycofane z użycia, gdyż to, co powiedziano wyżej, nie zmienia wcale olbrzymiego znaczenia praktycznego, jakie posiadają w wielkiej liczbie przypadków: rozkład energii na wewnętrzną i postępową, przyjęcie bezwzględnej niezmienności masy, założenie o tożsamości masy bezwzględnej i ważkiej; nigdy też nie będziemy w tem położeniu, abyśmy się mieli wyrzec stosowania powyższych upraszczających przypuszczeń. Ale ze stanowiska teoryi ogólnej trzeba bezwarunkowo i zasadniczo odróżniać te twierdzenia, które należy uważać za przybliżenia, od twierdzeń, które mają dokładność zupełną, chociażby dla tego, że dziś nie można wcale przewidzieć, do jakich konsekwencyj doprowadzić nas może kiedy dalszy rozwój teoryi dokładnej. I nieraz też w praktyce zachodziły daleko sięgające przewroty, wynikające z odkrycia pozornie małych niedokładności w teoryach, uchodzących powszechnie za dokładne.

Jeżeli zapytamy tedy, które z podstaw Dynamiki ogólnej są rzeczywiście dokładne, to ze wszystkich znanych twierdzeń pozostaje najprzód tylko z a s a d a n a j m n i e j s z e g o d z i a ł a n i a, która, jak to wykazał H e l m h o l t z (Wissenschaftl. Abh. III, str. 203, 1895) obejmuje w sobie Mechanikę, Elektrodynamikę oba twierdzenia zasadnicze Termodynamiki w ich zastosowaniu do zjawisk od-

Digitized by Google

wracalnych. Wykazuję poniżej, że w tejże zasadzie zawierają się prawa poruszającego się promieniowania w próżni. Ale zasada najmniejszego działania nie wystarcza jeszcze do ugruntowania pełnej Dynamiki ciał ważkich, albowiem sama przez się nie wystarcza ona do zastąpienia uznanego wyżej za niedopuszczalny rozdziału energii ciała na postępową i wewnętrzną. Natomiast taką kompensatę obiecuje dać w zupełności wprowadzenie innego twierdzenia H. A. Lorentza (Versl. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam, str. 809, 1904) i najogólniej przez A. Einsteina (Ann. d. Phys. (4), 17, str. 891, 1905) wyrażonej zasady względności. Jakkolwiek dotąd posiadamy tylko jedno — co prawda — bardzo doniosłe, potwierdzenie prawdziwości tej zasady, mianowicie wynik doświadczeń Michelsona i Morleya (Amer. Journ. of Science (3), 34, str. 333, 1887), to z drugiej strony nie znamy dotąd żadnego faktu, któryby wprost sprzeciwiał się przyznaniu tej zasadzie dokładności powszechnej i bezwzględnej. Nadto zasada ta okazała się tak przenikliwą i płodną, że pożądane jest szczegółowe jej zbadanie, a to może nastąpić oczywiście tylko przez zbadanie konsekwencyj, do których prowadzi. Z tych to względów uważałem za zadanie godne trudu wysnucie wniosków, do których prowadzi kombinacya zasady względności z zasadą najmniejszego działania dla dowolnych ciał ważkich Odsłoniły się przytem pewne dalsze widoki i niektóre wnioski, nadające się, być może, do bezpośredniego sprawdzenia doświadczalnego.

Prace matematyczno-fizyczne, wydawane przy współudziale Wł. Gosiewskiego. Wł. Natansona, A. Witkowskiego. K. Żorawskiego przez S. Dicksteina. Tom XVIII zawiera: W. Sierpiński, O sumowaniu szeregu $\sum_{n \geq a}^{n \leq b} \tau(n) f(n)$, gdzie $\tau(n)$ oznacza liczbę rozkładów liczby n na sumę kwadratów dwóch liczb całkowitych. A. Denizot, Przyczynek do teoryi aksonometryi. G. Mittag-Leffler, O Przedstawieniu analitycznem jednoznacznej gałęzi funkcyi analitycznej. Przekład S. Dicksteina. Nota V. K. Żorawski, Notizen aus dem Gebiete der Differentialgeometrie (Notatki z dziedziny Geometryi różniczkowej). W Broniewski, Zależność pomiędzy zmianą sporu elektrycznego i rozszerzalnością metali jednoatomowych. W. Gorczyński, O obliczaniu sum ciepła w kaloryach gramowych. G. A. Miller, On the groups generated by two operators of order three whose product is of order four (O grupach utworzonych przez dwa operatory rzędu 3. których iloczyn jest rzędu 4).

KRONIKA.

X-ty Zjazd przyrodników i lekarzy polskich we Lwowie.

Odbyty w czasie od 22 do 25 lipca r. b. Zjazd przyrodników i lekarzy pol-

Digitized by Google

skich we Lwowie tak liczbą uczestników, jak programem i przebiegiem prac swoich stwierdził ponownie wielką żywotność instytucyi zjazdów. Znakomitą organizacyę Zjazdu przypisać należy wytężonej pracy Komitetu gospodarczego, któremu przewodniczył niestrudzony prof. Dr. Wł. Bylicki.

Na pierwszem posiedzeniu ogólnem Zjazdu w dniu 22 lipca, po przemówieniu powitalnem przewodniczącego, wyborze prezesów, wiceprezesów i sekretarzy Zjazdu, oraz po przemówieniu przedstawicieli Miasta, Kraju i Rządu, Akademii Umiejętności i innych instytucyj naukowych, nastąpił odczyt Dr. Wł. Biegańskiego z Częstochowy p. t. „O współczesnej filozofii przyrody, poczem Prof. Dr. Wł. Natanson z Krakowa wygłosił odczyt p. t. „Świat widziany od strony elektrycznej". Odczyty te podajemy w streszczeniu, według „Dziennika Zjazdu".

Dr. Biegański wypowiada pogląd, że nauka i filozofia mają swoje własne odrębne zakresy badania, że dopełniają się wzajemnie, bez potrzeby przekraczania nakreślonych dla każdej z nich granic. Do filozofii przyrody należy analiza zasadniczych postulatów i pojęć nauk przyrodniczych oraz synteza wyników przyrodoznawstwa, czyli t.z. ogólny pogląd na przyrodę. Stąd filozofię przyrody dzieli prelegent na dwa działy: 1) na filozofię przyrodoznawstwa, która zajmuje się analizą i krytyką pojęć i postulatów nauk przyrodniczych; 2) właściwą filozofię przyrody, której zadaniem jest wspomniana wyżej synteza. Za najważniejszy i najbardziej charakterystyczny rys spółczesnej filozofii przyrodoznawstwa uważa prelegent dążność do wykazania subjektywizmu w poznaniu naukowem przyrody. Idealizm filozoficzny, który z tego subjektywizmu wyrasta, nie liczy wprawdzie wielu zwolenników wśród krytyków przyrodoznawstwa, stojących raczej na stanowisku fenomenalizmu, t. j. utrzymujących, że poznanie nasze ogranicza się tylko do czuć jako zjawisk, ale okazał się on bardzo pożytecznym w przeciwstawieniu do bezkrytycznego realizmu oraz metafizycznego materyalizmu. Za jeden z najważniejszych wyników współczesnej krytyki filozoficznej przyrodoznawstwa uważa autor pogląd, że pojęcia abstrakcyjne, któremi operuje przyrodoznawstwo, lubo w tej lub w owej formie dla nauki konieczne, poza teoretyczną budową nauki nie mają żadnego realnego znaczenia. I uogólnienia i wiązania faktów, należące do dziedziny poznania naukowego, są także natury subjektywnej. Stąd wniosek, że i t. zw. prawa przyrody mają tylko znaczenie względne w ścisłem znaczeniu tego wyrazu; nie rządzą one zjawiskami przyrody, lecz stanowią wyraz subjektywny naszego poznania jednostajności i powtarzania się zjawisk w przyrodzie. W teoretycznej budowie nauki, t. j. w powiązaniu faktów i pojęć w jednę całość odgrywają rolę nietylko pierwiastki subjektywne poznawcze, lecz także estetyczne i pedagogiczne.

Te to poglądy wyrodziły w dzisiejszej filozofii przyrody sceptycyzm, pozostający w rażącej sprzeczności z wybitnym dogmatyzmem przyrodoznawstwa dawniejszego. Rodzi się tedy mimowoli pytanie, czy ten sceptycyzm nie jest przesadzony, jak przesadzoną niewątpliwie była wiara dogmatyczna dawnego przyrodoznawstwa? Całe konsekwentne rozumowanie spółczesnej krytyki filozoficznej przyrodoznawstwa w analizie naszego poznania oraz ocena wartości

Digitized by Google

nauk przyrodniczych, jest oparte w całości na założeniu czystego doświadczenia (szkoła empiryokrytyczna Avenariusa), jako jedynego źródła prawdziwej wiedzy. To założenie uważa prelegent za błędne. Jest ono niemożliwe do urzeczywistnienia. Jest ono w rzeczy samej abstrakcyą. Następnie wszystkie skojarzenia czuć i dodatki wniosków do doznań bardzo często poprawiają doświadczenie i stanowią o jego właściwej prawdzie. Przeciwnie sądzenie i wnioskowanie nie są bynajmniej pierwiastkami obcemi poznaniu, gdyż myślenie jest nierozłącznym czynnikiem doświadczenia. Jeżeli przyznamy taką rolę myśleniu to upadnie idealizm, a właściwie solipsyzm, wyprowadzony konsekwentnie z pojęcia czystego doświadczenia, a natomiast da się obronić realizm krytyczny, który więcej licuje z zadaniem przyrodoznawstwa. Nauka staje się bardziej objektywną, bo lubo zależna jest od naszej organizacyi psychicznej, to jednak, ponieważ organizacya jest wyrazem przystosowania, wyniki nauki muszą być równoważnikiem stosunków realnych.

Prof. Natanson rozpoczął swój wykład od przypomnienia słuchaczom lat nauki szkolnej, a mianowicie nieładu i przypadkowego nagromadzenia, w jakiem rozwój historyczny przekazał szkole naukę o elektryczności i magnetyzmie. Przed laty pięćdziesięciu, pomimo prac Coulomba, Ampère'a, Poissona, pomimo doktryny energii głoszonej przez Helmholtza i W. Thomsona, pomimo Faradaya, Gaussa, Webera, Riemanna, Clausiusa i innych, panował zastój w tej nauce, Dopiero Maxwell swoją teoryą elektromagnetyczną dał taki impuls nauce, że, jak powiada prelegent, fala która się od niego zaczęła, już po kilkakroć razy rozdarła dawniejsze granice nauki, otwierajac nowe rozdziały rzeczywistości, a jeszcze nie zdaje się być wyczerpana.

Już w Elektrostatyce poznajemy niektóre narzędzia Maxwellowskiej teoryi: fakt zasadniczy istnienia pola elektrycznego i miarę jego natężenia w każdem miejscu: wektor elektryczny.

Zjawiska prądu, czyli t. zw. elektrokinetyczne, opisujemy również przy pomocy pojęć nielicznych i prostych. Polegają one na relaksacyi, czyli zluźnianiu się pola elektrycznego i na jednoczesnem wzniecaniu tego pola, dokonywanem przez obce źródła energii (np. chemiczne, termiczne) W Elektrokinetyce prócz wektora elektrycznego, znanego już z Elektrostatyki, mamy t. zw. natężenie prądu, miarę skutków elektrycznych zjawiska. Własności rozpraszające rodzaju materyi, w którym dokonywa zluźnianie się pola, charakteryzuje stała, którą jest „czas relaksacyi". Od tej stałej zależy w sposób prosty t. zw przewodnictwo elektryczne.

Krótkiemi słowy zaznacza następnie prelegent charakter teoryi Maxwellowskiej. Maxwell rozszerzył pojęcie prądu elektrycznego: zwyczajne pojęcie prądu „przewodzonego" dopełnił pojęciem prądu „dielektrycznego", który wyobraża sobie i określa ilościowo w dielektryku. Prąd przewodzony w każdej chwili i w każdem miejscu zależy od stanu pola, a zatem od chwilowej i miejscowej wartości wektora elektrycznego; prąd dielektryczny zależy od sposobu i od prędkości, z jaką pole zmienia się z biegiem czasu. Maxwell stawia hypotezę, że prąd dielektryczny, podobnie jak prąd przewodzony,

Digitized by Google

wytwarza w swem sąsiedztwie pole magnetyczne. Tą hypotezą położył Maxwell fundament pod elektromagnetyczną teoryę promieniowania. Hypoteza Maxwella o polu magnetycznem prądu dielektrycznego jest dopełnieniem Faradyowskiego prawa indukcyi, niejako jego odbiciem w zwierciedle symetryi. Według Maxwella rozkład wektora magnetycznego w przestrzeni jest zawsze złączony ze zmiennością pola elektrycznego w czasie. Symetrya byłaby zupełna w próżni lub w doskonałym izolatorze; w przewodniku jest zakłócona przez prąd przewodzony, do którego niema analogii w zjawiskach magnetycznych.

Pole elektryczne niezmienne może istnieć bez magnetycznego; pole magnetyczne niezmienne może istnieć bez elektrycznego. Pola statyczne są niezależne od siebie. Lecz skoro tylko którebądź z nich poczyna zmieniać się, drugie pole w tem samem miejscu, w tej samej chwili, pojawić się musi. Jedno pole bez drugiego istnieć może, ale nie może zmieniać się bez drugiego. Owo wzajemne splecenie obu pól, gdy są zmienne, objaśnia treść wewnętrzną zjawiska, zwanego falą elektromagnetyczną. Jedno i drugie pole może rozchodzić się w przestrzeni z niezmierną prędkością. Jeżeli ośrodek jest izolatorem doskonałym, w takim razie energia elektromagnetyczna nie wyczerpuje się dysypacyą, fala biegnie bez straty. Inaczej dzieje się w ośrodku przewodzącym. Tak naprzykład w srebrze metalicznem, już po przebyciu drogi, wynoszącej 0,00001 cm. natężenie fali elektromagnetycznej, zwanej w Optyce żółtą lub sodową, zmniejsza się tak znacznie, że wynosi nieco mniej niż 0,002 pierwotnego natężenia; wyrażamy to, mówiąc, że srebro jest „nieprzezroczyste".

Znając przezroczystość srebra dla falowania żółtego, można wyliczyć przewodnictwo srebra dla prądów, implikowanych w rozchodzeniu się takiego falowania. Rezultat jest następujący: przewodnictwo srebra dla prądów, zawartych w fali światła żółtego, ma się do zwyczajnego Ohmowskiego przewodnictwa srebra, które mierzymy przy pomocy prądu z ogniwa, jak 6 do 10000. Prawda, że warunki w dwóch powyższych przypadkach są bardzo odmienne. Prąd z ogniwa jest trwały lub powoli zmienny. Prądy, implikowane przez falę żółtą, rozchodzącą się w srebrze, są zmienne z niesłychaną szybkością. W czasie $^1/_{10^{15}}$ sekundy prąd w tej fali narasta od zera do największej wartości, spada znowu do zera; poczem zmienia kierunek, znowu narasta i znowu powraca do zera. Ale przewodnictwo, według Maxwella, nie jest cechą zjawiska, jest ono cechą materyi. A zatem przewodnictwo srebra, według Maxwella, może zależeć od temperatury, od gęstości, od stanu odkształcenia metalu, ale nie może zależeć od częstości, z jaką w czasie zmienia się pole. Wynik naszego rachunku obala więc istotnie jednę z podstaw teoryi Maxwella (w gruncie rzeczy teorya ta jeszcze jaskrawiej odbiega od faktów, niż tu przytoczyliśmy). Teorya Maxwella, poczynając od pewnej częstości, wypowiada swoje usługi.

Według (klasycznej postaci) teoryi Maxwella, prawa prądów dielektrycznych przewodzonych są prawami prostemi, elementarnemi. Skoro się pokazało, że te prawa tylko w ograniczonym zakresie są proste, w istocie zaś są niezmiernie zawiłe, przestały one być elementarnemi i zaczęto w nich poszukiwać t. zw. (według Chelmersa) kolokacyj, t. j. tego, co wypływa z ogółu

Digitized by Google

cech właściwości układu, które w danym rodzaju zjawisk objawiać się mogą. Tę kolokacyę wykryli fizycy pod przywództwem H. A. Lorentza z Leydy.

Obmyślenie nowych praw elementarnych w teoryi elektromagnetycznej i stosownej dla niej kolokacyi nazwano teoryą elektronów. Maxwellowska postać teoryi zawierała w sobie niejako w embryonalnem przygotowaniu następne stadyum myślenia, które połączono z nazwiskiem Lorentza.

Lorentz poczytuje dostrzegalne przez nas zjawiska elektromagnetyczne za zjawiska tłumne. Sądzi on, że wynikają one ze spółistnienia w każdym obszarze materyi, dostępnym badaniu zmysłowemu, olbrzymiej liczby pól elementarnych, pól domniemanych hypotetycznych, których prawa są zupełnie proste. Istnieją dwa rodzaje pól: pole elektryczne i pole magnetyczne. Każde pole ma niejako jądro lub ognisko, w którem jest skupione. Pomimo, że znamy dwa rodzaje pól, nie potrzebujemy bynajmniej hypotezy dwóch rodzajów ognisk i nie potrzebujemy jednocześnie elektronów i magnetonów.

Elektron jest to ograniczony mały zakres przestrzeni (lecz nie punkt geometryczny), który ma własność szczególną: okazuje pewien skończony, dość dokładnie znany nam ładunek elektryczny. Wyobraźmy sobie, że elektron porusza się, jego ładunek porusza się zatem. Ładunek, który się przemieszcza bez straty, bez zysku, jest równoważny prądowi elektrycznemu; czynnością prądu jest to, iż roznosi ładunki. Zatem poruszający się elektron—to pewien słaby lecz określony prąd, płynący w wiadomym kierunku. Jak każdy prąd wytwarza on pole magnetyczne w całem swojem sąsiedztwie. Jest to twierdzenie podstawowe. Według Lorentza. niema w ogóle innego prądu przewodzonego, jak tylko polegający na płynięciu elektronów. W metalach n. p. elektrony ujemne podpadają całkowicie pod wpływ pola elektrycznego. Wyobraźmy sobie takie pole; biegnące pod jego wpływem elektrony nabierałyby rychło rozpędu (albowiem są bezwładne), gdyby nie gęsto rozsiane atomy metalu, z któremi muszą się spotykać co chwila. Atomy hamują bieg elektronów, kierują je we wszystkie strony przestrzeni, odbierają im energię, którą w polu posiadły. Oto wyrównawczy dysypujący mechanizm, oto koercya, powszechna, zawsze niwelująca czynność materyi.

Przypuśćmy, że pole elektryczne jest zmienne, ale zmienne powoli; niechaj np. oscylując około zera, zmienia 100 razy na sekundę kierunek. W czasie 0,01 sekundy, elektron ma olbrzymią liczbę spotkań z atomami metalu, czas jego drogi średniej swobodnej pomiędzy dwoma kolejnemi spotkaniami z atomem jest nadzwyczajnie krótki w porównaniu z 0,01 sekundy. A zatem, zanim pole elektryczne zdoła istotnie się zmienić, elektrony zdążą przyswoić sobie jego energię i przekazać ją atomom materyi. Względem pól tej zmienności mechanizm koercyi okazuje się doskonale ruchliwym i zwrotnym, w razie pól zmiennych powoli mechanizm ten jest zawsze dostosowany, mamy tu zatem prawa dysypacyi proste i trwałe, niezależne od częstości zmian pola; mamy pozory przewodnictwa stałego, wrodzonego rodzajowi materyi, w której prąd płynie.

Teraz przyjmijmy, że pola są nadzwyczaj szybko zmienne; dajmy, że okres peryodycznej zmienności pola (powiedzmy w srebrze), jest $^1/_{10^{14}}$ sekundy lub jeszcze krótszy. Czas drogi średniej swobodnej elektronu wśród atomów

Digitized by Google

srebra jest już porównywalny z tak krótkim okresem. Zanim elektrony ukończą grę działania i oddziaływania z atomami metalu, pole zmienia już kierunek i pociąga je w stronę przeciwną. W obec pól tak szybko zmiennych mechanizm koercyi okazuje się ociężałym; wprawdzie nieustannie rozpoczyna swą czynność, ale ta czynność rwie się wciąż niedokończona. Dla tego to srebro absorbuje i gasi falę biegnącego w niem światła żółtego, o wiele słabiej niżby było powinno według teoryi Maxwella. Przedstawienie rzeczy jest tu zresztą uproszczone z umysłu. W istocie, własności optyczne metalu (np. jego promieniowanie) zależą nietylko od długości średniego czasu trwania jednej drogi swobodnej elektronu pośród tłumu atomów; istnieje jeszcze inne tempo, charakterystyczne dla mechanizmu, ukrytego w metalu: to czas trwania spotkania elektronu z atomem. To tempo wychodzi na jaw w obec fal nadzwyczaj krótkich, jak to wskazuje np. wzór Wiena na promieniowanie.

Wyobraźmy sobie teraz przypadek zupełnie odmienny ciała nieprzewodzonego, dielektryka, jak np. szkła, alkoholu lub tlenu, albo wodoru. Poddajmy je działaniu pola elektrycznego, nie zmieniającego się z czasem. Wyobraźmy sobie elektrony w cząsteczkach szkła, alkoholu, tlenu, wodoru; wyobraźmy je sobie w każdym atomie, wchodzącym w skład tych cząsteczek. Te elektrony nie są swobodne jak w metalach; pod wpływem pola nie mogą odbiegać daleko, nazwijmy je dla krótkości elektronami „związanemi".

Wyobraźmy sobie najprostszy układ elektronów, np. układ dwu elektronów: dodatniego i ujemnego, i niechaj ten układ będzie w równowadze pod wpływem jakiejś siły. Poddajemy go działaniu pola: ono popycha jeden elektron, drugi pociąga. Układ został w polu rozciągnięty, jakby nić kauczukowa w rękach siłacza. Wiemy, że taśma rozciągana, byle nie do zerwania opiera się rozciąganiu; mówimy, że jest sprężysta, że działa w niej sprężystość, która przywraca jej postać pierwotną, gdy ustaje działanie zewnętrzne. Podobnie i układ elektronowy opiera się rozciąganiu; widocznie i na elektrony związane w łonie atomów materyi działają siły przywracające, ogólnikowo podobne do sprężystych. Pod łącznym wpływem tych sił i pola elektrony ustawiają się po dokonanych przesunięciach w nowych położeniach równowagi. Oczywista, że skutki elektryczne danego pola będą zależne od długości dokonanych przesunięć i od ładunków, niesionych przez elektrony. Owe skutki wyrazić możemy przez t. zw. „polaryzacyę" ciała. A zatem polaryzacya dielektryka w danem określonem polu zależy od sił przywracających, działających na elektrony, związane w łonie atomów substancyi.

Niechaj przez dielektryk biegnie fala elektromagnetyczna, dajmy na to, fala żółta. Z falą nadbiega jej pole oscylujące, bijące w takt, którego prędkości nie możemy sobie wcale wyobrazić. W układach elektronowych rozpoczynają się drgania; elektrony w tem samem tempie, jak pole, wahają się dokoła poprzednich położeń równowagi. Polaryzacya zmienia się teraz peryodycznie jak pole z tą samą częstością, ale amplituda polaryzacyi zależy od natury drgających układów, t. j. elektronów, od amplitudy fali, od częstości fali. Ten stosunek polaryzacyi do pola fali elektromagnetycznej jest rozmaity w tem samem ciele materyalnem, mianowicie zależy od częstości zmian pola, czyli od długości fali. Fala biegnie, pole oscyluje, elektrony drgają. Oscylacya pola i drgania elektronów stanowią, jak

Digitized by Google

wiemy, prądy dielektryczne. Według hypotezy Maxwella jedne i drugie wytwarzają w swem sąsiedztwie pole magnetyczne. To pole jest zmienne peryodycznie; wytwarza ono przez indukcyę pole elektryczne, również peryodyczne zmienne. Tym sposobem w łonie dielektryka szerzy się fala. W eterze czystym fala rozbiega się, dzięki działaniu magnetycznemu samych tylko oscylacyj pola elektrycznego. Prędkość takiej fali w czystym eterze jest dokładnie znana (3.10^{10} cm. na sek.). W dielektryku fala szerzy się z inną prędkością; spółudział polaryzacyi wpływa na prędkość i wpływa rozmaicie na prędkości fal rozmaitej długości: fale krótsze i dłuższe z winy polaryzacyi biegną w dielektryku z różną prędkością. Gdy fala w danem ciele biegnie z inną prędkością niż w próżni, mówimy, że załamuje się w tem ciele. Huygens wykazał, że spółczynnik załamania fali w ciele jest stosunkiem prędkości rozchodzenia się w próżni do prędkości w uważanym rodzaju materyi. Określamy to, mówiąc, że spółczynnik załamania światła w ciele z winy polaryzacyi, a więc z winy elektronów, jest rozmaity dla fal krótszych i dłuższych. Zjawisko to zowie się w Optyce dyspersyą.

Zasadzając się na znajomości dyspersyi w niektórych ciałach gazowych obliczono liczbę elektronów związanych w cząsteczkach tych gazów, t. zw. elektronów „dyspersyjnych". Okazało się, że liczba ich jest zazwyczaj zgodna z sumą czyli liczbą łączną jednostek wartościowości chemicznej, czynnych w uważanych cząsteczkach gazowych.

Interesujący swój wykład kończy prelegent kilkoma uwagami o pewnych trudnościach i niejasnościach u podstaw teoryi elektronowej i wyraża domniemanie, że teoryę tę zapewne wyruguje ze sceny, a może całkowicie zastąpi, uogólniona. być może że zatomizowana teorya promieniowania, wszczęta przez Kirchhoffa, Maxwella, Bartoli'ego, rozwijana przez Boltzmanna, Smoluchowskiego, Wiena i innych, a przez Plancka doprowadzona do istotnego rozkwitu.

Tegoż dnia, t. j. 22 lipca, w godzinach popołudniowych rozpoczęły się posiedzenia sekcyjne Zjazdu. Program obejmował 27 sekcyj, z których wymienimy następujące, jako bliżej interesujące czytelników „Wiadomości matematycznych: I. przyrodniczo-dydaktyczna; II. matematyczno-fizyczna; III. chemiczna i farmaceutyczna; IV. mineralogii, geologii, paleontologii, geografii fizycznej i meteorologii; VIII. filozoficzna.

Na sekcyi przyrodniczo-dydaktycznej wygłoszono lub przedstawiono między innemi następujące referaty: B. Miklaszewski (Warszawa) „Przygotowanie uniwersyteckie nauczycieli nauk przyrodniczych"; F. Tomaszewski (Lwów) „O potrzebie zaprawiania przyszłych nauczycieli szkół średnich do pracy naukowej podczas studyów uniwersyteckich; J. Paczowski (Jarosław) „Sprawa ćwiczeń w pracowni fizykalnej dla uczniów: M. Ernst (Lwów) „O nauce kosmografii w szkołach średnich"; T. Lopuszański (Kraków) „O reformie nauczania nauk matematyczno-przyrodniczych w szkołach średnich". Z powodu nieobecności autora, ten ostatni referat, który miał być przedstawiony na posiedzeniu wspólnem w Sekcyi matematyczno-fizycznej i dydaktycznej nie był odczytany, natomiast L. Zarzecki (Warszawa), Sekretarz pierwszy Koła

Digitized by Google

matematyczno-fizycznego w Warszawie, zdał krótką sprawę z działalności nowego Towarzystwa w sprawie programów nauczania matematyki i fizyki w szkołach średnich.

Na porządku dziennym obrad sekcyi matematyczno-fizycznej postawione były między innemi następujące komunikaty: J. Laub (Würzburg) „Optyka ciał ruchomych"; J. Borkowski (Kraków) „Przesuwanie się smug widmowych a elektronowa teorya absorbcyi Voigta"; Ł. Böttcher (Lwów) „Z dziedziny teoryi równań funkcyjnych"; J. Puzyna (Lwów) „Uwagi o liniowem równaniu całkowem"; S. Zaremba (Kraków) „Nowa metoda uzasadnienia podstawowych własności funkcyi Greena"; T. Godlewski (Lwów) „O własnościach aktynu"; J. Huber (Lwów) „O mierzeniu twardości ciał stałych", M. Smoluchowski (Lwów) „Uwagi o kilku zjawiskach drobinowych, związanych z przypadkowemi odchyleniami od stanu najprowdopodobniejszego"; H, Merczyng (Petersburg) „O pomiarowych demonstracyach zjawisk katodowych i elektronowych"; K. Żorawski a) „O pewnym związku, dotyczącym równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego", b) o pewnych badaniach z teoryi form różniczkowych stopnia drugiego".

Na sekcyi chemicznej zostały zapowiedziane lub wygłoszone między innemi następujące referaty: T. Estreicher (Fryburg) „Przyczynek do znajomości prawa Faradaya dla metali, mogących tworzyć jony różnowartościowe"; T. Kotarski (Petersburg) „O kryształach ciekłych"; M. Cetnerszwer (Ryga) „Prace z elektrochemii"; J. Zawadzki (Ryga) „Prace z elektrochemii"; L. Bruner (Kraków) „Badania dynamiczne reakcyj organicznych".

Na sekcyi meteorologii, geologii i t. d.: Z. Weyberg (Warszawa) „Synteza kilku zasadniczych glinokrzemianów"; St. Kreutz (Wiedeń) „O amfibolach, mianowicie o ich własnościach optycznych"; J. Morozewicz (Kraków) a) „O nowym minerale lublinicie"; b) „O zachowaniu się sztucznego aragonitu w wysokich temperaturach".

Na sekcyi filozoficznej odczytali referaty: W. Biegański (Częstochowa) J. Łukasiewicz (Lwów) „O wnioskowaniu indukcyjnem"; T. Twardowski (Lwów) „Pojęcie nauki i jej rodzaje"; J. Ochorowicz (Wisła) „Nowe poglądy na materyę"; W. Biegański Częstochowa) „Znaczenie analogii w badaniu naukowem"; J. Łukasiewicz (Lwów) „O stosunku logiki do psychologii"; M. Borowski (Lwów) „Krytyka pojęcia przyczynowości.

O ważniejszych uchwałach Zjazdu, a w szczególności Sekcyi matematyczno-przyrodniczej, podamy wiadomość w następującym zeszycie „Wiadomości matematycznych".

Zapisy na cele naukowe. Dr. Wł. Kretkowski złożył w Akademii Umiejętności w Krakowie kapitał, wynoszący blizko 96,000 koron, lokowanych w książeczkach Kasy Oszczędności, oraz testament, w którym zapisuje Akademii resztę swojego majątku, wynoszącego przeszło 300,000 koron.

Digitized by Google

z przeznaczeniem na urządzanie wykładów z matematyki czystej przy Uniwersytecie Jagiellońskim i subwencyonowanie młodych matematyków, kształcących się za granicą.

P. Adam Szajkiewicz d. 15 grudnia 1901 r. złożył do kasy Akademii Umiejętności kwotę rubli 12,000 w listach zastawnych m. Warszawy. Darowiznę Akademia przyjęła i ustanowiła fundusz wieczysty imienia Adama Szajkiewicza, od którego odsetki mają być używane na nagradzanie prac naukowych, pisanych w języku polskim, przez polskich autorów z zakresu matematyki (czysta matematyka, fizyka matematyczna, astronomia) i filozofii oraz historyi, języka, literatury i prawa polskiego.

V-ty Kongres międzynarodowy matematyków odbędzie się w Rzymie w czasie od 6-go do 11-go kwietnia 1908 r. Na czele komitetu organizacyjnego stoi profesor P. Blaserna, sekretarzem jest G. Castelnuovo, skarbnikiem V. Reina, członkami: V. Cerruti, A. di Legge, G. Pitarelli, A. Sella, A. Tonelli, V. Volterra.

Digitized by Google

SKOROWIDZ ALFABETYCZNY NAZWISK.

Abakanowicz 271.
Abbot 104, 191.
Abe 201.
Abercromby 110, 155, 157.
Akai 200.
Angot 57.
Angström 197.
Apjohn 119.
Archimedes 273, 274.
August 119.

Babington 107.
Bachmann 77, 78, 79.
Baeyer 91.
Banachiewicz (44).
Bandrowski 203, 207.
Baranowski 81, 87, 88, 89, 92, 93, 94.
Barus 23.
Bayley 159.
Beaufort 120, 128. 129
Berg 96.
Bełza 81, 87.
Berkiewicz 90.
Bertrand 17, 44.
Bessel 87, 88,
Bidschot 202.
Biegański 279, 285.
Bieliński 81.
Birbeck 132.
Blanford 144, 146.
Blumenfeld 203.
Borel (59).
Borodicz 96.
Bouffalt 271.
Bousquet 159.
Böttcher 285,
Bóbr 61.
Broniewski 278.
Brożek 247.
Bruner 203, 272.
Buchan 110, 135.
Burkhardt 257.
Buys-Ballot 44, 57, 109.

Campbell Hepworth 105, 114.
Cator 120.
Cesàro G. 41.
Christie 130.
Chwolsoa 196.
Ciesielski 202.
Clarke W. B. 150.
Claxton 159.
Cooke 153.
Cybulski 203.
Czebyszew 71, (44).
Czopowski 272.
Czubalski (63), (87).

Danielewicz (33).
Daniell 132.
Darwin 106.
Dase 257.
Dedekind 62.
Deike 93. 195.
Delambre 66.
Dickstein (62).
Dłuska 272.
Doberck 148.
Doncan-Bell 105.
Dubińskij 103.
Dybowski 203.

Edlund 91.
Ehrenfeucht 96, 102, 273.
Ehrenpreis 203.
Einstein 276.
Eisenstein 253.
Estreicher 285.
Euler 66, 257.
Evans 110.

Fajdig 202.
Falkowski 89.
Feldblum (121).
Fermat 247, (25).
Fitze Roy 106, 157.
Foucault 91.
Fourier 1—3, 7—9. 11—12 21, 23.
Franklin 77,78.
Freycinet 159.

Galton 108, 110.
Garcet 89.

[1]) Cyfry w nawiasach oznaczają stronice Dodatku.

Digitized by Google

Gassiot 107.
Goeffrey 159
Girard 86, 94.
Glaisher 120, 133.
Gorczyński **105**, **194**, 195, 203, **265**, 271.
Gosiewski 17, 199, 200.
Grabowski L. 271.
Grabowski St. 84.
Gugenmus 86.
Gutsch 133.
Guzel (111).

Hann 57.
Hecror 155.
Helberg 273.
Heilpern (73).
Helmholtz 1, 206, 276,
Hepworth 117.
Hertz 276.
Howard 121.
Humnicki 206.

Ikenouya 201.
Iljaszewicz 103.
Innes 158.

Jakšič 265.
James 117, 121.
Jevons 150.

Kaneko 201.
Kelvin 2, 3, 23. 205.
Kępiński 242, 285.
Kingsmill 154.
Kingston 160.
Kopernik 89.
Kowalczyk **81**. 92, 93, 95, 100, 208.
Kozak 203.
Kramsztyk St. (73)—(80).
Krasnow 103.
Kucharzewski 81, 82.
Kwietniewski (**125**).

Lalsant (81) - (87).
Langley 189—194.
Laub 207, 272, 285.
Lempfert 105, 111, 117.
Leverrier 107.
Ley 110.
Lhuillier 67.
Lind 120.
Lorentz 276.
Lucas 247,251, 253.

Łaparewicz **209**, **247**; 257.

Marchlewski 203, 204, 206.
Margules 25, 26, 37, 41, 55, 58.
Marianović 269.
Marriott W 135.
Maxwell Cl. 1, 280, 281, 283.
Maxwell Hall. 162, 163.
Maxwell W. S. 110.
Mazelle 202.
Meldrum 159.
Mellor 3, 10. 17.
Merczyng **1**, 251.
Merecki 188, 203. 271.
Mertens 79.
Morunowicz 204.
Miklaszewski 284.
Miller W. A. 108.
Mirowski 284.
Moivre 11.
Moos 147.
Morozewicz 204, 205.
Muklanowicz 90.

Natanson 203, 206. 272, 279, 280.
Nedeikovič 261, 262, 269.
Negretti 119.
Neper 65, 71.
Newton 23, 276.
Neymayer 253.
Niklewski 206.

Ohm 8.
Okada 200.
Olszewski 202, 2 5.
Osler 110.
Ostwald 203

Paczowski 278.
Parchomow 103.
Philipps 119.
Pickering 132.
Pierwuszyn 256.
Planck 275,
Porter 205.
Pożaryski (39).
Prażmowski: 87, 89—92.
Puzyna 285.

Radziszewski 202, 203.
Rayleigh 207.
Revenstein 143.
Roberts-Austen 23.
Robinson 120, 128, 129.
Rudzki 20. 206.
Ruskin 122.
Russel H. S. **149**, 150.
Rutterford 119.

Sabine 108.
Sato 201.
Schoodbridge 154.
Scott R. 108—110, 117,
Shaw 105 110. 111.
Sierpiński 77. **225**, (**89**), **111**.
Skołdycki 95.
Smoluchowski 203, 206.
Smosarski **25**.
Sokołow 103.
Spottiswoode 108.
Stevenson 119.
Stewart 108.
Stodółkiewicz (57).
Stokes 110.
Strachey 120.
Strutt 21.
Struve W. 88. 90.
Strzeleki 150.
Stupart 162.
Stuyvaert (61).
Sylvester 77.

Digitized by Google

Symons 110, 136 — 138, 156.
Szaniawski 96.
Szpilowski 83.

Taczałow 98.
Tait 1. 3.
Tajima 201.
Tannery J. (61)—(62).
Tarry 257 258. 260, 261.
Tebutt 150.
Thomson 1, 2, 17, 18, 20—23.
Toynbee 109.
Tresse 205.
Treu 96
Turin 132.

Uyeda 201.

Very 191.

Weisglas 203.
Weyberg 204.
Whitbread 133.
Wierebrusow 95.
Wild 120.
Wilfory 132.
Witkowski 205, 207.
Wolfke 238.
Wostokow 93—100.

Zaleski 204.
Zambra 119, 285.
Zaremba 205.
Zawadzki (59).
Zdziarski 96.
Zeutheu 273, 274.
Zimin (44).

Żorawski 204, 235.

Digitized by Google

Digitized by Google

WYDAWNICTWA
Redakcyi „PRAC MATEMATYCZNO-FIZYCZNYCH“
i Redakcyi „WIADOMOŚCI MATEMATYCZNYCH“.

(Warszawa, Marszałkowska 117).

Do nabycia we wszystkich księgarniach:

PRACE MATEMATYCZNO-FIZYCZNE:

Tom I, 8-ka większa, str. VI, 223 i 4 nl. 1888; z rysunkami. Cena rs. 2
Tomu II-go sesyt 1; 8-ka większa, str. 244, 1890; z rysunkami. Cena rs. 2
Tomu II-go sesyt 2; 8-ka większa, str. X i 286. 1890. Cena rs. 2 kop 40
Tom III, 8-ka większa, str. 243. 1892. Z rysunkami. Cena rs. 2
Tom IV, 8-ka większa, z rysunkami, str. 234. 1893. Cena rs. 2.
Tom V, 8-ka większa, z rysunkami, str. 239. 1894. Cena rs. 2.
Tom VI, 8-ka większa z rysunkami, str. 255. 1895. Cena rs. 2.
Tom VII, 8-ka większa z rysunkami, str. 260. 1896. Cena rs. 2.
Tom VIII, 8-ka większa str. 247, 1897. Cena rs. 2.
Tom IX, 8-ka większa str. 280. 1898. Cena rs. 2.
Tom X, 8-ka większa, str. 306. 1899—1900. Cena rs. 2 kop. 40.
Tom XI, 8-ka większa, str. 262. 1900. Cena rs. 2 kop. 40.
Tom XII, 8-ka większa str. 300. 1901 Cena rubli 3.
Tom XIII, 8-ka większa str. 400. 1902. Cena rs. 4.
Tom XIV, 8-ka większa str. 300, 1903. Cena rs. 3.
Tom XV, 8-ka większa, str. 205. 1904. Cena rb. 2 kop. 40.
Tom XVI, 8-ka większa, str. 270. Cena rb. 3 kop. 60.
Tom XVII, 8,-ka większa, str. 262. Cena rb. 3 kop. 60.
Tom XVIII 8-ka większa, str. 240. Cena rs. 3.
Tom XIX (w druku).

WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE:

T. I. 1897. 8°, str. 217. Cena rubli 3.
T. II. 1898. 8°, str. 275. „
T. III. 1899. 8°, str. 308. „
T. IV. 1900. 8°, str. 278. „
T. V. 1901. 8°, str. 287. „
T. VI. 1902. 8, str. 365. „
T. VII. 1903, 8°, str. 326 „
T. VIII. 1904. 8°, str. 342 „
T. IX. 1905. 8°, str. 251 „
T. X. 1906. 8°, str. 239; 23 „
T. XI. 1907 (w druku).

S. Dickstein. Kanony logarytmów Hoene-Wrońskiego. 8-ka, str. 30 z 6 tablicami. 1890. Cena rs. 1.

S. Dickstein. Tablica logarytmów Hoene-Wrońskiego. 8-ka, str. 15 z 1 tablicą. 1890. (Wydanie mniejsze). Cena kop. 20.

Wł. Natanson. Wstęp do fizyki teoretycznej. 8-ka, str. XII i 458; z drzeworytami w tekście. 1890. Cena rs. 4; w oprawie angielskiej rs. 4 kop. 50.

S. Dickstein. Pojęcia i metody matematyki. Tom I. Część pierwsza. Teorya działań. 1891. 8-ka, str. VI i 268. Cena rs. 2 kop. 50. (wyczerpane)

S. Dickstein. Matematyka i Rzeczywistość. 1893. 8-ka, str. 40. 1893 Cena kop. 30.

Geometrya Marcina Króla, pierwszy raz z rękopisu z XV-go wieku, wydana przez L. Birkenmajera, 1895. 8-ka, str. IX, 82. Cena rs. 1.

V. Schlegel. Nauka rozciągłości Grassmanna. Przyczynek do historyi matematyki w ostatnich 50 latach. Przekład S. Dicksteina 8-ka, str. 51. 1896 Cena kop. 80.

Digitized by Google

E. Pascal. Rachunek nieskończonościowy, przekład S. Dicksteina:
Tom I. Rachunek różniczkowy, 1896, 8-ka, str. 265. Cena rs. 2.
Tom II. Rachunek całkowy, 1896, 8-ka str. 240. Cena rs. 2.
Tom III. Rachunek waryacyjny i rachunek różnic skończonych 1897. 8-ka str. 247. Cena rs. 2.

G. Peano. Zarys rachunku geometrycznego, przekład S. Dicksteina. Warszawa, 1897, 8⁰, str. 28. Cena kop. 40.

St. Kramsztyk. Fizyka bez przyrządów. Pierwsze zasady Fizyki w prostych doświadczeniach dla dzieci i młodzieży:
Książeczka I-a z 34 drzeworytami w tekście, 8-ka, str. 104. Cena kop. 60.
Książeczka II-a z 61 drzeworytami w tekście, 8-ka, st. 112. Cena kop. 60.

S. Dickstein. Początkowa nauka geometryi w zadaniach. Wydanie III. znacznie powiększone. 1892. 16-ka, str. 152. W kartonie cena kop. 50.

St. Kramsztyk. Szkice przyrodnicze z dziedziny fizyki, geofizyki i astronomii. Warszawa. 1893, 8-ka większa. Str. VI+347. Cena rs. 3. (wyczerpane).

M. Ernst. Astronomia gwiazd stałych. 1896. 8-ka; str. X, 351. Cena rs. 3.

F. Klein. Odczyty o matematyce, miane w Evanston, spisane przez A. Ziweta, przełożył S. Dickstein. Warszawa 1899. 8⁰, str. 2, 109. Cena rs. 1.

W. Fr. Meyer. O stanie obecnym teoryi niezmienników, przełożył S. Dickstein. Warszawa 1899. 8⁰ więk., str. II, 138. Cena rs 1.

E. Pascal. Repertoryum matematyki wyższej, przełożył S. Dickstein.
T. I. Analiza. 8⁰, str. 556. Cena rs. 4.
T. II. Geometrya, str. X. 728. Cena rubli 5.

E. Picard. O rozwoju niektórych teoryj zasadniczych analizy matematycznej w wieku XIX, przełożył S. Dickstein 1900. 8, str. 59. Cena 60 kop.

Giovanni Schiaparelli. Formy organiczne przyrody a formy geometryczne czyste. Studyum porównawcze. Przełożył Jan Dal Trozzo. 1902. 8⁰, str. 89. Cena kop. 75.

Korespondencya **Kochańskiego i Leibniza** według odpisów Dr. L. Bodemanna, wydana przez S. Dicksteina. Warszawa, 1902, 8-a większa, str. 85. Cena kop. 60.

E. Pascal. Grupy ciągłe przekształceń. (Część ogólna teoryi), przełożył S. Dickstein. Warszawa, 1903, 8-o, str. XII — 296. Cena rubli 2 kop. 40.

E. Pascal. Résumé de quelques-uns de mes récents travaux sur la théorie des groupes de Lie. Warszawa, 1903, 8-ka większa. Kop 30.

J. Sochocki. Zasady teoryi funkcyj eliptycznych. Warszawa, 1903. 8-ka więk. str. 50. Cena kop. 50.

A. W. Witkowski. Tablice logarytmowe i goniometryczne czterocyfrowe. Warszawa, 1903. Cena kop. 25.

A. W. Witkowski. Tablice matematyczno-fizyczne. Warszawa, 1904, 8-o str. 158. Cena rb. 1 kop. 50.

K. Weierstrass. O przedstawialności analitycznej tak zwanych dowolnych funkcyj argumentów rzeczywistych. Warszawa, 1904, 8-o, str. 36. Cena kop. 40.

P. Duhem. Ewolucya Mechaniki. Warszawa 1904, 8-o, str. II, 223. Cena rs 1 kop. 50.

C. Segre. Geometrya dzisiejsza i jej związki z Analizą. Warszawa 1905. 8⁰. str. 15. Cena kop. 15.

S. Dickstein. O najnowszych badaniach nad podstawami Matematyki. Warszawa 1905, 8⁰, str. 23. Cena kop. 20.

E. Kasner. Teraźniejsze zagadnienia geometryi, 1905, 8⁰, str. 32. Cena k. 20.

J. Laub. Krótki zarys analizy wektorów, 1905, 8⁰, str. 44. Cena kop. 40.

A. Loretz. Termodynamika i teorye kinetyczne. 1906, 8⁰, str. 23. Cena k. 30.

Digitized by Google

SPRAWOZDANIA

Z POSIEDZEŃ

KOŁA MATEMATYCZNO - FIZYCZNEGO

w WARSZAWIE,

redagowane

przez

L. ZARZECKIEGO.

Rok 1906/7.

II.

Posiedzenie naukowe dnia 17 listopada 1906 r.

Zagajając pierwsze powakacyjne posiedzenie naukowe, przewodniczący streścił dotychczasową działalność K. M-F., scharakteryzował jego cele i zamierzenia, i usilnie prosił obecnych o czynny udział w pracy. Po odczytanu protokółu ostatniego posiedzenia przedwakacyjnego, prof. W. Biernacki mówił o wadach istniejących podręczników Fizyki, a między innemi o świeżo wydanym podręczniku Karstena i Kleibera, spolszczonym przez p. K. Sporzyńskiego. Mówca zaznaczył, że podręczniki Fizyki, a między innemi i ten, przepełnione są szczegółami, drobiazgowemi opisami przyrządów, w których ginie nieraz podstawowa treść nauki, odsuwają się na plan ostatni jej główne zasady i kierujące myśli, przez co szwankuje głębsze wykształcenie przyrodnicze uczącego się, nauka przybiera charakter luźnego splotu faktów, niepowiązanych żadną przewodnią ideą. Nieraz się mówi o zasadzie zachowania energii, lecz mówi się w sposób często niedokładny, chociaż zasada ta podobnie, jak zasada zachowania materyi w Chemii, o której żaden chemik na początku nawet nauczania nie za-

Digitized by Google

pomina, stanowi obecnie podwalinę Fizyki spółczesnej, i z trudnością można zrozumieć, dlaczego tak niechętnie autorowie podręczników o niej wspominają. Mówca rozumie, że nie można zaczynać nauki doświadczalnej od zasad naczelnych, twierdzi jednakże, że zasady te należy stopniowo podawać na kanwie doświadczenia, przechodząc różne dziedziny Fizyki, stopniowo uwypuklać, w świadomość ucznia wprowadzać. Luźny fakt, oddzielne doświadczenie wzbogaca bezwarunkowo naszą wiedzę, ale wtedy tylko ma dla nas największą wartość, gdy się połączy z pewnym całokształtem myśli. Należy nietylko faktów fizycznych uczyć, należy też nauczyć myśleć fizycznie, naukowo. Autorom niektórych podręczników natomiast się zdaje, że dane doświadczenie lub szereg doświadczeń dowodzą zasady zachowania energii. W twierdzeniu takiem tkwi niezrozumienie samej metody nauk indukcyjnych, a tem gorzej się dzieje, że takie fałszywe pojęcia imputowane są uczniom.

Dalej prof. Biernacki podkreśla pomieszanie pojęć takich, jak prędkość, siła, przyśpieszenie, droga przebyta, ciśnienie i t. d.

Pojęcia te, jak prędkość, siła, masa, nie podlegają określeniu. Zwykle określenia, podawane w podręcznikach są fałszywe, nic nie tłómaczą, bo są zwykle tautologią. Nastręcza się sposób dobry wyjścia z tego kłopotu, a sposób ten polega na przyjęciu układu bezwzględnego jednostek, przy którym odrazu się wykazuje sposób porównywania różnych jednostek. Koniecznem jest nietylko ze względów naukowych lecz i pedagogicznych wprowadzić ten układ do wykładu szkolnego. Doświadczenie mówcy, w szkole średniej technicznej zdobyte, potwierdza, że uczniowie bez wielkiego trudu dają sobie z tem radę.

Trzecim punktem, na który autor zwrócił uwagę w podręcznikach Fizyki, jest wadliwe, często pobieżne i nienaukowe traktowanie nauki o falach. Bez tej nauki nie można nawet mniej więcej dokładnie przechodzić różnych działów Fizyki, jak nap. Akustyki, Optyki fizycznej i t.d. We wspomnianym powyżej podręczniku, nap. spotyka się zdanie, że w cieczach prócz fal poprzecznych, mogą istnieć też i podłużne, co jest zupełnie błędne.

Na tle tego przemówienia wywiązała się dyskusya, w której najpierw zabierał głos p. Sporzyński. Mówca nie zgadzał się z wywodami poprzedniego, usprawiedliwiając wybór książki obfitością materyału doświadczalnego i podkreślając konieczność

Digitized by Google

gwoli potrzebie pedagogicznej świadomego używania przez nauczyciela błędnych określeń.

Następnie przemawiał p. Sawicki, oponując prelegentowi. Zdaniem oponenta książka powyższa nie nadaje się do naszych szkół, gdyż wykład Fizyki w szkołach niemieckich dzieli się na dwa okresy, jeden przygotowawczo-doświadczalny, drugi więcej teoretyczny. Tego u nas niema. Co się zaś tyczy określeń pojęć zasadniczych, to te należy dawać w tej zwykle używanej formie, chociażby dla tego, że coś podobnego się dzieje w Geometryi, nap., przy obliczaniu objętości brył, przeciw czemu trudno oponować.

Następni mówcy zgadzali się z zasadami, wypowiedzianemi przez p. Biernackiego, tylko p. przewodniczący zaznaczył, że nie można tak zasadniczo i tak daleko posuwać tendencyi nie dawania określeń, gdyż w takim razie nauka może utracić swój ścisły charakter i mogą się zakraść pojęcia, grzeszące nienaukowością.

P. Biernacki, odpowiadając, wyjaśnił niektóre ustępy swego przemówienia,

Po zamknięciu dyskusyi nad pierwszym referatem p. przewodniczący w krótkich słowach streścił oryginalny punkt wyjścia, z jakiego p. Cesàro zaczyna wykład swej Trygonometryi kulistej. W tym wykładzie tak zwane analogie Nepera poprzedzają inne zasadnicze wzory. Praca ta będzie ogłoszona w „Wiadomościach matematycznych“ [1].

W końcu zaproszony przez Zarząd Koła, p. Łaparewicz wyłuszczył przed zebranymi treść i układ napisanego przez siebie podręcznika Trygonometryi dla szkoły średniej. Podręcznik to obszerny i zawierający dużo zadań, a także niektóre mało uwzględniane rzeczy, jak np. początki Geodezyi. Uproszono p. Gabszewicza o bliższe objaśnienie i zreferowanie go na najbliższem posiedzeniu Koła.

Następnie przyjęto przez aklamacyę nowych członków: p. K. Sporzyńskiego, Rozmysłowskiego, Zawadzkiego Mieczysława i p. Borowiecką.

Na tem posiedzeniu obecni członkowie, którzy zapłacili ustanowioną składkę członkowską (3 rb.) otrzymali odpowiednie bilety z wyszczególnieniem dat posiedzeń naukowych Koła w ciągu 1-go półrocza 1907-go roku, a także pierwszy numer „Sprawozdań“ Koła.

---

[1]) Patrz „Wiad. Mat.“ t. XI, str. 83.

Digitized by Google

Posiedzenie dnia 29 grudnia 1906 r.

Obecnych osób 32.

Posiedzenie zagaił przewodniczący słowami, poświęconemi pamięci zmarłego w dniu 22 grudnia 1906 r. członka koła, Stanisława Kramsztyka, jednego z najbardziej zasłużonych pracowników na polu pedagogicznem i piśmienniczem, zacnego człowieka i obywatela. Nadmieniwszy, że na następnem posiedzeniu miesięcznem odczytane będzie obszerniejsze wspomnienie o zasługach nieboszczyka, opracowane na prośbę Zarządu Koła przez p. M. Heilperna, wezwał obecnych do uczczenia pamięci zmarłego kolegi przez powstanie z miejsc.

Następnie sekretarz Koła odczytał protokół posiedzenia poprzedniego z dnia 17 listopada 1906 r., którego treść wyżej jest zamieszczona.

P. Danielewicz wygłosił referat o nauce liczb niewymiernych w szkole średniej. Referent zwraca przedewszystkiem uwagę na konieczność poprawienia wadliwej, zdaniem jego, terminologii matematycznej polskiej i proponował wybrać specyalną komisyę do opracowania właściwej. Nie streszczamy dalszych wywodów referenta, ponieważ praca jego in extenso mieści się w bieżącym zeszycie „Sprawozdań"; dodajemy tylko, że na tle kwestyi, poruszonej przez autora, wywiązała się dość ożywiona wymiana zdań, w której przewodniczący bronił utrzymania dotychczasowej terminologii, uzasadniając pogląd swój historycznie, a także opierając się na współczesnych poglądach na zasadnicze pojęcia nauki, jakiemi są: liczba, wielkość i t. p.

P. Pożaryski w dłuższem przemówieniu wyłuszczył swój pogląd na naukę elektryczności i magnetyzmu w kursie szkoły średniej. Nad referatem tym, który ogłaszamy w całości w niniejszym zeszycie „Sprawozdań", wywiązała się dyskusya, w której między innymi zabierał głos p. K. Służewski, podkreślając konieczność zwracania większej uwagi w szkole średniej na stronę faktyczną, doświadczalną nauczania przy pozostawieniu szerszego rozwinięcia teoryi wykładom w szkole wyższej.

Digitized by Google

Lista członków Koła matematyczno-fizycznego dnia 28 grudnia 1906 r.

Ciąg dalszy [1].

49. Bagiński Karol, Warszawa, Prosta 14.
50. Biernacki Wiktor, Warszawa, Prosta 14.
51. Borzen Józef, Rawa, szkoła Udziałowa.
52. Borowiecka Marya, Warszawa, Żórawia 45.
53. Borowski Władysław, Warszawa, Prosta 14.
54. Ciechanowicz Lucyan, Warszawa, Smolna Wysoka 5—8.
55. Chmieleński Stanisław, Kalisz, szkoła handlowa.
56. Dziamarski Stanisław, Warszawa, Chmielna 25—14a.
57. Korzeniewski Zygmunt, Warsz. Marszałkowska 40 m. 17.
58. Łowieniecka Janina, Warszawa, Nowogrodzka 58.
59. Nowicka Konstancya, Warszawa, Nowogrodzka 19.
60. Orsetti Marya.
61. Przanowski Władysław, Warszawa, Hoża 62—25.
62. Przeciechowski, Warszawa, Żórawia 42—24.
63. Pyrz Antoni, Warszawa, Marszałkowska 120.
64. Rozmysłowski Michał, Warszawa, Chmielna 70.
65. Sporzyński Ksawery, Warszawa, Marszałkowska 60.
66. Srokowski Kazimierz, Dąbrowa Górnicza. Sekretarz Rady Zjazdu górniczego, naucz. szkoły handl. w Bendzinie.
67. Stypiński Józef, Warszawa, Al. Jerozolimska 37—19.
68. Wolbek Kazimierz, Warszawa, Nowo-Wielka 1A.
69. Zawadzki Mieczysław, Warszawa, Nowogrodzka 44.
70. Oksner Regina, Warszawa, Al. Jerozolimska 51.
71. Kutyłowski Wacław, Rawa.
72. Zagrodzki Feliks Narcyz, Warszawa, Żórawia 25—5.
73. Kamiński Stefan, Warszawa, szkoła Piotrowskiego.
74. Klebanowski Sylwester, Częstochowa.
75. Rotszejn Zofia, Warszawa.
77. Łaparewicz Aleksander, Warszawa, Sosnowa 13.

---

[1]) Patrz № 1 Sprawozdań, str. 5.

Digitized by Google

Kwestyonaryusz Koła matematyczno-fizycznego, rozesłany w październiku roku 1906 do zakładów naukowych polskich i do nauczycieli matematyki.

Koło matematyczno-fizyczne postanowiło sobie za jedno z najważniejszych zadań pracę nad podniesieniem pod względem metodycznym i dydaktycznym nauczania przedmiotów matematyczno-fizycznych w szkołach naszych.

Przystępując do tej pracy, Koło matematyczno-fizyczne pragnie przedewszystkiem obznajmić się szczegółowo z dotychczasowym stanem wykładu tych przedmiotów w dawniejszych i nowopowstałych szkołach prywatnych, aby tym sposobem uzyskać podstawę do swoich zamierzeń w najbliższej przyszłości.

Wychodząc z tego założenia Zarząd Koła matematyczno-fizycznego na posiedzeniu dnia 21 września 1906 roku postanowił zwrócić się do kierowników szkół oraz nauczycieli przedmiotów matematyczno-fizycznych w kraju naszym z prośbą o dostarczenie „Kołu" danych, dotyczących tej kwestyi. Zarząd żywi nadzieję, że prośba ta będzie spełniona i że niezadługo znajdzie się on w posiadaniu obfitego materyału informacyjnego, który poda następnie starannemu rozpatrzeniu.

W przekonaniu, że WPan podziela z nami ważność poruszonej sprawy i że nie odmówi nam swego poparcia, upraszamy WPana o nadesłanie odpowiedzi na niżej zamieszczone pytania wraz ze wszelkiemi materyałami, jakie uzna za właściwe dołączyć do odpowiedzi.

PYTANIA.

1. Nazwa szkoły i jej charakter (klasyczna, realna i t. p.). Liczba klas.

Digitized by Google

2. Liczba godzin przedmiotów matematyczno-fizycznych w każdej klasie.
   Czy liczba godzin jest dostateczna do przejścia całego kursu?
3. Liczba nauczycieli tych przedmiotów.
4. Czy wykłady Matematyki, Fizyki, Kosmografii prowadzi w danej klasie jeden nauczyciel, czy osobni nauczyciele?
5. Według jakiego programu prowadzone są wykłady?
   Czy i o wiele program ten odbiega od programu szkół rządowych?
   (Dołączyć programy, jeżeli są ułożone na piśmie lub w druku).
6. Czy w wykładzie Matematyki w klasie najwyższej dawane są uczniom pojęcia zasadnicze Rachunku wyższego (Analizy matematycznej) i w jaki sposób?
7. Czy przy wykładzie używane są podręczniki i jakie?
   (Wymienić je wraz ze zbiorami zadań).
8. Czy i jakie istnieją w szkole pomoce naukowe do wykładu Matematyki i Fizyki. (modele, rysunki, tablice, przyrządy, narzędzia...)?
9. Czy uczniom dawane są samodzielne prace, zajęcia np. w pracowniach?
10. Czy w bibliotece szkolnej znajdują się czasopisma naukowe i pedagogiczne do użytku wykładającego?

Pożądane są i wszelkie inne szczegóły, dotyczące tej sprawy, a w powyższym kwestyonaryuszu niewymienione.

Odpowiedzi prosimy nadsyłać pod adresem „Koła matematyczno-fizycznego". (Warszawa, Bracka 18)

Digitized by Google

Digitized by Google

B. DANIELEWICZ.

O wykładzie ilości niewymiernych w szkole średniej.[1]

Referent na wstępie zwraca uwagę na niezupełnie jeszcze ustaloną i może nie zawsze odpowiednią naszą terminologię matematyczną. Takie np. a małe, od którego zaczynamy i na którem kończymy Algebrę, bywa przez jednych nazywane wielkością, przez innych ilością, jeszcze przez innych liczbą algebraiczną i t. d. Liczba bywa nazywana wymierną i niewymierną, chociaż tak nazywać chyba można tylko to, co się daje mierzyć, a liczby mierzyć nie można, bo liczba jest już rezultatem pomiaru, jest jego wyrazem czy wyrażeniem, jest po prostu symbolem miary. Dlatego referent uważa, że gdyby Koło matematyczno-fizyczne zechciało się tą sprawą zająć, gdyby ją zbadało gruntownie i wypowiedziało jasno, jak w każdym przypadku postąpić należy, oddałoby dużą usługę zarówno autorom jak i ich czytelnikom, tak dobrze nauczającym jak i nauczanym.

Referent mówić będzie nie o liczbach, lecz o ilościach niewymiernych, rozumiejąc przez ilość każdą wielkość, względnie każdy stosunek dwóch wielkości tego samego gatunku, wszystko jedno, wymierzone czy niewymierzone, zarówno wyrażone jak i niewyrażone przez liczbę.

Otóż w szkole średniej ilości niewymierne są albo bardzo tylko powierzchownie traktowane, albo też do wykładu używa się t. z. przekroju liczb lub dwóch szeregów ilości wymiernych, względnie liczb, posiadających trzy wiadome własności.

---

[1]) Referat, przedstawiony na posiedzeniu naukowem Koła matematyczno fizycznego dnia 29 grudnia 1906 r.

Digitized by Google

Sposoby te są niewątpliwie bardzo dobre, lecz młodzież poczynająca studyować Algebrę, zdaje się ich nie rozumieć jak należy, bo nie widzi wyraźnie celu, w jakim te szeregi są tworzone, skutkiem czego referent zapytuje, czy nie byłoby lepiej pójść drogą odwrotną, t. j. najprzód dać pojęcie o ilościach niewymiernych całkiem niezależnie od owych szeregów; wykazać, że takie ilości nie dają się ściśle przez liczby wyrazić, lecz za to można dla każdej zawsze sformować takie dwa szeregi ilości wymiernych, względnie liczb, które posiadają wiadome trzy własności, i skutkiem tego wartość ilości niewymiernej można uważać za granicę, do której wyrazy rzeczonych szeregów dążą. Że granicy tej wprawdzie nigdy dosięgnąć nie można, lecz każdy wyraz obu szeregów przedstawia nam mniej lub więcej przybliżoną jej wartość.

Pierwszą część można przeprowadzić podobnie, jak się to czyni (a przynajmniej, jak się dawniej postępowało) w Geometryi, gdy chodziło o wprowadzenie pojęcia wielkości niespółmiernych. Sposób ten jest powszechnie znany, dlatego podajemy go tylko w zarysie.

Niech będą dwie ilości jakiekolwiek R i s, z których pierwszą chcemy wyrazić przez drugą. Dla prostoty niech te ilości przedstawiają dwie proste ograniczone.

Ażeby R wyrazić przez s, przenieśmy s na R, otrzymaną resztę r na s, stąd znów wypadłą resztę r' na r i.t. d. Gdy tak postępować będziemy dalej, mogą się zdarzyć dwa i tylko dwa przypadki: albo trafimy na takie $r^{(\lambda)}$, które w poprzedniej reszcie mieści się całkowicie, czyli następna reszta będzie już zerem; albo też na taką resztę nie trafimy nigdy, choćbyśmy działanie nasze prowadzili bez końca, czyli, jak się zwykle mówi, do nieskończoności.

W pierwszym przypadku R i s daje się wyrazić całkowicie przez ostatnią resztę, t. j. dla dwu tych ilości reszta ostatnia stanowi miarę spólną, skutkiem czego takie dwie ilości można nazwać s p ó ł m i e r n e m i. Stosunek ich daje się wtedy wyrazić przez liczbę, a gdy s przyjmiemy za jedność, R daje się wyrazić przez liczbę jednostek s, czyli R można w y m i e r z y ć przez jednostkę s, i dlatego takie R zowie się i l o ś c i ą w y m i e r n ą (w stosunku do jednostki s).

Jeżeli zajdzie przypadek drugi, o s t a t n i a reszta n i e i s t n i e j e, więc naturalnie, wtedy R i s nie posiadają spólnej miary,

Digitized by Google

czyli są niespółmierne; stosunku R do s przez liczbę wyrazić nie można, R przez jednostkę s wymierzyć się nie daje. Dlatego takie R nazywa się ilością niewymierną (w stosunku do jednostki s).

Na podstawie powiedzianego można postawić następujące dwie definicye:

1-o Ilością wymierną nazywamy taką wielkość, która, będąc spółmierną z jednostką, daje się przez liczbę tych jednostek wyrazić. Zaś

2-o. Ilością niewymierną nazywamy taką wielkość, która, będąc niespółmierną z jednostką, nie daje się przez liczbę tych jednostek wyrazić.

Wszakże, acz ilość niewymierna R, w stosunku do jednostki s, przez liczbę tych jednostek wyrazić się nie daje, to jednak można zawsze dla niej sformować takie dwa szeregi ilości wymiernych, względnie liczb, które posiadają następujące trzy własności:

1-o. Ilość R stale zawiera się pomiędzy każdą parą odpowiednich sobie w obu szeregach wyrazów, z których wszystkie wyrazy jednego szeregu są stale większe lub stale mniejsze od odpowiednich sobie wyrazów szeregu drugiego.

2-o. Wyrazy jednego szeregu stale rosną, drugiego stale maleją lub naodwrót.

3-o. Różnice pomiędzy odpowiedniemi sobie wyrazami obu szeregów stale maleją i mogą stać się mniejszemi od jakkolwiek małej ilości, jeżeli tylko weźmiemy parę wyrazów, dostatecznie od początku odległą.

Ażeby tego dowieść, załóżmy, że R i s są niespółmierne i przenieśmy s na R; niech się mieści np. a razy $+$ reszta r. Podzielmy s na ilekolwiek, np. na k równych części, byle mniejszych od r i od $s-r$; oznaczmy wielkość tych części przez $s_1 = \frac{s}{k}$ i s_1 przenieśmy na R. Niech się mieści b razy $+$ reszta r_1. Podzielmy s na większą, niż wprzód, liczbę części, np. na l części równych, mniejszych od r_1.

Digitized by Google

i od $s_1 - r_1$; oznaczmy wielkość tych cząstek przez $s_2 = \frac{s}{l}$ i znów przenieśmy s_2 na R i postępujmy dalej tak samo. Ponieważ R i s są z założenia niespółmierne, przeto nigdy nie trafimy na $r_n = 0$, tamtemem i na takie s_n, któreby mieściło się całkowicie w R. Ale otrzymamy związki:

$$(1)\quad \begin{cases} R = as + r, \; r < s, \\ R = bs_1 + r_1, \; r_1 < s_1 \text{ oraz } s_1 = \frac{s}{k} < r \text{ i od } s - r, \\ R = cs_2 + r_2, \; r_2 < s_2 \;\; „ \;\; s_2 = \frac{s}{l} < r_1 \text{ i od } s_1 - r_1, \\ R = ds_3 + r_3, \; r_3 < s_3 \;\; „ \;\; s_3 = \frac{s}{m} < r_2 \text{ i od } s_2 - r_2, \end{cases}$$

i t. d. bez końca.

Oprócz tego, ze sposobu naszego postępowania wynika:

$$(2)\quad \begin{cases} r > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots\ldots \\ s > s_1 > s_2 > s_3 > \ldots\ldots \\ s - r > s_1 - r_1 > s_2 - r_2 > s_3 - r_3 > \ldots\ldots \end{cases}$$

albowiem, skoro $s - r > s_1$, jest tembardziej większe od $s_1 - r_1$ i t. d.

Otóż z (1) możemy sformować następujące dwa szeregi:

$$(3)\quad \begin{cases} as, \quad bs_1, \quad cs_2, \quad ds_3 \ldots\ldots \\ (a+1)s, \; (b+1)s_1, \; (c+1)s_2, \; (d+1)s_3, \ldots\ldots, \end{cases}$$

które właśnie posiadają wszystkie trzy wyżej zapowiedziane własności.

Przedewszystkiem wyrazy obu szeregów (3) są ilościami wymiernemi względem s, bo $s_1 = \frac{s}{k}$, $s_2 = \frac{s}{l}$ i t. d. — mogą więc być przez liczby jednostek s wyrażone. Następnie R widocznie zawiera się stale pomiędzy każdą parą odpowiednich sobie wyrazów obu szeregów, oraz każdy wyraz drugiego szeregu jest stale większy od odpowiedniego wyrazu szeregu pierwszego. Mamy więc spełniony warunek pierwszy.

Digitized by Google

Dalej, ponieważ wyrazy pierwszego szeregu powstają z (1) przez opuszczanie z tego samego R coraz mniejszych cząstek $r > r_1 > r_2 > r_3 \ldots$, zatem reszty pozostałe, czyli wyrazy szeregu pierwszego stale rosną. I naodwrót, ponieważ wyrazy szeregu drugiego otrzymujemy z (1) dodając do tego samego R coraz mniejsze ilości $s-r > s_1-r_1 > s_2-r_2 > \ldots$, więc wyrazy szeregu drugiego stale maleją, t. j. spełnia się warunek drugi.

Wreszcie, różnica pomiędzy odpowiedniemi sobie wyrazami obu szeregów (3) są równe: $s, s_1, s_2, s_3, \ldots$, te zaś ilości według (2) maleją, przeto różnice rzeczone również stale maleją i mogą się stać mniejszemi od jakkolwiek małej, z góry pomyślanej, ilości, jeżeli weźmiemy pary wyrazów dostatecznie od początku oddalone.

Skoro zaś pomienione różnice maleją nieograniczenie i wyrazy jednego szeregu stale rosną, drugiego stale maleją, znaczy to, że wyrazy obu szeregów (3) dążą do zrównania się, chociaż zrównać się nigdy nie mogą, a ponieważ R zawsze pomiędzy niemi się mieści, zatem wyrazy obu szeregów tembardziej zbliżają się do R, dążą do tego, aby się stały równemi ilości R, którą, skutkiem tego, uważać można za granicę, do jakiej wyrazy obu szeregów (3) podążają.

I oto przyszliśmy do tego samego określenia, z jakiego metoda odwrotna wychodzi, lecz nie postawiliśmy go z góry, tylko po wyjaśnieniu pochodzenia i znaczenia ilości niewymiernych, po wykazaniu, że ilości niewymiernej ściśle przez liczbę danych jednostek wyrazić nie można, dowiedliśmy ogólnie, iż dla każdej ilości niewymiernej można takie dwa szeregi ułożyć.

Dalej iść już można jak zwykle: można wyprowadzić wniosek o p r z y b l i ż o n y c h (z niedoborem lub nadmiarem) w a r t o ś c i a c h ilości niewymiernych, można je zilustrować na liczbach i t. d. Wreszcie należy uzasadnić działania na ilościach niewymiernych. Tylko odejmowanie bywa czasami niewłaściwie tłómaczone. Bywa ono czasami objaśniane w ten sposób: Gdy mamy dwa szeregi wyrazów:

$$(a) \quad \begin{cases} a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \text{ rosnący,} \\ b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots \text{ malejący,} \end{cases}$$

Digitized by Google

które definiują ilość niewymierną A, oraz dwa szeregi.

$$(\beta)\quad \begin{cases} c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots \text{ rosnący}, \\ d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n, \ldots \text{ malejący}, \end{cases}$$

definiujące ilość niewymierną C, to dla utworzenia szeregów definiujących różnicę $A-C$ należy sformować szeregi różnic:

$$(\gamma)\quad \begin{cases} a_1-c_1, a_2-c_2, a_3-c_3, \ldots, a_n-c_n, \ldots\ldots \\ b_1-d_1, b_2-d_2, b_3-d_3, \ldots, b_n-d_n, \ldots\ldots \end{cases}$$

Otóż, ogólnie rzecz biorąc, tak nie jest; albowiem gdy oznaczymy $b_n-a_n=r'_n$ i $d_n-c_n=r_n''$, otrzymamy:

$$b_n-d_n=a_n-c_n+(r'_n-r''_n).$$

Jeżeli więc, jak to najczęściej bywa, $r'_n=r''_n$, to jest też $b_n-d_n=a_n-c_n$, czyli szeregi (γ) są identyczne, skutkiem czego nie czynią zadość wymaganym od nich trzem warunkom, a temsamem nie definiują różnicy $A-C$.

Żeby otrzymać szeregi właściwe, należy widocznie poodejmować odpowiednie sobie wyrazy szeregów wewnętrznych i zewnętrznych t. j. gdy np. $A>C$. sformować trzeba szeregi:

$$(\delta)\quad \begin{cases} b_1-c_1, b_2-c_2, b_3-c_3, \ldots, b_n-c_n, \ldots\ldots \text{ malejący}, \\ a_1-d_1, a_2-d_2, a_3-d_3, \ldots, a_n-d_n, \ldots\ldots, \text{ rosnący}, \end{cases}$$

które, jak to nie trudno ogólnie sprawdzić, odpowiadają wszystkim trzem warunkom wiadomym, czyli rzeczywiście definiują różnicę $A-C$.

Digitized by Google

M. POŻARYSKI.

O nauce elektryczności i magnetyzmu w szkołach średnich.[1]

Kurs Fizyki w szkołach średnich, według nowszych programów, ma się dzielić na dwie części: ogólny wstęp o charakterze pogadankowym w jednej z klas niższych i część zasadnicza, obejmująca możliwie szczegółowo wszystkie działy Fizyki — w klasach wyższych.

Przy takim podziale można i należy oprzeć wykład w klasach wyższych na ścisłych pojęciach zasadniczych wielkości fizycznych, przystosowując układ przedmiotu do stopniowego rozwoju tych pojęć. Poza tem należy uwydatnić doniosłość poglądu energetycznego na zjawiska, z uwzględnieniem prawa zachowania energii. Na podstawie takiego założenia wypadnie wyłożyć na początku Mechanikę, łącznie, z mechanicznemi własnościami ciał stałych, ciekłych i gazowych, a także i Akustykę, następnie naukę o cieple, dalej światło i promieniowanie wogóle, a w końcu naukę o elektryczności i magnetyzmie.

Stosując się do wypowiedzianych na początku myśli przewodnich, w dziale Fizyki: „Elektryczność i magnetyzm" należy przedstawić przedmiot w ten sposób, aby uwydatnić podstawowy skład jednostek zasadniczych wielkości elektromagnetycznych, a także związek zjawisk elektrycznych i magnetycznych z innemi zjawiskami w przyrodzie.

Opierając się na tych założeniach, proponuję następujący porządek wykładu elektryczności i magnetyzmu.

I. Magnetyzm. (Zasadnicze zjawiska i wyobrażenia). (Pojęcia masy magnetycznej i natężenia pola magnetycznego).

II. Prąd elektryczny.

Zasadnicze wyobrażenia.

Siła prądu, napięcie, siła elektromotoryczna.

Prawo Ohma, opór elektryczny.

---

[1]) Rzecz, odczytana na posiedzeniu naukowem Koła matematyczno przyrodniczego dnia 29 grudnia 1996 r.

Digitized by Google

Prawa Kirchhoffa.

Pomiary siły prądu, napięcia, oporu.

Przemiana pracy prądu w energię chemiczną. (Elektroliza, teorya i zastosowania.)

Przemiana energii chemicznej w pracę prądu (ogniwa galwaniczne).

Przemiana pracy prądu w energię cieplną i odwrotnie. (Prawo Joule'a, termoelektryczność, zjawisko Peltiera i Thomsona).

Przemiana pracy prądu w pracę mechaniczną i odwrotnie. (Siły działające na prąd w polu magnetycznem, prądy indukcyjne, motory elektryczne i dynamomaszyny).

Przemiana pracy prądu elektrycznego w energię pola magnetycznego i odwrotnie. (Samoindukcya, indukcya przy prądzie zmiennym, transformatory.)

Elektromagnesy, pojęcie o obwodzie magnetycznym. Telegraf, dzwonek i telefon.

III. Zarys zjawisk związanych z energią elektryczności w spoczynku.

Powstawanie ładunków elektrycznych.

Siły działające między ładunkami.

Pojęcie ilości elektryczności elektrostatycznej.

Rozmieszczenie ładunków. Pojęcie pojemności i potencyału. Kondensator. Maszyny elektryczne.

IV. Wyładowania elektryczne.

Wyładowania przez gazy o rozmaitem rozrzędzeniu. Promienie katodalne i Röntgena. Fale elektryczne (telegraf bez drutu). Elektrony.

Wyobrażenia o teoryi elektromagnetycznej światła. Radioaktywność,

V. Elektryczność atmosferyczna.

Do tego ogólnego schematu pozwolę sobie dodać kilka uwag.

W części pierwszej, poza omówieniem zasadniczych zjawisk magnetycznych, należy wyraźnie określić następujące pojęcia: bieguny magnetyczne, masa magnetyczna i natężenie pola magnetycznego.

Bieguny magnetyczne—jako środki sił równoległych, działających na biegunowe powierzchnie magnesu.

Masa magnetyczna — jako wielkość, charakteryzująca stan ma-

Digitized by Google

gnetyczny magnesu, proporcyonalna do siły współdziałania magnesów. Natężenie pola magnetycznego — jako wielkość charakterystyczna, określająca stopień zmian magnetycznych w eterze, zachodzących w danym punkcie przestrzeni otaczającej magnes.

W części drugiej należy rozpocząć wykład od omówienia w krótkości warunków powstawania prądu elektrycznego z pospolitego ogniwa galwanicznego (najlepiej: cynk, miedź, kwas siarczany), a więc wyjaśnienia takich pojęć, jak obwód elektryczny, izolator, przewodnik, przerywanie obwodu, zamykanie obwodu i t. d.; następnie zwrócić szczególną uwagę ucznia na dwie charakterystyczne cechy prądu elektrycznego: powstawanie pola magnetycznego wokoło przewodnika z prądem i wywiązywanie się ciepła we wszystkich częściach obwodu.

Na podstawie tych nielicznych i prostych wiadomości należy konsekwentnie i stopniowo określić ściśle pojęcia charakterystycznych wielkości dla prądu elektrycznego, a mianowicie: pojęcie siły prądu określa się na zasadzie wielkości natężenia wzbudzonego pola magnetycznego, stosując wzór dla natężenia pola w środku kołowego przewodnika.

Następnie należy zaznaczyć, że wyobrażamy sobie prąd elektryczny jako ruch czynnika, zwanego elektrycznością (nie mówiąc narazie jakiej elektryczności) w kierunku, dowolnie przyjętym i odpowiednio określonym przez kierunek odchylenia igły magnesowej.

Przy takiem wyobrażeniu o prądzie, siłę prądu wypada uważać jako ilość elektyczności, przebiegającą w jednostce czasu przez przekrój przewodnika, a stąd pojęcie ilości elektryczności jako iloczynu siły prądu przez czas.

Dalej należy rozważyć energetyczną stronę zjawiska prądu, a mianowicie zwrócić uwagę, że na elektrodach elementu galwanicznego odbywają się przemiany chemiczne, świadczące o znikaniu energii chemicznej, natomiast zaś wzdłuż całego obwodu powstaje energia cieplna. Na zasadzie tych dwóch zjawisk prawo zachowania energii pozwala wnosić, że energia chemiczna daje pracę prądu, a ta ostatnia energię cieplną (można zaznaczyć, że zwykle część energii chemicznej zamienia się w cieplną bezpośrednio bez przejścia w pracę prądu elektrycznego.)

Następnie należy pokazać, że prąd tej samej siły, pochodzący z rozmaitych źródeł, wywiązuje rozmaitą ilość ciepła w tym samym cza-

Digitized by Google

sie. Stąd wypływa konieczność rozważania innej jeszcze wielkości, od której zależy praca prądu elektrycznego.

Wielkość tę nazywamy napięciem prądu, uważając ją za wprost proporcyonalną do wielkości pracy prądu. — Dla wyjaśnienia bliższego tego pojęcia należy zwrócić uwagę, że przy rozważaniu napięcia musi być dokładnie określona część obwodu, dla której rozważa się napięcie prądu. Tutaj bardzo dobrze jest rozważyć analogię mechaniczną z wodą, płynącą z wyższych miejsc do niższych. Następnie należy dać pojęcie potencyałów w rozmaitych miejscach obwodu jako takich wielkości, których różnica stanowi napięcie prądu elektrycznego. — Zarazem trzeba uwydatnić rozkład potencyałów wzdłuż obwodu elektrycznego sposobem wykreślnym i zapomocą odpowiednio przygotowanego modelu.

Siłę elektromotoryczną należy określić jako sumę podniesień petencyału w elemencie galwanicznym, — przypisując jej kierunek określony od potencyału niższego do wyższego.

Dalej, opierając się na doświadczeniu, należy pokazać wpływ przewodnika na siłę prądu w obwodzie, a stąd pojęcie oporu elektycznego przewodnika i prawo Ohma dla części obwodu i dla całego obwodu, a zarazem zależność oporu od długości, przekroju drutu i oporu właściwego.

Następnie po omówieniu dwóch zasadniczych praw Kirchhoffa, należy przejść do krótkiego opisu działania i urządzenia kilku najprostszych przyrządów mierniczych technicznych (amperomierzy i woltomierzy), poza tem, o ile czas pozwoli, w najprostszej formie przedstawić zasadę kompensacyjnej metody mierzenia sił elektromotorycznych, zastosowanie mostu Wheatstone'a do mierzenia oporów, zasadę stosowania amperomierza i woltomierza do tego samego celu i mierzenie oporów dużych przez porównanie prądów, przez nie przechodzących.

W dalszym ciągu wykład zjawisk wskazanych w planie nie przedstawia trudności, a przeciwnie przez ideę ogólniającą jest ułatwiony. Dla wytłómaczenia wzorów charakteryzujących zjawiska wystarcza przeważnie uprzytomnić sobie kierunek zamiany energii, a stąd ruch elektryczności od wyższego potencyału do niższego lub odwrotnie. W zjawiskach elektrolizy, elektromotorów i prądów samoindukcyjnych (w chwili powstawania prądu), należy zwracać uwagę na siłę elektromotoryczną, powstającą w kierunku przeciwnym do prądu, —

Digitized by Google

a więc ruch elektryczności od potencyału wyższego do niższego, co sprowadza zamianę pracy prądu na rozmaite rodzaje energii.

Przy omawianiu teoryi elektrolizy należy wspomnieć o wyobrażeniu elektryczności ujemnej i dodatniej i o dwóch prądach płynących w kierunkach przeciwnych, zaznaczając, że takie wyobrażenie jest zbyteczne dla zdania sobie sprawy z innych zjawisk.

Mówiąc o elektromagnesach, nie można pominąć takiej zasadniczej rzeczy, jak zależności siły elektromagnesów od ilości amperozwojów i oporu obwodu magnetycznego elektromagnesu.

W dziale III-im mają być omówione zasadnicze zjawiska, dotyczące ładunków elektrycznych w spoczynku. Tutaj można zwrócić uwagę na układ wielkości elektrostatycznie pojętych a stąd inny układ jednostek. — Przy rozważaniu zjawiska kondensacyi należy zwrócić uwagę na to, że każde dwa przewodniki stanowią rodzaj kondensatora. Działanie kondensatora najlepiej wyjaśnić przez zależność potencyału danego ładunku elektrycznego od ładunków otoczenia.

W dziale IV-ym, na początku należy przedstawić rozmaite rodzaje zjawisk, które sobie wyobrażamy jako spowodowane przepływem elektryczności przez ciała źle przewodzące elektryczność (tutaj zależność między siłą a napięciem prądu nie podlega prawu Ohma). Pozatem w tymże dziale należy króciej lub dłużej, stosownie do okoliczności, omówić wyobrażenia współczesne o elektronach, radioaktywności, falach elekromagnetycznych i elektromagnetycznej teoryi światła.

W końcu wreszcie w dziale V-ym mają być pokrótce wyjaśnione z punktu widzenia naukowego zasadnicze zjawiska elektryczne i elektromagnetyczne, które spostrzegamy w przyrodzie.

Przedstawiając ten nowy plan pod rozwagę wykładających, miałem na względzie zwrócić ich szczególną uwagę na niezbędność ścisłego formułowania zasadniczych pojęć nauki i uwydatnienia prostych i wyraźnych związków pomiędzy wielkościami, określonemi przez te pojęcia; zarazem chciałbym usłyszeć zdania co do dydaktycznej strony takiego planu i możności wykonania jego w istniejących warunkach wykładu w szkole średniej. Pożądane są również uwagi co do zmian w ilości i układzie godzin, które umożliwiły by prowadzenie całego kursu Fizyki w podobny sposób, jak to jest przedstawione w planie nauki o elektryczności i magnetyzmie, — uwzględniając istnienie kursu propedeutycznego Fizyki, w którejkolwiek z klas niższych.

Digitized by Google

Tad. BANACHIEWICZ.

PARĘ UWAG O SZEREGACH HARMONICZNYCH.

Uwagi powyższe podajemy z powodu zadania, umieszczonego w № 1 „Sprawozdań Koła matematyczno-fizycznego w Warszawie“ za r. 1906. „Udowodnić elementarnie (bez pomocy twierdzenia, że pomiędzy N a $2N$ znajduje się co najmniej jedna liczba pierwsza), iż suma $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}$ dla $n>1$ jest liczbą ułamkową.“

Twierdzenie, iż $\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{i}$ $(n>1)$ jest ułamkiem, podał i udowodnił p. Zimin z Warszawy w № 384 „Gońca“ Spaczyńskiego (str. 283—286; po ros.); punktem wyjścia jego rozwiązań jest tak zwany postulat Bertranda, którego dowód zawdzięczamy Czebyszewowi[1]: pomiędzy N a $2N-2$ $(N>3)$ znajduje się co najmniej jedna liczba pierwsza. Otóż z postulatu Bertranda twierdzenie p. Zimina daje się wyprowadzić w kilku wierszach; proste to twierdzenie nie wymaga jednak tak obszernych wiadomości pomocniczych.

Wprawdzie prawdziwość postulatu Bertranda wydaje się pewna i bez dowodu, ale mimo to nie przystoi brać go za podstawę rozważań elementarnych, pamiętając o słowach Gaussa: „najpiękniejsze twierdzenia Arytmetyki wyższej..... posiadają tę własność, że łatwo odkryć je za pomocą indukcyi, ale dowody ich są tak głęboko utajone, że natrafić na nie można tylko przez najgruntowniejsze bada-

[1]) Petropol. Ac. Bull. 11, rok 1853; również Tchebychef, Oeuvres. Tome I (1899), Mémoire sur les nombres premiers.

Digitized by Google

nia. Dla tego to właśnie Arytmetyka wyższa roztacza ten przedziwny urok, który uczynił ją najulubieńszą nauką wielkich matematyków...[1]

Poniżej dajemy zupełnie elementarne dowodzenie twierdzenia p. Z i m i n a, naprowadzające na dość ciekawe uogólnienie.

Oznaczamy przez S_1 wyrażenie:

$$(a_1) \qquad S_1 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}, \qquad (n > 1)$$

i pomnóżmy obie strony równości (a_1) przez iloczyn $1.2.3\ldots\ldots n$, n wyrazów ciągu naturalnego:

$$(b_1) \qquad 1, 2, 3\ldots\ldots, n;$$

po przeniesieniu wszystkich wyrazów na stronę lewą, będzie:

$$(1) \qquad S_1 . 1.2.3\ldots. n - 2.3.4.\ldots, n - 3.4\ldots. n.1 - 12.3\ldots. (n-1) = 0.$$

Przypuśćmy, że S_1 jest liczbą całkowitą.

Wśród liczb ciągu (b_1) znajduje się, dla każdego n, jedna liczba—oznaczmy ją przez m—podzielna w liczbach całkowitych przez taką potęgę 2^s liczby 2, której wielokrotnością nie jest żadna inna liczba ciągu. Tak np. dla ciągu 1, 2, 3, 4, 5, 6, jest $m = 4 = 2^2$, gdyż w tym ciągu żadna liczba, prócz 4, nie jest podzielna bez reszty przez 2^2.

Podobnie dla liczb od 1 do 100 jest $m = 64 = 2^6$, gdyż prócz 64 żadna liczba, należąca do pierwszej setki, nie jest podzielna przez 2^6.

Innemi słowy, w ciągu (b_1) znajduje się tylko jedna liczba, podzielna przez najwyższą potęgę liczby 2. Dla dowodzenia załóżmy, że takich liczb jest w nim więcej niż jedna, a więc co najmniej dwie: m_1 i $m_2 > m_1$. Byłoby wtedy:

$$m_1 = \alpha . 2^s, \quad m_2 = \beta . 2^s \quad (\alpha \text{ i } \beta \text{ liczby nieparzyste, } \beta > \alpha),$$

i w ciągu uważanym znajdowałaby się też liczba m_3, określona przez równanie $m_3 = (\alpha + 1)2^s$ (gdyż $\beta . 2^s > (\alpha + 1)2^s > \alpha . 2^s$, a w ciągu (b_1) żadna liczba całkowita pomiędzy m_1 i m_2 nie jest pominięta).

Lecz $m_3 = (\alpha + 1)2^s =$ (liczbie parzystej) $. 2^s$, byłoby podzielne przez 2^{s+1}, a więc przez wyższą potęgę liczby 2 niż m_1 i m_2, co przeczy założeniu.

[1]) Göttingische gelehrte Anzeigen, 1808, Mai 12: również Werke, II Bd. str. 152 (mylnie oznaczone 115).

Digitized by Google

Istotnie więc ciąg (b_1) zawiera jednę tylko liczbę, podzielną przez najwyższą potęgę liczby 2.

Ustaliwszy to, widzimy, że wśród wyrazów lewej strony równości (1) będzie jeden — oznaczmy go na chwilę przez w_m — podzielny przez niższą potęgę liczby 2, niż pozostałe; będzie nim ten wyraz, któremu brak czynnika m, podzielnego przez najwyższą potęgę liczby 2. Dzieląc obydwie strony wyrażenia (1) przez pewną potęgę liczby 2, dzielącą bez reszty wszystkie wyrazy, prócz w_m, otrzymalibyśmy:

$$(\text{liczba całkowita}) - (\text{ułamek}) = 0,$$

co świadczy o niemożliwości poczynionego co do S_1 założenia.

Uważajmy ogólniej wyrażenie:

$$\text{(A)} \qquad S = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \ldots\ldots + \frac{a_n}{b_n}, \text{ w którem } a_i, b_i \ (i=1,2,3,\ldots,n)$$

stanowią parę liczb całkowitych, względnie pierwszych, a mianowniki b_i tworzą ciąg:

$$\text{(B)} \qquad b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots b_n,$$

o tej własności, że wśród wyrazów ciągu znajduje się jeden, np. b_m, podzielny przez p^s, s-tą potęgę liczby pierwszej p, nie dzielącą bez reszty żadnego innego wyrazu b_i $(i = 1, 2, 3, - m-1, m+1, \ldots\ldots, n)$.

Suma S będzie ułamkiem: dowód byłby powtórzeniem dopiero co przeprowadzonych rozumowań dla szczególnego przypadku $a_i = 1$, $b_i = i$, $p = 2$ [1].

Dobierając na a_i i b_i różne liczby o własnościach dopiero co określonych, możemy wypisać różnorodne wyrażenia o wartości ułamkowej.

Przykłady:

1) Ciąg;

$u+1, u+1, u+3, \ldots\ldots, u+n$ (u liczba całkowita $\geqslant 0$)

---

[1]) Zakładając prawdziwość postulatu Bertranda, wyciągamy z niego, że przez największą liczbę pierwszą w ciągu (b_1), może być podzielna bez reszty w tymże ciągu tylko jedna liczba; twierdzenie p. Zimina dowiedzione jest odrazu.

Digitized by Google

jest ciągiem (B) z liczby pierwszą $p=2$. Dowód identycznie ten sam, co w rozważanym wyżej przypadku ciągu (b_1), dla którego $u=0$.

Kładąc $a_i=\pm 1$, otrzymamy ułamek:

$$(a_2)\qquad S_2=\pm\frac{1}{u+1}+\frac{1}{u+2}\pm\frac{1}{u+3}\pm\ldots\ldots\pm\frac{1}{u+n}=\sum_{i=1}^{i=n}\pm\frac{1}{u+i},$$
$$(u\geqslant 0,\ n>1)$$

w wyrażeniu tem można znaki brać, jak się podoba.

2) Uważajmy ogólnie ciąg liczb dodatnich, stanowiących postęp arytmetyczny o różnicy nieparzystej, a więc ciąg:

$$(b_3)\qquad u+(2\nu+2),\ u+(2\nu+1)2,\ldots,u+(2\nu+1)i\ldots,u+(2\nu+1)n$$

gdzie u, ν, i n są liczby całkowite dodatnie.

Powiadam, że i ciąg (b_3) jest ciągiem (B), dla którego $p=2$ Przypuśćmy bowiem, że jest w nim więcej niż jedna, a więc conajmniej dwie liczby m_1 i $m_2>m_1$, podzielne przez 2^s, najwyższą potęgę liczby 2.

Jeżeli m_1 i m_2 należą do ciągu (b_3), to:

$$(2)\qquad \left.\begin{aligned} m_1&=u+(2\nu+1)i_1\\ m_2&=u+(2\nu+1)i_1\end{aligned}\right\}\ i_1 \text{ i } i_2 \text{ liczby całkowite dodatnie, } i_2>i_1;$$

zgodnie zaś z założeniem:

$$(3)\qquad \left.\begin{aligned} m_1&=\alpha.2^s\\ m_2&=\beta.2^s\end{aligned}\right\}\ \alpha \text{ i } \beta \text{ liczby nieparzyste, } \beta>\alpha.$$

Z (3) wyciągamy $m_2-m_1=(\beta-\alpha).2^s\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2^{s+1})$, gdyż $\beta-\alpha\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$; że zaś z (2) mamy $m_2-m_1=(2\nu+1)(i_2-i_1)$, przeto $(2\nu+1)(i_2-i_1)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2^{s+1})$, skąd $i_2-i_1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2^{s+1})$.

Weźmy teraz liczbę i_3, określoną przez równanie:

$$(4)\qquad i_3=i_1+2^s.$$

Mamy oczywiście $i_2>i_3>i_1$, wskutek czego liczba

$$(5)\qquad m_3=u+(2\nu+1)i_3,$$

znajduje się w ciągu (b_3).

Digitized by Google

Wstawiając do (5) wartość i_3 z (4), otrzymamy:

$$m_3 = u+(2\nu+1)(i_1+2^s) = u+(2\nu+1)i_1+(2\nu+1).2^s,$$

i uwzględniając (2) i (3):

$$(6) \qquad m_3 = m_1+2^s = a.2^s+2^s = (a+1)2^s;$$

że zaś $a+1 \equiv 0 \pmod 2$, przeto z (6) wypływałoby $m_3 \equiv 0 \pmod{2^{s+2}}$ co świadczy o niemożliwości poczynionego założenia, że liczb, podzielnych przez najwyższą potęgę liczby 2, jest w ciągu (b_1) więcej niż 1.

Ciąg (b_3) jest więc istotnie ciągiem (B).

Ustaliwszy to, weźmy ciąg:

$$[u+(2\nu+1)]^k,\ [u+(2\nu+1).2]^k,\ \ldots\ [u+(2\nu+1)n]^k,$$

którego wyrazy są k-temi potęgami (k liczba całkowita >0) wyrazów ciągu (b'_2). Rzecz widoczna, że i ciąg (b'_3) jest ciągiem (B), w którym $p=2$.

Wartość wyrażenia:

$$(a_3) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{a_i}{[u+(2\nu+1)i]^k}$$

będzie więc ułamkiem; (u, r jakiekolwiek liczby całkowite $\geqslant 0$, k liczba całkowita >0, a_i liczba pierwsza względem $u+(2\nu+1)i$). Kiedy $a_i=\pm 1$, $r=0$, $k=1$, (a_3), przechodzi na (a_2), kiedy zaś $a_i=1$, $r=0$, $k=1$, $u=0$, na (a_1).

Otrzymujemy więc twierdzenie: **suma algebraiczna ułamków nieprzywiedlnych, których mianowniki są całkowitemi dodatniemi potęgami liczb całkowitych dodatnich, tworzących postęp arytmetyczny o różnicy nieparzystej, jest ułamkiem.**

Przykładem wyrażenie:

$$\pm\frac{1}{2^k} \pm \frac{2^h}{3^k} \pm \frac{3^h}{4^k} \pm \ldots \pm \frac{(n-1)^h}{n^k},$$

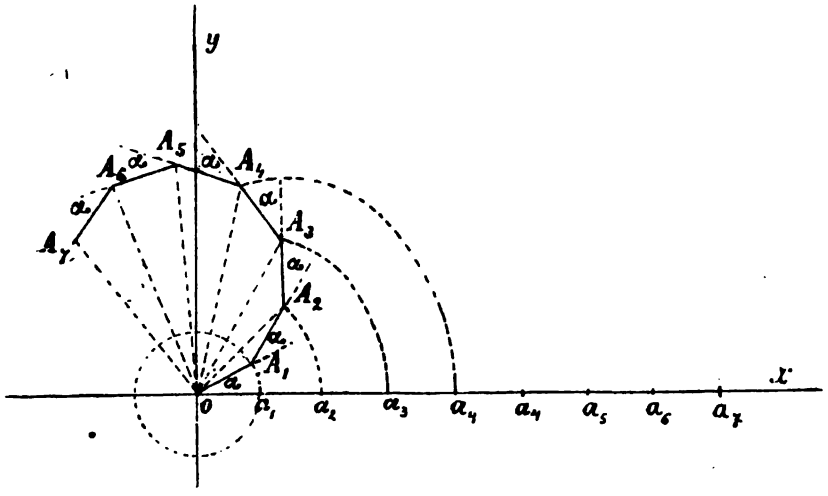
w którem znaki można brać jak się podoba, h i k liczby całkowite dodatnie.

Digitized by Google

MISCELLANEA MATEMATYCZNE.

1. Nieco odmienny sposób dowodzenia twierdzeń Poinsota o wielokątach foremnych i związane z nim niektóre szczegóły.

Weźmy na osi x kartezyańskiego układu spółrzędnych, poczynając od początku tegoż O, szereg równych odcinków $\delta = Oa_1 = a_1a_2 = a_2a_3 = \ldots\ldots = a_{n-1}a_n$ (na fig. $n=7$). Niech aa_1 obróci się



dokoła O o kąt α, tak samo a_1a_2 dokoła a_1 o tenże kąt i t. d., wtedy zamiast odcinka Oa_n otrzymamy łamaną foremną $OA_1A_2 \ldots\ldots A_n$ (na fig. $n=7$). Rzucamy tą łamaną na osi, a oznaczywszy spółrzędne punktu A_n (wzg. A_7) przez x, y, otrzymamy:

Digitized by Google

$$(1)\quad \begin{cases} x=\delta(\cos a+\cos 2a+\ldots\ldots\cos na)=\dfrac{\delta\cos\frac{n+1}{2}a\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}, \\ y=\delta(\sin a+\sin 2a+\ldots\ldots+\sin na)=\dfrac{\delta\sin\frac{n+1}{2}a\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}, \end{cases}$$

Stąd:

$$(2)\quad x^2+y^2=OA^2_n=\varrho^2=\delta^2\frac{\sin^2\frac{na}{2}}{\sin^2\frac{a}{2}},\ \text{czyli}\ \varrho=\pm\delta\frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$$

Jeżeli $\varrho=0$, to punkt A_n pada na O i wtedy wogóle dostajemy łamaną foremną zamkniętą (wielokąt foremny). Tutaj:

$$(3)\qquad \frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}=0.$$

więc, gdy zachodzi (3) wielokąt mamy foremny. Dla tego musi być $\sin\frac{na}{2}=0$, co wtedy tylko jest możliwe, gdy $\frac{na}{2}=k\pi$, gdzie k naturalnie całkowite i $=0$ lub >0. Mogą być następujące i tylko te przypadki: 1) $k=0$; 2) $k=1$; 3) $k<n$; 4) $k=n$; 5) $k>n$.

Jeżeli $k=0$, to i $a=0$, ale

$$\frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\neq 0,\quad \text{bo}\quad \lim\left(\frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\right)_{a=0}=\lim\left(\frac{n\varepsilon}{\varepsilon}\right)=n,$$

gdzie ε jest bardzo blizka do 0 wartość na a. Tutaj nie mamy wielokąta, jak to zresztą widać odrazu.

2) $k=1$. Wtedy $a=\frac{2\pi}{n}$. Mamy wielokąt foremny wypukły.

Digitized by Google

W tym przypadku gdy $n=1$, mamy tu jedyny wyjątek [1]. Przy $n=2$ należy rozpatrywać 2 zwroty tego samego odcinka.

3) $k<n$. Tu może się dziać różnie: a) k jest liczbą pierwszą względem n; b) k—zawiera wspólny z n dzielnik, albo samo dzieli n.

a) Z tego, że $na=2k\pi$, wypada, zwróciwszy uwagę na linię kołową $O(\delta)$, (co zresztą wcale nie jest konieczne), w której wyobrażamy sobie szereg promieni równoległych do boków A_1A_2, A_2A_3 i t. d., że ostatni równoległy do $A_{n-1}A_n$ promień będzie nachylony pod kątem $a=\frac{k}{n}2\pi$ i że przy takiej operacyi należy wykonać k pełnych obrotów dokoła O. Liczba $n-k$ jest taksamo pierwsza względem n, a ponieważ $\frac{k.2\pi}{n}+\frac{(n-k)2\pi}{n}=2\pi$, to figura utworzona z powyższych n promieni pozostanie sama w sobie, zmieni się tylko kierunek obiegu. Stąd, włączając 1 do liczb bezwzględnie pierwszych i zauważywszy, że eulerowski symbol $\varphi(n)$ oznaczający, liczbę liczb pierwszych i mniejszych względem n, jest zawsze liczbą parzystą, widzimy, że w rozpatrywanym przypadku dostanie się $\frac{1}{2}\varphi(n)-1$ wielokątów różnych. Będą to wielokąty foremne gwiaździste.

b) Gdy k zawiera czynnik wspólny z n lub dzieli n, łatwo z powyższego wywnioskować, iż w tym przypadku dostaniemy wielokąt o mniejszej niż n liczbie boków w 2, 3, 4.. i t. d. razy. Z równań bowiem $an=k.2\pi$, gdy k i n dzielą się przez W i dają ilorazy k' i n', czyli $an'=k'.2\pi$, jeden z poprzednich wierzchołków, mianowicie n' padnie w O, a pozostałe boki będą odpowiednio przystawały do poprzednich n'. Dostaniemy wielokąty o podwójnych, potrójnych i t. d. bokach i wierzchołkach.

4) $k=n$. Stąd $a=2\pi$. Tutaj znowu $\frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}=n$.

---

[1]) Łatwo to wyprowadzić tak jak, w pierwszym przypadku, rozpatrując granicę stosunku $\frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$.

Digitized by Google

5) $k > n$. Niech $k = s \,.\, n + r$, wtedy:

$$a = \frac{(sn + r)\, 2 \,.\, \pi}{n} = s \,.\, 2\pi + \frac{r \,.\, 2\pi}{n}.$$

Widzimy stąd; że ten przypadek zawiera w sobie w formie ogólnej to, co było poprzednio już uwzględnione i nic ponadto.

Z tego wnioskujemy, że wielokąty foremne mogą być przy danej liczbie n bobów tylko trzech rodzajów: 1) jeden wypukły, 2) $\frac{1}{2}\varphi(n)-1$ gwiaździstych, 3) wielokrotne, które można zaliczyć do wielokątów foremnych o mniejszej liczbie boków.

Należy zwrócić jeszcze uwagę na ten przypadek, kiedy w równaniu $an = k \,.\, 2\pi$. Przy $n = 2/k$ dostaniemy $a = \pi$. Stąd widoczne jest, że wielokątem tego rodzaju będzie n-krotny odcinek OA_1, jeżeli k razy uwzględnimy każdy z jego zwrotów [1].

Równanie $\varrho = \delta \dfrac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$ jest, jak łatwo się przekonać, równaniem krzywej algebraicznej zamkniętej, gdyż oznaczając $\sin\frac{a}{2} = \xi$ w równaniach powyższych (1) dostaniemy na x i y pewne wzory po-postaci $M_1 + M_2\sqrt{1-\xi^2}$ i $N_1 + N_2\sqrt{1-\xi^2}$, przez co równania możemy przepisać w ten sposób:

$$(x - M_1)^2 = M_2(1 - \xi^2),$$
$$(y - N_1)^2 = N_2(1 - \xi^2).$$

Tu M_1, M_2, N_1, N_2 są funkcye algebraiczne wymierne wielkości ξ. Eliminując z tych równań ξ, dostaniemy równanie krzywej algebraicznej.

Dalej, gdy argument a przebiegnie obszar zmienności od O do 2π, punkty A_1, A_2, A_3..... przejdą w swe położenie początkowe.

---

[1]) Łamaną zygzakowatą, która się dostanie, gdy argument a przyjmuje na przemian równe co do wartości bezwzględnej i stałe, lecz względnie różne (dodatnie i ujemne) wartości można też rozpatrywać jako wielokąt foremny, gdy $n = \infty$. Na powierzchni walcowej to samo może być i przy skończonej wartości na n.

Digitized by Google

Nie możemy się tu zajmować badaniem tych krzywych, nadmienimy tylko, że w szczególnym przypadku, gdy $n=2$, dostaniemy równanie $\varrho = 2\delta \cos \frac{a}{2}$, które po podstawieniu $\varphi = \frac{3}{2}a$, zamieni się na $\varrho = 2\delta \cos \frac{\varphi}{3}$. Jak wskazuje samo równanie ostatnie, możemy krzywej używać do podzielenia kąta na 3 części równe, a także do geometrycznej interpretacyi pierwiastków równania 3-go stopnia w tym przypadku. Niech będzie dane tego rodzaju równanie stopnia 3-go:

$$y^3 + ay = b.$$

Pierwiastki jego są:

$$y_1 = 2\sqrt{\frac{-a}{3}} \cos\frac{\varphi}{3}, \; y_3 = -2\sqrt{\frac{-a}{3}} \cos\frac{\pi-\varphi}{3},$$

$$y_3 = -2\sqrt{\frac{a}{3}} \cos\frac{\pi+\varphi}{3}.$$

Stąd, dając na δ wartość $= \sqrt{\frac{a}{3}}$, będziemy mogli napisać:

$$y_1 = 2\delta \cos\frac{\varphi}{3} = \varrho_1 \quad y_3 = -2\delta \cos\frac{\pi-\varphi}{3} = \varrho_2,$$

$$y_3 = -2\delta \cos\frac{\pi+\varphi}{3} = \varrho_3, \text{ gdzie } \cos\varphi = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{-27}{a^3}}.$$

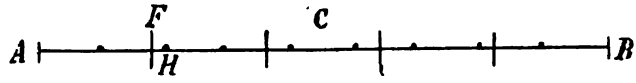
Zdaniem naszem, powyższy sposób traktowania rzeczy może być uwzględniony w klasie wyższej przy nauczaniu Geometryi, w której, zwykle o ciekawej i interesującej nauce o wielokątach foremnych mówi się często nie to, co najwięcej ucznia interesuje, a także nie wskazuje się łączności pomiędzy Arytmetyką i Geometryą, nie podaje sposobu podzielenia kąta na 3 równe części i geometrycznej interpretacyi równania 3-go stopnia. Nadmieniliśmy to wszystko tutaj ogólnikowo, pozostawiając nauczycielowi, co zresztą jest bardzo nietrudne, przeprowadzić rzecz szczegółowo. Krzywa wspomniana jest wygodniejszą do ilustracyi podzielenia kąta na 3 części równe, niż zwykle używana i przez Borela nadmieniona konchoida Nikomedesa. *L. Z.*

Digitized by Google

2. Zadanie.

Odcinek $AB=a$ został podzielony na m równych części, odznaczonych na rysunku kreskami, i niezależnie od tego na n równych części, oznaczonych kropkami. Zakładając, że $m<n$ i że m i n są liczbami względem siebie pierwszemi, znaleść, która kreska i kropka wewnątrz odcinka są w najmniejszej od siebie odległości i w jakiej mianowicie.

Rozwiązanie. Przedewszystkiem z symetrycznego względem środka odcinka rozmieszczenia kresek i punktów wynika, że żądanych układów (z kreski i kropki) otrzymamy dwa, symetrycznie rozłożone względem środka C; wystarcza zatem znaleść jeden, aby w tejże chwili otrzymać drugi. Odszukajmy np. tę kreskę F, która będzie w najkrótszej odległości od kropki H, znajdującej się przed nią (t. j. kreską) na lewo. Jeżeli kreska ta odcina od A, dajmy na to, x odcinków, z któ-



rych każdy $=\frac{a}{m}$, to $AF=\frac{ax}{m}$; przypuśćmy, że kropka H odcina od A swoich odcinków y, każdy z nich ma długość $\frac{a}{n}$, $AH=\frac{ay}{n}$. Odległość $HF=\frac{ax}{m}-\frac{ay}{n}$; ponieważ $y=E\left(\frac{ax}{m}:\frac{a}{n}\right)=E\left(\frac{nx}{m}\right)$[1], więc $HF=\frac{ax}{m}-\frac{a}{n}E\left(\frac{nx}{m}\right)=\frac{a}{n}\left(\frac{nx}{m}-E\frac{nx}{m}\right)=\frac{ak}{mn}$, gdzie k jest resztą, otrzymaną z podzielenia nx przez m.

Ponieważ HF ma być najmniejszą odległością kreski od kropki, więc x powinno mieć taką wartość, aby reszta k była najmniejsza okażemy niebawem, że min. $k=1$ i że szukana najmniejsza odległość $HF=\frac{a}{mn}$.

Dając na x wszystkie kolejne wartości, jakie przybierać może, od 1 do $m-1$, otrzymamy przy dzieleniu nx przez m wszystkich

---

[1]) E znak funkcyi „entier" = całości.

Digitized by Google

reszt $m-1$, które, jak to łatwo dowieść, będą wszystkie różne; gdyby bowiem, przy $x=p$ i $x=q>p$, reszty były te same, np. z, wtedy oznaczając odpowiednie ilorazy przez u i v, mielibyśmy: $np=mu+z$ i $nq=mv+z$, skąd $n(q-p)=m(v-u)$ i $v-u=\frac{n(q-p)}{m}$, co oczywiście, nie może mieć miejsca, gdyż prawa strona całością być nie może $(p<q<m)$.

Z powyższego wynika, że między temi resztami muszą się znajdować wszystkie liczby całkowite od 1 do $m-1$ włącznie; najmniejsza z nich $=1$; tak więc min. $k=1$ i min. szukanej odległości $HF=\frac{a}{mn}$. Mamy więc na wyznaczenie odpowiednich wartości x i y równanie $\frac{ax}{m}-\frac{ay}{n}=\frac{a}{mn}$ albo

$$nx-my=1. \ldots\ldots (a)$$

W celu otrzymania pierwiastków równania (a), czyniących zadość warunkom, aby były całkowite, dodatnie i oprócz tego $x<m$ $y<n$, możemy z korzyścią zastosować własności przybliżeń (reduktów) ułamków ciągłych. Zamieńmy ułamek $\frac{n}{m}$ na ciągły i weźmy przedostatnio jego przybliżenie, które oznaczmy przez $\frac{N}{M}$ (oczywiście, $N<n$, $M<m$).

a) Jeżeli $\frac{N}{M}$ zajmuje nieparzyste miejsce w szeregu przybliżeń, wówczas, jak wiadomo, $\frac{n}{m}-\frac{N}{M}=\frac{1}{mM}$ czyli $nM-mN=1$, to znaczy, że w tym przypadku M i N będą żądanemi pierwiastkami równania (a).

b) Jeżeli zaś $\frac{N}{M}$ zajmuje miejsce parzyste, wtedy $\frac{n}{m}-\frac{N}{M}=-\frac{1}{mM}$ czyli $nM-mN=-1$, skąd $-nM+mN=+1$; dodajmy i odejmijmy od lewej strony mn, otrzymamy; $mn-nM-mn+mN=1$, wreszcie $n(m-M)-m(n-N)=1$. to znaczy, że w tym przypadku pierwiastkami będą: $x=m-M$, $y=n-N$.

Digitized by Google

Należałoby jeszcze udowodnić, że otrzymane pierwiastki będą jedynemi, czyniącemi zadość warunkom zadania; dowodzenie to, jako zbyt proste, opuszczamy.

Przykład: $m = 8$

$n = 11$

$$\frac{11}{8} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}$$ przybliżenia: $\frac{1}{1}; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{11}{8}$; $x = 3\ (= M)$; $y = 4\ (= N)$.

Najkrótsza więc odległość będzie między końcem 3-go większego i znajdującym się przy nim końcem 4-go mniejszego odcinka (albo, w skutek symetryi względem środka, między końcem 5-go większego odcinka i znajdującym się za nim końcem 7-go mniejszego). Odległość ta wynosi $\frac{a}{11 . 8} = \frac{a}{88}$.

Przykład 2-gi: $m = 25$, $n = 34$.

$$\frac{34}{25} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}}$$ Przybliżenia: $\frac{1}{1}; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{15}{11}; \frac{34}{25}$.

$x = 14\ (= m - M)$

$y = 19\ (= n - N)$

A więc najkrótsza odległość będzie między końcem 14-go większego odcinka i leżącym przed nim końcem 19-go mniejszego (lub między końcem 11-go większego i końcem 15-go mniejszego, leżącego za poprzednim). Odległość ta $= \frac{a}{25 . 34} = \frac{a}{850}$.

Z. Arl.

Digitized by Google

SPRAWOZDANIA Z LITERATURY. — RECENZYE. BIBLIOGRAFIA.

A. I. Stodółkiewicz. „Wykład Trygonometryi prostokreślnej". Płock. Druk K. Miecznikowskiego. 1906 r. str. 74. Cena 1 rb.

Ogólny brak dobrych podręczników szkolnych każe nam zwracać baczną uwagę na nowe książki. Z tem większem zaciekawieniem bierzemy do ręki książkę. p. St., jako pierwszą od lat kilkunastu wydaną w zakresie Trygonometryi w Królestwie [1]). Rozważmy więc, czy odpowiada ona swemu zadaniu — czy może z niej korzystać, jak tego chce autor, samouk lub uczeń? Podręcznik składa się z dwóch części: z tak zwanego „całkowitego kursu Trygonometryi prostokreślnej," oraz z zagadnień i przykładów, któremi autor wykład swój przeplata. Układ materyału, przypominający podręcznik rosyjski Malinina, pozostawia wiele do życzenia; pod względem zaś opracowania materyału książka posiada jeszcze większe braki. Na samym początku, gdy autor mówi o przedmiocie Trygonometryi, określenie podane przez niego jest aż nadto nieścisłe, bo czyż można mówić, że Trygonometrya jest to nauka o wielkościach trygonometrycznych, a głównem jej zadaniem jest rozwiązywanie trójkątów, skoro uczeń lub samouk nic nie wie ani o jednem, ani o drugiem.

W dziale o wielkościach trygonometrycznych autor wcale nie stara się być dokładnym. Na dowód tego możnaby całkowicie przytoczyć pierwszą i drugą stronicę książki. Czytamy np. „a może oznaczać liczbę stopni, minut i sekund, zawartych w kącie AOB, albo też równie

---

[1]) Ostatnia książka w zakresie Trygonometryi (Trygonometrya A. Czajewicza) została wydana w r. 1891.

Digitized by Google

dobrze może znaczyć wielkość łuku AB, wymierzonego promieniem OB, jako jednością", Czyż dla samouka będzie to jasne?

Pomija również autor wyjaśnienie, że dla danego kąta wielkość trygonometryczna posiada wartość stałą; nie zaznacza zupełnie, czy rozważane wielkości stosują się tylko do kątów ostrych, czy też wogóle do dowolnych kątów, ale odrazu umieszcza wykreślanie kąta podług danej jego funkcyi. Rozwiązanie trzech zagadnień na wykreślenie kąta jest poprzedzone następującemi słowami: „...dla wykreślania kąta można z pożytkiem uważać trygonometryczne wielkości za pewne linie. Ażeby jednak nie pomieszać pojęć zasadniczych, wielkości nazywać możemy w tym szczególnym przypadku liniami trygonometrycznemi i przyjmować promień za jednostkę". Powyższe słowa również nie dowodzą ścisłości, tembardziej, że o liniach trygonometrycznych więcej autor nie mówi. Dział ten, a także równania trygonometryczne, wkrótce po nim następujące, należało dać później. Rozwiązując równanie trygonometryczne, autor otrzymał na $\sin x$ cztery wartości (dwie dodatnie i dwie ujemne), nie nadmieniwszy dotąd, że wartości funkcyi trygonometrycznych mogą być zarówno dodatnie jak i ujemne. Układanie tablic goniometrycznych należałoby traktować nieco poważniej — nie pomijać twierdzeń zasadniczych, na których opiera się to układanie. Natomiast dział o teodolicie i niwelacyi mógłby być bez uszczerbku dla Trygonometryi pominięty, tembardziej, że jest zbyt powierzchowny.

Zadania i przykłady nie wyróżniają się również niczem dodatniem — nie widać z nich myśli przewodniej, któraby pozwoliła stopniowo zapoznawać ucznia z przedmiotem, ale zato zadania te posiadają jedną oryginalną cechę (która zaznacza się poniekąd i w części teoretycznej) — jest nią dość licha polszczyzna. Czytamy np. „przy podstawie prawidłowego trójbocznego ostrosłupa"; „znaleźć kąt dwójścienny prawidłowego tetraedra"; „wysokość h, opuszczona"; „mamy dwa równania pomiędzy dwuma (!) niewiadomemi"; „kąt dwójścienny pomiędzy dwuma ścianami" i t. p.

Na zasadzie powyższego musimy orzec, że rozważana książka nie nadaje się do użytku ucznia, a tembardziej samouka.

Digitized by Google

Jeszcze jedna uwaga. Książka p. St. zawiera tylko 74 str., ale kosztuje 1 rubla! Czy koszt podobnych wydawnictw jest istotnie tak znaczny, czy też ma to być haracz, jaki musi złożyć uczeń polski za książkę polską? *Gr. Zawadzki.*

Émile Borel. Géometrie. Premier et second cycles. Paris. Arm. Colin. 1905. 3 fr.

Autor książki jest jednym z wybitniejszych spółczesnych matematyków francuskich. To mu pozwala być nie sługą, lecz panem przedmiotu. Pomimo całej admiracyi dla wielkiego i podziwu godnego dzieła znakomitego Greka, sądzi jednakże p. Borel, że system euklidesowski musi być zastąpiony przez inny więcej odpowiedni. „Je crois— mówi on w przedmowie — „qu'il est bon de conserver cet édifice euclidien jusqu'au jour ou l'on pourra le remplacer par un édifice aussi parfait, mais s'harmonisant davantage avec la science actuelle et en même temps mieux adapté aux exigences de la société moderne". Głosy podobnego rodzaju rozlegają się już oddawna nie tylko na Zachodzie, lecz i w naszym kraju, gdzie są naturalną rzeczy koleją daleko więcej odosobnione i sporadyczne. Szkoła współczesna demokratyzuje się i u nas coraz więcej, zaczyna wpływać na najszersze masy ludowe. Arystokratyczne dla wybrańców przeznaczone dzieło Euklidesa, nie może już służyć ogółowi, Geometrya musi się zdemokratyzować, nie schodząc jednakże z piedestału wielkiej nauki, nieśmiertelnego i dumą napawającego nas tworu ducha ludzkiego. Matematyka nie wywiera jeszcze stanowczo na myśl ludzką swego wpływu w tej mierze, jak to jej musi być przynależnem, a dla człowieka wogóle potrzebnem. Potrzebie demokratyzacyi na pomoc przyjść musi głębsza wiedza specyalna i nauka spółczesna wogóle, cała zróżniczkowana nauka, jej ogólne tendencye i formy, gdyż ostatnie, jako funkcya doby i warunków społecznych, mogą wpłynąć na takie ukształtowanie się naszego przedmiotu, iż ten ostatni łatwiej do świadomości ogółu trafić zdoła. Autor uważa, że w Geometryi spółczesnej, a i w nauce wogóle, dajc się zauważyć obecnie przewaga pierwiastku dynamicznego nad statycznym. „La Géométrie est l'étude du groupe des mouvements". Dla tego w wykładzie swym p. Borel stara się upraszczać dowodzenia, stara się Geometryę zrobić więcej konkretną, korzystając w szerokim zakresie

Digitized by Google

z pojęcia symetryi i wprowadzając rozważania, oparte na pojęciu ruchu różnego rodzaju. Tym sposobem autor zajmuje pośrednie stanowisko pomiędzy klasycznym kierunkiem, przedstawicielami którego są przeważnie Włosi, a po części Niemcy i „praktycznością“ angielską z prof. Perry na czele. Autor we wstępie daje zasadnicze pojęcia geometryczne w szacie konkretnej jak to pojęcia o elementach, bryłach i wogóle figurach, o mierzeniu pól i objętości i t. p. Przy konstrukcyi używane są różne przyrządy: ekierka, liniał i cyrkiel. Nie jest to taki wstęp, jaki się nieraz znajduje w innych podręcznikach Geometryi, z którego najczęściej nie jest widocznem z jakiej racyi on jest wogóle uwzględniony. We wstępie p. Borela streszcza się cała propedeutyka Geometryi i musimy podkreślić zgodność zasadniczych myśli tegoż z tem, co pisaliśmy w imieniu Koła przed rokiem z górą w „Przeglądzie Pedagogicznym“. Książka zawiera wogóle dużo materyału najróżnorodniejszego, uwzględnia częściową fuzyę, daje pojęcie o funkcyach trygonometrycznych, o krzywych 2-go rzędu, a w dodatku nawet (co uważamy za bardzo szczęśliwą i historycznie uzasadnioną innowacyę) o cissoidzie Dioklęsa i Ślimakowej Nikomedesa, przekształca utarte sposoby obliczania objętości, np. przy obliczaniu objętości ostrosłupa, a wszystko wogóle traktuje bardzo jasno i konkretnie.

Obliczanie objętości ostrosłupa oparte jest na znalezieniu granicy, do której dąży wyrażenie:

$$\frac{Sh}{n}\left[\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+(n-1)^2+n^2}{n^2}\right],^{1)}$$

przy $n=\infty$. Objętość kuli oblicza autor, uważając ją jako granicę sumy objętości nieskończonej ilości ostrosłupów czworokątnych, których podstawy znajdują się na powierzchni kuli, a wierzchołki w jej środku. W książce znajdujemy 411 najrozmaitszych i dobrze dobranych zadań. — Jesteśmy zdania, że podobne traktowanie rzeczy, nie obniżając poziomu nauki, uprzystępnia ją znacznie i ułatwia zadanie nauczycielowi. Można się nie zgodzić, a nawet jeszcze więcej zgodnie z duchem podręcznika i nie pacząc nauki, upraszczać niektóre szczegóły, musimy jednakże przyznać, że dzieło p. Borela jest oryginalnie i głębiej pomyślane. Takie książki, jak obecna, z którą radzimy się zapoznać każdemu nauczycielowi matematyki, może, co-

[1]) S—pole podstawy, ah—wysokość ostrosłupu.

Digitized by Google

prawda, pisać tylko znawca tej miary, co p. Borel; bo przecież nieraz widzimy, że autorowie, obiecują nam przystępność i jasność, nie mogą jednakże wyzbyć się utartego szematu tylko dzięki temu, że przedmiot panuje nad nimi, a nie oni nad przedmiotem.

L. Z.

M. Stuyvaert. „Les nombres positifs, Esposé des théories modernes de l'Arithmétique élémentaire" par....., docteur spécial en Mathématiques, répétiteur à l'université de Gand, Gard, Librairie scientifique E. Van Goethem, 1906, 8-o, p. XII, 132.

Tytuł tej książki ma wskazywać, że wyłączona w niej została teorya liczb ujemnych i działań na nich. Treść podzielona na cztery rozdziały. Pierwszy p. t. Liczby całkowite" obejmuje: teoryę dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia liczb całkowitych (na znakach ogólnych), liczenie dziesiętne i prawidła działań w układzie dziesiętnym, inne układy dzielenia, cechy podzielności w układzie dziesiętnym, największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotną, rozkład na czynniki pierwsze i teoryę ogólną cech podzielności. Rozdział II „Liczby ułamkowe" obejmuje: ułamki zwyczajne, liczby dziesiętne i zamianę ułamków. Rozdział III. „Liczby niewymierne" obejmuje: pierwiastek kwadratowy, pierwiastek sześcienny, teoryę liczb niewymiernych, teoryę proporcyi, twierdzenia o granicach, przybliżenia liczebne, działania skrócone. Rozdział IV „Mierzenie wielkości" zawiera: mnogości wymierzalne, wielkości pospolite w użyciu, rachunek liczb wielorakich.

Materyał teoretyczny jest tedy mniej więcej taki, jak w obszerniejszych traktatach Arytmetyki, np. w J. Tannery'ego: Leçons l'Arithmétique théorique et pratique (Paryż 1904), a więc przystosowany do potrzeb teoretycznego wykładu Arytmetyki w klasach wyższych. Dla tych też klas przeznacza autor treściwą swą książkę, którą pragnie widzieć w ręku nauczyciela, uważając je za dzieło próbne, mające być poddane krytyce znawców. Skoro ta krytyka okaże się przychylną, autor ma zamiar rozszerzyć tekst, dołączyć szereg zadań, by uczynić ze swego dzieła podręcznik szkolny.

Dobre ujęcie przedmiotu, zaznaczanie wyraźne, gdzie potrzeba, podstaw rozumowania, forma wykładu w postaci szeregów twierdzeń

Digitized by Google

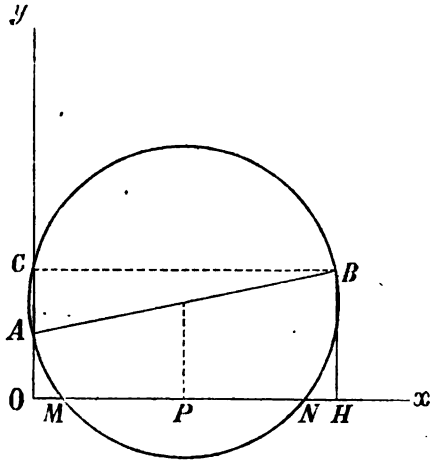
i wniosków, obok jasności przedstawienia, cechują to dziełko, nadające się—zdaniem naszem—doskonale do pomocy uczniom w klasach wyższych przy odpowiednim wykładzie nauczyciela. Porzucając stanowisko intuicyjne i konkretne, a obierając stanowisko formalne, oparte na definicyach i postulatach, nie sięga autor wprawdzie tak głęboko, jak to czyni np. szkoła włoska logików Matematyki, ani nie prowadzi tak szczegółowo analizy pojęć, jak to czynią np. Stolz i Gmeiner w swoim traktacie Arytmetyki, ale daje nam niejako dzieło pośrednie pomiędzy wzmiankowanym podręcznikiem Tannery'ego a dziełami wyżej wymienionych autorów, przystosowane do potrzeb szkoły średniej. Dla scharakteryzowania teoretycznych podstaw tej książki, powiemy, że liczbę (całkowitą) i jednostkę przyjmuje autor za pojęcia nieprzywiedlne, dodanie jedności do liczby danej, jako działanie nie dające się zdefiniować; o nierówności dwóch liczb ($a>b$, $a<b$) rozstrzyga to, że jedna z nich następuje po drugiej (lub poprzedza drugą) w szeregu liczb całkowitych. Własność, że suma dwóch liczb całkowitych nie zmienia się przy zmianie porządku wyrazów, autor przyjmuje (w całej ogólności) za postulat. Własność $a.0=0, m=0.0=0$ uważa za umówione rozszerzenie twierdzenia o mnożeniu różnicy przez różnicę. Wykład o liczbach niewymiernych opiera w zasadzie na teoryi Dedekinda, którą metodycznie uprzystępnia. Dla proporcyi—słusznie—dopiero po wykładzie o liczbach niewymiernych znalazło się miejsce. W teoryi błędów uwzględnione jedynie błędy bezwzględne. Nie wydaje nam się potrzebnem pojęcie liczby konkretnej (nombre concret); definicya odejmowania podana (str. 4) tylko dla przypadku odjemnej większej od odjemnika, a nieco dalej, bez bliższego omówienia, mowa jest o różnicy liczb równych. Znakowanie wielokrotności może uczącego się wprowadzić w błąd (np. na str. 28: $a=Mn+r$, $b=Mm$, $a+b=Mn+r$, $a-b=Mn-r$). Ale są to drobne usterki. Książka pod względem naukowym jak i pedagogicznym, stanowi dobry i bardzo pożyteczny nabytek literatury szkolnej. *S. D.*

Digitized by Google

KORESPONDENCYA.

Pozwalam sobie zwrócić uwagę Sz. Redakcyi na przytoczony poniżej sposób Lilla, wykreślenia pierwiastków równania kwadratowego $x^2+px+q=0$, który ma tę wyższość nad podawanemi zwykle w podręcznikach (por. „Kurs uzupełniający Matematyki elementarnej" p. Szczepańskiego, str. 75, 76), że jest ogólny, t. j. nie wymaga odróżnienia znaków spółczynników w danym równaniu.

Wykreślenie to przytacza p. Maurice d'Ocagne w swem dziele p. t. „Le calcul simplifié". *Z. Czubalski.*



(rysunek odpowiada równaniu $x^2 - \frac{9}{2}x + 2 = 0$).

Aby wykreślić pierwiastki równania $x^2+px+q=0$, obieramy dwie wzajemnie prostopadłe osi Ox i Oy, poczem na osi Oy odmierzamy odcinek OA, równy przyjętej dla rysunku jednostce długości, oraz wykreślamy punkt B, którego spółrzędne, nakreślone w tej samej jednostce, są odpowiednio: $OH=-p$ $HB=q$. Poprowadziwszy następnie prostą AB i nakreśliwszy na odcinku AB, jako na średnicy, koło, które przecina oś Ox w punktach M i N, znajdziemy, że odcinki OM i ON są szukanemi pierwiastkami.

Dowodzenie. Ponieważ $OP=PH$ i $PM=PN$, przeto:

$$OM + ON = ON + NH = -p.$$

Dalej, uważając potęgę punktu O względem danego koła, mamy:

$$OM . ON = OA . OC,$$

że jednak, wskutek $OA=1$, $CB \parallel Ox$, $OA.OC=HB=q$, otrzymamy $OM.ON=q$, czyli odcinki OM i ON spełniają warunki, którym powinny zadośćczynić pierwiastki równania $x^2+px+q=0$.

Digitized by Google

Zadania do rozwiązania.

1. Dowieść, że iloczyn wszystkich czynników danej liczby N równa się $\sqrt{N^n}$, gdzie n liczba wszystkich czynników.

2. Wspólny największy dzielnik dwóch liczb A i B równa się liczbie wielokrotności liczby B, zawartych w szeregu $A, 2A, 3A, \ldots\ldots BA$.

3. Dowieść, że dwa ułamki nieskracalne, których suma równa się liczbie całkowitej, muszą mieć jednakowe mianowniki.

4. Dowieść, że ułamki peryodyczne, otrzymane ze zwyczajnych o tym samym mianowniku, mają jednakową liczbę cyfr w peryodzie.

5. Znaleźć, czemu równa się i^i ($i=\sqrt{-1}$); dowieść, że wszystkie wartości i^i, a jest ich nieskończona liczba, są rzeczywiste. *Z. A.*

6. Dowieść, że liczba $5^n . 7^{2n}+1$ przy nieparzystem całkowitem n dzieli się zawsze przez 41.

7. Dowieść, że hyperbola równoboczna $x^2-y^2=p$, gdzie p jest liczbą bezwzględnie pierwszą >2, przechodzi tylko przez 4 punkty płaszczyzny, których spółrzędne są liczbami całkowitemi. *L. Z.*

Digitized by Google

Dodatek do „Wiadomości matemat.“ T. XI, 1907.

SPRAWOZDANIA

Z POSIEDZEŃ

KOŁA MATEMATYCZNO - FIZYCZNEGO

w WARSZAWIE,

redagowane

przez

L. ZARZECKIEGO.

Rok 1906/7.

III.

Posiedzenie dnia 26 stycznia 1907 r.

Obecnych osób 29.

Po odczytaniu i zatwierdzeniu protokółu poprzedniego posiedzenia p. M. Heilpern odczytał referat o pracach i życiu zmarłego członka naszego Koła prof. S. Kramsztyka. Autor w podniosłych słowach scharakteryzował żywot pracowity znanego popularyzatora wiedzy przyrodniczej, wymienił główniejsze jego prace, w których zmarły w szacie pięknej i dostępnej podawał wiedzę, starając się jednakże zawsze zachować ścisłość naukową w granicach możliwie najszerszych.

Po wysłuchaniu tego przemówienia, które poniżej drukujemy, bibliotekarz koła p. Grzegorz Zawadzki skreślił w krótkiem przemówieniu stan obecny biblioteki, nadmieniając, że zawiera ona około 200 tomów dzieł matematyczno-fizycznych treści naukowo-pedagogicznej w różnych językach, i prenumeruje 7 pism specyalnych, poruszających kwestye nauczania Matematyki i Fizyki. Biblioteka otwarta jest codziennie od godz. 5—7 dla członków Koła.

Digitized by Google

Następnie p. Zarzecki odczytał referat p. t. „Streszczenie niektórych prac Komisyi programowej niemieckiej". W referacie tym wyszczególnione były te uzupełnienia w pracach Komisyi, które zaaprobowane zostały na ostatnim stuttgarskim Zjeździe niemieckich przyrodników i lekarzy w roku zeszłym i stosują się do programów szkół średnich 9-cio klasowych zreformowanych (Reformschulen). Referat ten znajduje się w archiwum Koła.

Na tle referatu wywiązała się dyskusya w sprawie znaczenia klasycyzmu w szkole średniej. Uznano jednakże, że szczupłe grono obecnych specyalistów-matematyków nie może uważać siebie za kompetentne do rozstrzygania tak poważnych spraw. Na tem posiedzenie zostało zamknięte.

Posiedzenie dnia 23 lutego 1907 r.

Obecnych osób 35.

Po odczytaniu protokółu poprzedniego posiedzenia i zaakceptowaniu tegoż, p. Z. Czubalski odczytał treściwe i wyczerpujące sprawozdanie z przetłómaczonego przez siebie dziełka p. Laisanta p. t. „Initiation mathématique". Podajemy niżej to sprawozdanie.

P. przewodniczący zaznacza, że w naszych warunkach, gdzie nauczanie domowe jest w stanie opłakanym z nader różnych powodów, trudno przypuszczać, by książka p. Laisanta uzyskała niejako prawo obywatelstwa. P. Włodarski w związku z tem przypomina „Arytmoskop" p. Stodółkiewicza, który powoli zaczyna być użytecznym w praktyce szkolnej. Przy tej sposobności p. przewodniczący nadmienia, że wynalazcy przyrządów do nauki Arytmetyki początkowej niedoceniają umysłu dziecka, że nieraz systematycznie obmyślony przez nich przebieg nauczania na takich przyrządach jest zbyt powolny, a także nie oparty na prawdzie psychologicznej, ani też na konieczności liczenia się z rwącym naprzód umysłem młodzieńczym i prędko nużącą się jego zdolnością skupienia uwagi..

Następnie p. Zarzecki odczytał referat na temat: „Pewnik i postulat w Elementach Euklidesa". Nie podajemy tu treści tego referatu, który będzie umieszczony w następnym numerze „Sprawozdań".

Digitized by Google

Na tle referatu tego rozwinęła się dość ożywiona i interesująca dyskusya na temat pochodzenia i znaczenia właściwego podstawowych założeń każdej nauki. Zabierali głos pp.: Dickstein, Straszewicz, E. Czerwiński, Włodarski.

P. przewodniczący zachęca obecnych do zajęcia się literaturą zagraniczną, która posiada tak wybitne dzieła, jak np. „Elementi di geometria“ prof. F. Enriquesa i „Nouveaux éléments de géométrie“ Ch. Méraya. Koniecznem jest dla dobra sprawy referowanie na posiedzeniach wybitniejszych zjawisk w literaturze podręcznikowej zagranicznej, gdyż my obecnie jesteśmy w fazie tworzenia szkoły swojskiej, musimy uczyć się sumiennie i korzystać z doświadczeń, poczynionych gdzieindziej, co oczywiście nie przeszkadza zastanawianiu się samodzielnemu i opracowywaniu lepszych programów szkolnych.

Na tem posiedzenie zostało zakończone.

Posiedzenie dnia 23 marca 1906 r.

Obecnych osób 36.

Po odczytaniu i przyjęciu protokółu poprzedniego posiedzenia naukowego, p. Zawadzki odczytał sprawozdanie o podręczniku, napisanym przez p. Pietzkera, kierownika czasopisma niemieckiego p. t. „Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften“. Podręcznik ten, przeznaczony dla pierwszych 6-u klas (Unterstufe) niemieckich zreformowanych zakładów naukowych średnich, opracowany jest na podstawie projektu programu nauczania Matematyki i Fizyki, ogłoszonego przez Komisyę przy Towarzystwie niemieckich przyrodników i lekarzy i zatwierdzonego w Meranie r. 1905. Książka zawiera podstawy Geometryi i Arytmetyki. Następnie po kilku luźnych uwagach w kwestyi wspomnianego podręcznika, p. przewodniczący podkreślił konieczność pisania recenzyj i sprawozdań z literatury bieżącej podręcznikowej u nas.

Potem p. Srebrny, przewodniczący Komisyi informacyjno-programowej, referował stan obecny prac tejże i owoce zabiegów około zdobycia pożądanych wiadomości co do nauczania przedmiotów fizyko-matematycznych w szkolnictwie naszem. Referent zakomunikował, że

Digitized by Google

nadesłano odpowiedzi na ogłoszone przez Koło kwestyonaryusz od 6-u szkół męzkich i 13-u żeńskich, co stanowi bardzo szczupły materyał i przytem niezupełny, gdyż ze szkół męzkich tylko dwie są w całkowitym komplecie. Z materyału, przedstawionego trudno coś pozytywnego wywnioskować; można raczej dojść do zapatrywań pesymistycznych. Programy tych szkół są przeważnie dopasowane do rządowych. Wcale nie można zauważyć zmian (z nielicznemi chyba wyjątkami), świadczących o dążności reformowania i ulepszenia. Np. propedeutyka Geometryi wykładana jest tylko tytułem próby w jednej szkole p. Włodarskiego. Wykładający bardzo często dzielą między sobą nie klasy, lecz przedmioty, co wpływać może ujemnie na stan nauczania. Szkoły żeńskie też nie odbiegają od szkół męzkich; spotykamy tu te same braki.

Uwagi p. Srebrnego były powodem dość ożywionej dyskusyi na temat stanu nauczania u nas i środków doradczych. P. przewodniczący zauważył, że u nas wraz z wielką porywczością do tworzenia nowych szkół nie idzie w parze siła reformy, zauważyć się raczej daje bezwład w reformowaniu. Chociaż Koło mat.-fiz. urzędowym organem nie jest i tym sposobem opinii swej siłą narzucać nie może, jest jednakże w posiadaniu moralnego wpływu, który należycie wyzyskać należy. Dla tego koniecznem jest przystąpić do opracowania programów. Następnie poddano pod dyskusyę postawiony przez p. Srebrnego wniosek o zaprzestaniu dalszego zbierania materyału. Między innemi p. Włodarski radzi, by Komisya zajęła się opracowaniem programów i dała dyrektywę. Po dość długiej i ożywionej dyskusyi postanowiono: 1) Przedstawić wnioski, jakie się wyprowadzić dadzą z posiadanego przez Komisyę materyału, na najbliższem posiedzeniu Koła. 2) Na podstawie ogłoszonych w „Przeglądzie Pedagogicznym“ w roku 1905 przez Koło programów opracowywać nowe projekty.

W związku z powyższą sprawą nastąpiła wymiana zdań w kwestyi propedeutyki Geometryi, potrzebę której odczuwa wielu wśród nauczających, w praktycznem wykonaniu jednakże napotykają się tu niemałe trudności. Proponowano napisać podręcznik lub treściwy i umotywowany program. P. Włodarski obiecał zająć się napisaniem podręcznika.

Digitized by Google

Posiedzenie dnia 27 kwietnia 1907 r.

Obecnych osób 32.

Odczytano i przyjęto protokół poprzedniego posiedzenia. Następnie p. S. Dickstein w dłuższem przemówieniu zaznaczył, że w dniu 15-go kwietnia r.b. świat cywilizowany obchodził rocznicę urodzin Leonarda Eulera, nakreślił sylwetkę człowieka i uczonego, wyłuszczył główniejsze prace i warunki, w których powstały.

Poczem Dr. Margulies z Łodzi odczytał referat na temat: „Reformy nauczania arytmetyki w szkole początkowej i średniej". Autor obecnym metodom nauczania Matematyki zarzuca przedewszystkiem nieliczenie się z psycho - fizycznemi właściwościami młodego rozwijającego się mózgu. Materyał i sposób traktowania rzeczy nie odpowiadają pojemności umysłowej młodzieży. Tylko zdolniejsi są w stanie jako tako dostroić się do wymagań szkoły, owładnąć panującą dedukcyjnie-metafizyczną metodą, słabsi skazani są na bezcelowe i wyjaławiające kucie, na powolny zanik sprawności umysłowej. Radzi dr. Margulies natomiast zwrócić się do przyrody, która jest jedynem źródłem prawdy, radzi od pomiarów faktycznych laboratoryjnych niejako przechodzić powoli drogą indukcyjną do abstrakcyi, do oderwanej liczby i operacyi nad nią. Naukę Arytmetyki należy rozciągnąć na przeciąg szerszy czasu aż do klasy 4-ej włącznie, równolegle z fizyką traktować Geometryę. Referat wywołał dość ożywioną dyskusyę, w której zabierali głos pp.: Sporzyński, Zarzecki, Włodarski i Dickstein. Zarzucano autorowi, że jakkolwiek myśli jego nowemi nie są, wykonanie praktyczne zaleceń jest prawie w warunkach obecnych wobec przepełnienia klas niemożliwe. Z drugiej strony, z punktu widzenia teoretycznego, zapatrywania dra Marguliesa też wolnemi od zarzutów nie są; każda bowiem nauka ma swe właściwe jej metody badania, a tem samem metody eksperymentalne, jako takie uogólniane zbytnio, a tembardziej narzucane być nie mogą, gdyż w metodzie nietylko odgrywa rolę jakość poznającego umysłu młodego, ale i charakter specyficzny danej umiejętności.

Po załatwieniu niektórych drobnych spraw natury formalnej, posiedzenie zamknięto.

Digitized by Google

Posiedzenie dnia 25 maja 1906 r.

Obecnych osób 32.

Po odczytaniu i zaakceptowaniu protokółu poprzedniego posiedzenia, p. Sporzyński odczytał referat p. t. „O stałych dielektrycznych“. W odczycie tym prelegent, przedstawiwszy w zarysie ogólnym stan obecny tego działu nauki o elektryczności, opisał używany przez siebie przyrząd, a także rezultaty własnych doświadczeń nad określeniem stałych dielektrycznych dla rozmaitych substancyj. Potem p. Zarzecki odczytał referat „O rozwijaniu myślenia funkcyonalnego przy nauczaniu Matematyki w szkole średniej“. Referat ten in extenso drukuje „Szkoła Polska“. Na tle referatu niektórzy członkowie poczynili uwagi. Między innymi p. przewodniczący zaznaczył, że referent nie uwzględnił jednego nowego momentu, mianowicie pojęcia grupy, które obecnie zaczyna torować sobie drogę do szkoły średniej. P. Straszewicz przemawiał o konieczności wprowadzenia elementów Geometryi nowej, a mianowicie pojęcia kolineacyi. Poczem po załatwieniu niektórych spraw bieżących posiedzenie zamknięto.

Posiedzenie dnia 15 czerwca 1907 r.

Obecnych osób 31.

Po odczytaniu i zaakceptowaniu protokółu poprzedniego posiedzenia, p. przewodniczący zakomunikował obecnym, że w lipcu r. b. odbędzie się we Lwowie X-ty Zjazd Lekarzy i przyrodników, na którym, wśród innych sekcyj, funkcyonować będzie też sekcya matematyczno-dydaktyczna. Z tej racyi zaproponował obecnym wybór delegatów od Koła matematyczno-fizycznego. Wybrano pp. Zarzeckiego i Sporzyńskiego. Po załatwieniu tej sprawy p. przewodniczący wyłuszczył przed obecnymi uwagi, jakie nasunął mu wykład pewnych części Matematyki w szkołach średnich. Uwagi te dotyczą nader nieodpowiedniego i nienaukowego traktowania wyrażeń $\frac{0}{0}$, ∞ i t. p. Używany powszechnie sposób skracania jest fałszywy

Digitized by Google

i należy go zastąpić innym, więcej naukowym, związanym z pojęciem granicy. Na tem tle rozwinęła się dyskusya, w której wyłoniły się różne trudności, jakie nastręczają przy wykładzie szkolnym kwestye pokrewne, jak np. pojęcie 0, które może mieć różny charakter, zależnie od punktu widzenia.

Następnie członek komisyi programowej p. H. Stattlerówna zakomunikowała, że program Arytmetyki, zaakceptowawy przez Koło, wkrótce wyjdzie z druku. Polecono pp. Zarzeckiemu i Zawadzkiemu zająć się opracowaniem programów Geometryi i Algebry, zaleconych przez Koło, i przygotowaniem tychże do druku.

Na tem posiedzenie zostało zamknięte.

Digitized by Google

Lista członków Koła matematyczno-fizycznego

Ciąg dalszy [1].

77. Czopowski Henryk, Warszawa, Żórawia 7—10.
78. Koral Maksymilian, Warszawa, Włodzimierska 6.
79. Sadzewicz Marya, Warszawa, Żórawia 46.
80. Pokrzywnicki Michał, Warszawa, Wilcza 50.
81. Czartoryski Julian, Warszawa, Hoża 27.
82. Zarzecki Adam, Warszawa, Elektoralna 22.
83. Drège Wanda, Warszawa, Daniłowiczowska 12.
84. Rudnicka Antonina, Warszawa, Wilcza 6.
85. Plewińska Gabryela, Warszawa, Wspólna 39.
86. Prauss Franciszek, Warszawa, Marszałkowska 33.
87, Kowalski Stanisław, Warszawa, Nowogrodzka 1
88. Stożek Włodzimierz, czasowo w Getyndze.
89. Landau Stanisław, Warszawa, Włodzimierska 4.
90. Meyer Matylda, Warszawa, Mazowiecka 20.

---

[1]) Patrz № 1 i 2 „Sprawozdań"

Digitized by Google

STANISŁAW KRAMSZTYK.

(WSPOMNIENIE POŚMIERTNE).

Rzecz odczytana na posiedzeniu Koła matem.-fizycz. w Warszawie w d. 23 stycznia 1907 r.

przez M. HEILPERNA.

Umarł Stanisław Kramsztyk. Społeczeństwu naszemu ubył człowiek rzetelnej zasługi, niezwykłej miary, działacz na trudnej u nas niwie pracy dla nauki i oświaty. Była to postać popularna w kraju naszym, bo wśród pokolenia ostatnich lat 40-u nie było człowieka, któryby mu choć w małym stopniu cząstki wiedzy swej nie zawdzięczał. Był to autor podręczników szkolnych, książek naukowych dla młodzieży, artykułów popularnych w najrozmaitszych czasopismach ogólnych i specyalnych przyrodniczych, książeczek dla ludu; był to prelegent, zaznajamiający szersze sfery publiczności z podstawowemi zasadami Fizyki i Kosmografii; był to nauczyciel tych przedmiotów w średnich prywatnych zakładach naukowych. Słowem, był to popularyzator nauk przyrodniczych i nauczyciel.

Społeczeństwo nasze nie obfituje wprawdzie w ludzi wiedzy, jednak popularyzatorów i nauczycieli dobrych było wielu. Możnaby przeto wyrazić zdziwienie, że oddajemy St. Kramsztykowi hołd szczególny. Są nawet ludzie zarzucający mu, iż nie pracował samodzielnie naukowo, iż nie miał pracowni, iż nie błysnął na polu naukowem twórczością.

A jednak społeczeństwo nasze zawdzięcza mu więcej, niż niejednemu autorowi wyczerpujących monografij. Jakkolwiek bowiem epoka, w której działał Kramsztyk, nie sprzyjała u nas kultywowaniu wiedzy, zwłaszcza specyalnej, wogóle panowały w niej dla szerzenia oświaty wśród mas warunki szczególnie nieszczęsne. Komu istotnie

Digitized by Google

i szczerze chodziło o walkę z temi warunkami, o to, aby zaledwie słabo tlący się znicz światła myśli w kraju naszym zupełnie nie wygasł, ten nieraz ze ściśniętem sercem zrzekał się ambicyi poświęcenia się ulubionej swej nauce, zrzekał się myśli posuwania jej naprzód, zostawiając tę pracę szczęśliwszym narodom, i oddawał się skromnej, lecz doniosłej społecznie sprawie podsycania tego płomyka oświaty i obnoszenia go po kraju. Na całym obszarze ziemi naszej nietylko nie było możności organizowania specyalnych pracowni naukowych dla rozwijania wiedzy ścisłej, nietylko nie było akademij, uniwersytetów związanych z interesami społeczeństwa i wiedzy bezwzględnej, ciał naukowych, towarzystw popierających wiedzę i ludzi nauki, bibliotek i t. p. instytucyj, stanowiących źródło ożywcze dla ludzi, chcących się poświęcić wiedzy, lecz nauki przyrodnicze były niemal zupełnie wygnane nawet ze szkół ogólnych, początkowych i średnich, lub traktowane w nich jako przedmiot podrzędny. Mała tylko garstka ludzi poświęcała się wówczas krzewieniu tych nauk i stała na straży tego, aby samo pojęcie o tych naukach w społeczeństwie nie zaginęło.

Do tego nielicznego grona ludzi należał Kramsztyk, człowiek, który z natury swego usposobienia, umysłu i zamiłowania, stworzony był raczej na uczonego, oddającego się pracy w gabinecie lub pracowni, aniżeli na działacza publicznego. Ale człowiek ten rozumiał swój obowiązek wobec ciężkiego położenia, w jakiem się społeczeństwo znajdowało. To też za wielką zasługę poczytać mu należy to jego oddanie się sprawie, mającej dla przyszłej kultury kraju znaczenie donioślejsze od pracy gabinetowego czy laboratoryjnego uczonego. A jak obowiązek ten spełnił, dowodzi szereg jego prac popularnych, szereg książek i artykułów tak licznych, iż na wymienienie ich czasu ani miejsca w tym krótkim życiorysie by nie starczyło. Był to człowiek tak pracowity, iż mało możnaby wśród naszych pisarzy z zakresu wiedzy przyrodniczej wymienić autorów również płodnych, zwłaszcza, jeżeli pamiętać będziemy, iż Kramsztyk należał do ludzi niezamożnych, zmuszonych większą część czasu poświęcać zajęciom, dającym chleb powszedni. Pracował na niwie społecznej w ciężkich zapasach z życiem, wytężał swoje siły, odmawiając nieraz sobie spoczynku, snu, rozrywek.

Wszyscy, którzy go czytaliśmy—a któż go nie czytał—jesteśmy poniekąd jego uczniami, wszyscy go niemal znaliśmy osobiście, ze sły-

Digitized by Google

szenia lub czytania, bo dziesiątki lat ciężkiej i sumiennej pracy nie idzie na marne. Nie jeden z nas, dzieckiem będąc, już o nim wiedział, nie jeden mu pierwsze pojęcia o zjawiskach otaczającego świata zawdzięcza. Byliśmy bądź jego uczniami w szkole, bądź czytelnikami jego książek i artykułów, bądź słuchaczami jego wykładów publicznych.

Krótko pozwolę sobie zatrzymać się nad szczegółami biograficznemi jego życia.

Urodzony 8 listopada 1841 r. w Warszawie, ukończył gimnazyum gubernialne w r. 1859, poczem w celu studyowania nauk przyrodniczych wstąpił do Akademii medyko-chirurgicznej. Nie znalazłszy ego, czego umysł jego pożądał, przeniósł się do otworzonej w r. 1862 Szkoły Głównej na wydział fizyczno-matemateczny, który ukończył w r. 1866 ze stopniem magistra nauk matematyczno-fizycznych.

Jak widzimy więc, Kramsztyk należał do grona wychowańców Szkoły Głównej, a ten szczegół wiele już sam przez się mówi sercom naszym. Dobrą bowiem, jak wiadomo, tradycyę przekazała nam ta Szkoła. Jej wychowańcy do dziś dnia świecą nam przykładem usilne wytrwałej i sumiennej pracy naukowej, przejętej myślą o dobru ojczyzny. Jeżeli po zamknięciu Szkoły Głównej, pomimo niewymownie trudnych warunków, nauka polska i myśl polska w kraju naszym nie zamarła, to bez przesady powiedzieć można, iż zawdzięczamy to w przeważnej części wychowańcom tej Uczelni. Szeregi ich rzedną, niestety, z dniem każdym, lecz schodząc ze świata, z zadowoleniem i dumą powiedzieć sobie mogą, iż życie ich nie przeszło bez śladu, iż im w udziale przypadło przechować przekazany im w spadku przez poprzednie pokolenia płomień myśli i uczuć, stanowiących podstawowe zasady bytu narodowego i że w nieskażonym stanie, owiane ożywczym duchem ich umysłów i serc, przekazali go znów pokoleniu następnemu, choć podsycać i niecić go wypadało w warunkach dla pracy takiej najmniej pomyślnych. Na ciemnych kartach dziejów naszego bytu, które zapisała miniona epoka ogólnego przygnębienia, ogólnej cichej walki z siłami wrogiemi kulturze, wiedzy, swobodzie i miłości, działalność byłych wychowańców Szkoły Głównej będzie jednym z jasnych punktów, świecących przykładem przyszłym pokoleniom. Wśród tej grupy ludzi, silnych duchem, mężnie stawiających opór przeciwnościom, niepoddających się wrogim mocom, czerpiących siłę do pracy w miłości dla pracy, imię Stanisława Kramsztyka zapisze się wybitnemi zgłoski. Zresztą dodać trzeba, że

Digitized by Google

ten duch, panujący w Szkole Głównej, natrafił tu na grunt dobrze przygotowany miłości do kraju, silnie wpajanej od dzieciństwa, podtrzymującej całe otoczenie domu rodzicielskiego, w którym St. Kramsztyk wzrastał i wychował się. To też czterdzieści lat owianej tym duchem pracy, pracy usilnej, niezwykle płodnej, skierowanej ku rozświetleniu umysłów, ku wlaniu w słuchaczów i czytelników prawdziwej miłości do wiedzy, ku wpojeniu w umysły należytego poglądu na świat, ku wyjaśnieniu praw przyrody, nie mogły pozostać bez poważnych wyników, bez wpływu na poziom umysłowy społeczeństwa, na dorobek jego pojęć i myśli.

Zaznaczyliśmy już, że St. Kramsztyk należał do ludzi, którzy nie mogąc, dla braku środków materyalnych, oddać się wyłącznie nauce, zmuszeni są czas swój poświęcać przeważnie pracy zarobkowej w biurach, pracując naukowo tylko w chwilach od niej wolnych. To też po ukończeniu Szkoły Głównej zmuszony był on objąć początkowo posadę urzędnika w Banku Polskim, w którym pracował aż do czasu zamknięcia tej instytucyi w r. 1886. W 14 lat później, t. j. w r. 1890 przyjął posadę w Warsz. Tow. ubezpieczeń od ognia, w którem pozostawał już do końca swego życia. Poza zajęciami biurowemi poświęcał się pracy nauczycielskiej, wykładając Fizykę i Kosmografię w ówczesnej Szkole Handlowej imienia Kronenberga, a także w szkołach średnich, przeważnie na pensyach żeńskich. Do rozwinięcia jednak działalności na polu pedagogiki stawała mu na przeszkodzie zarówno zła opinia, jaką rodzina Kramsztyków „cieszyła się“ u ówczesnych władz szkolnych z powodu znanych swoich uczuć patryotycznych, jak i jego wyznanie, zamykające mu, w obec obowiązujących przepisów, drogę do szkół ogólnych. To też najspokojniejszym się czuł, gdy zamknięty w gabinecie oddawał się pracy piśmienniczej.

Na tem polu zasłynął jako niezwykle zdolny i umiejętny popularyzator wiedzy ścisłej, zwłaszcza w zakresie ulubionych swych przedmiotów, Fizyki i Kosmografii. Prace jego w tym kierunku mówią same za siebie. Kto jakąkolwiek jego książkę przeczytał, potrafi sam odrazu jasno i stanowczo rodzaj jego pracy scharakteryzować. Uderzająca bowiem treściwość, ścisłość, jasność, obok ponętnej formy i czystości języka, są to zalety, które w jego dziełach same się w oczy rzucają. Wszystkie prace jego odznaczają się w tym względzie zupełną jednolitością. Jeżeli przeto pozwalamy sobie zatrzymać się tu, choć krótko,

Digitized by Google

nad wykazaniem tej strony jego pracy piśmiennej, czynimy to raczej w celu oddania zasłużonego hołdu uznania zmarłemu, aniżeli dla zwrócenia na nią uwagi.

Są ludzie, piszący popularne naukowe książki lub artykuły, lekko, zajmująco, pociągające czytelnika formą, ale powierzchowne, nie dające rzetelnej nauki, poświęcając treść dla formy. Kramsztyk do takich ludzi nie należał. Dla niego jądro sprawy stanowiła treść. Na pierwszym planie stawiał ścisłość naukową, dokładne wyjaśnienie przedmiotu w możliwie najobszerniejszych granicach, na jakie przypuszczalne przygotowanie czytelnika pozwalało. Przedewszystkiem chodziło mu o naukę i naukową formę wykładu, o ścisłość, nie cofającą się nawet przed przytaczaniem w popularyzacyi, o ile zachodziła potrzeba, danych liczbowych lub formuł matematycznych, jeżeli one były koniecznemi dla dokładnego wyjaśnienia danej sprawy. Nauki dla formy nie poświęcał, jakkolwiek o formę dbał i nadawał jej ważne znaczenie. Jego książki i artykuły odznaczają się wysoką miarą wartości naukowej, pomimo formy przystępnej i łatwej, wykładu jasnego i pociągającego. Był on więc popularyzatorem wiedzy gruntownym i sumiennym, popularyzatorem w najlepszem znaczeniu tego słowa.

Nie był to pisarz, który dziś popularyzuje Fizykę, jutro Botanikę, albo nawet kwestyę społeczną czy pedagogiczną. Trzymał on się możliwie zawsze w granicach swej specyalności, Fizyki i Kosmografii, wkraczając w inne dziedziny tylko o tyle, o ile to na razie było niezbędne. Był to popularyzator nawskroś przygotowany do swego zawodu, popularyzator o wiedzy gruntownej, panujący nad przedmiotem, przejęty jego znaczeniem, rozumiejący wartość nauki, stawiający ścisłość jej zasad ponad wszystko. Kochał on naukę i umiał wykładać ją jasno, dla tego pociągał czytelników treścią i formą, umiał przykuwać ich uwagę i przelewać w ich umysły zamiłowanie do wiedzy. I dla tego wśród młodszego pokolenia nie mało jest ludzi, którzy jemu zawdzięczają pierwsze zasadnicze pojęcia z nauk przyrodniczych, którzy jemu zawdzięczają zrozumienie ich ważności i gorące przejęcie się ich znaczeniem i celem.

Jeżeli zwrócimy uwagę na to, że pierwsze pojęcia, jakie umysł młodzieńczy otrzymuje, sprawiają nań wrażenie najsilniejsze i utrwalają się w nim najgruntowniej, tak iż nieraz w późniejszem życiu z trudem wielkim dają się wyrugować i zastąpić właściwemi, zrozumiemy jasno, jak ważną rzeczą jest, aby właśnie książki popularne i podręczniki dla

Digitized by Google

młodzieży pisane były przez ludzi, znających przedmiot gruntownie, co w naszych stosunkach bywa rzeczą rzadką. Ileż mamy w piśmiennictwie naszem książek pseudopopularnych i podręczników szkolnych, w których roi się od błędów naukowych. Dotyczy to zwłaszcza książek przyrodniczych. Z drugiej strony ludzie istotnej, głębokiej wiedzy często nie umieją pisać przystępnie; ich książki, przeznaczone dla szerokiej publiczności, zalegają półki księgarskie. W pracach Kramsztyka gruntowność i przystępność zespalają się w jednę harmonijną całość. Ta przystępność wykładu nie przeszkadzała głębokości myśli, jaką wszystkie prace naukowe Stanisława Kramsztyka się odznaczają. Pomimo prostoty i jasności formy, pomimo naukowej treści i ścisłości, umiał on zawsze, nie odbiegając od przedmiotu, okrasić treść tę myślą głębszą, ideą filozoficzną. Popularyzował on zarówno rzeczy zasadnicze, jak i nowsze postępy wiedzy, które oceniać umiał krytycznie. Umiał on pisać zarówno dla sfer inteligentnych, jak i dla prostego, nieoświeconego ludu.

A przytem, poza gruntownością i ścisłością naukową, poza myślą głębszą, poza przystępnym, jasnym i ujmującym wykładem, dziełka i artykuły Kramsztyka odznaczają się jeszcze jedną, wspomnianą powyżej a ważną nader dla nas zaletą, którą nasze popularyzacye często zaniedbują. Mam na myśli czystość i piękną formę języka, którym się posługiwał, czystość i styl, jakie rzadko w dziełach naukowych u nas spotykamy. Kramsztyk był bowiem doskonałym znawcą języka, dbającym o jego formę, o zachowanie nieskazitelnej jego czystości i o jego rozwój. Niektóre prace jego mogą być wzorem stylu, i niedziw, że niektóre wyjątki z nich zostały włączone do Wypisów, przeznaczonych do nauki języka.

Już w czasie studyów uniwersytetckich rozpoczął zawód piśmienniczy (w r. 1862), pisując popularne artykuły, nietylko z nauk przyrodniczych, ale i z innych dziedzin w „Przyjacielu Dzieci“ i w wielu innych pismach. W r. 1874 wydał nader cenny „Wykład Arytmetyki handlowej“, które to dzieło wkrótce w handlu księgarskim wyczerpane zostało (2-e wydanie wyszło w r. 1902). Kramsztyk był bowiem przedewszystkiem, jak każdy umysł ścisły, z zamiłowania matematykiem, co jak zaznaczyłem, przebijało się nawet w jego popularyzacyach z nauk przyrodniczych. Wkrótce potem (w r. 1876) opracował wykład Fizyki dla wychodzącego podówczas przy „Przeglądzie Tygodniowym“

Digitized by Google

„Panteonu wiedzy ludzkiej". Były to wszystko pierwociny jego pracy piśmienniczej na polu nauki, której duszą i ciałem pragnął się poświęcić.

Ważniejsze jednak są późniejsze jego utwory, zwłaszcza prace popularne. Nie mogąc przytaczać wszystkich, zwrócimy tylko uwagę na dziełka oddzielnie wydane, a przedewszystkiem na „Wiadomości początkowe z Fizyki" w 2-ch częściach (1-e wyd. 1883, 2-e wyd. 1886, 3-e wyd. 1904), stanowiące klasyczny wzór popularnego wykładu Fizyki początkowej, którego nawet piśmiennictwo zagraniczne mogłoby nam pozazdrościć; dziełko to zna u nas niewątpliwie każdy nauczyciel, każda nauczycielka wykładająca dzieciom nauki przyrodnicze, winien je znać każdy wogóle pedagog. Dokładność, jasność i systematyczność wykładu nie przejawiły się w dziełach Kramsztyka nigdzie może bardziej, niż w tej książeczce. Oprócz tego wydał on jeszcze oddzielnie: „O postaci i ciężarze ziemi" (wyd. 2-e 1885), „Fizyka bez przyrządów" (cz. I 1891, cz. II 1893), „Ziemia i niebo" (1898), „Komety i gwiazdy spadające" (1899), „Opowiadania z niwy naukowej" (1905). Z książeczek dla ludu wyszły: „Czego nas Kopernik o obrotach ziemi nauczył?" (1890), „Nic w naturze nie ginie" (1900) i inne. Oprócz prac oryginalnych zajmował się też przekładami wartościowych dzieł literatury obcej. Do tej kategoryi należą: H. Mohna „Zasady Meteorologii" (1883), Balla „Mechanika doświadczalna" (1894), Macha „Odczyty popularno-naukowe" (1899) i inne. Z artykułów w pismach peryodycznych pomieszczonych, najwięcej prac jego, gdyż przez cały szereg lat w każdym prawie numerze zawiera pismo „Wszechświat", gdzie są podznaczone głoskami: S. K., T. R., A. i t. d. Wszystkich artykułów dłuższych i krótszych, któremi zasilał czasopisma i encyklopedye, nie sposób zliczyć, zbierze się ich z kilka tysięcy. Zaznaczymy tylko, iż obszerniejsze rozprawy jego pomieszczały najczęściej miesięczniki i tygodniki: „Ateneum", „Biblioteka Warszawska", „Ogniwo" „Ognisko", „Przegląd Pedagogiczny", „Przyroda", „Wędrowiec" i inne. Niektóre ważniejsze artykuły zostały zebrane i wydane (w r. 1893, 2-e wyd. 1905) w oddzielnej książce jubileuszowej z okazyi 30-letniej rocznicy jego pracy piśmienniczej p. t. „Szkice przyrodnicze", inne jednak jego obszerniejsze artykuły, nie pomieszczone w tym zbiorze, a zwłaszcza później już, po jego wydaniu napisane, złożyłyby się na niejedno takie jeszcze dzieło. Brał on też udział w opracowaniu działów przyrodniczych w „Poradniku dla samouków", gdzie całe roz-

Digitized by Google

działy przez niego napisane odznaczają się wielką wartością. Na uwagę też zasługują liczne artykuły jego pióra w „Encyklopedyi mniejszej“ i w „Encyklopedyi powszechnej ilustrowanej“ Orgelbranda, w „Wielkiej Encyklopedyi ilustrowanej“ i inne. Nader czynną działalność rozwijał też w redakcyi „Wszechświata“ i innych wydawnictw jako współredaktor. Ostatnio zajęty był pracą nad przekładem wychodzącego obecnie wielkiego ilustrowanego dzieła „Wszechświat i człowiek“. Nadto pozostawił on w rękopisie opracowaną zupełnie „Kosmografię“ i wiele innych rozpoczętych prac.

To była jego działalność piśmiennicza. Pozatem jednak brał on jeszcze udział w różnych towarzystwach naukowych, zapraszany stale do narad i pracy w rozmaitych posiedzeniach, mających na celu dobro ogółu; miewał odczyty publiczne z dziedziny nauk przyrodniczych w Muzeum Przemysłu i rolnictwa, brał udział w naradach nad organizacyą szkoły Stow. Pracowników Handlowych m. Warszawy i in. szkół, w komitecie wydawnictw dzieł technicznych z funduszów H. Wawelberga i t. p. A w działalności tej, w stosunkach z towarzyszami pracy jak i w stosunkaeh prywatnych, Kramsztyk znany był jako człowiek poważny, wielkiej wiedzy, zawsze czynny, prawy, dobrego serca, towarzyski, przez wszystkich szanowany.

Żywy jego i szlachetny umysł, przejęty miłością wiedzy i miłością ojczyzny, nie znał za życia spoczynku. Śmierć, która po krótkotrwałej chorobie, przerwała pracowity jego żywot 22 Grudnia 1906 r., zastała go niemal jeszcze wśród gorączkowej pracy, pełnego nowych projektów. Spoczął dopiero w grobie.

Na tym grobie możnaby wypisać zdanie, zawarte w jednej z jego prac: „Przez rozumienie przyrody wznosimy się do znajomości człowieka, a przez ukochanie przyrody—do jego miłości“.

Niechże za tą ciężką pracę obywatelską, za te uczucia i zasady, któremi się kierował, ma w grobie tę pewność, że potomni pójdą za tą wskazówką i że pamięć o nim wśród nas nie zaginie. Bo tylko praca w imię tych haseł, w imię wiedzy i miłości doprowadzi nas wreszcie do przyszłości szczęśliwej.

W styczniu 1907.

Digitized by Google

„Initiation mathématique“ C. A. Laisanta.[1]

W książce „Initiation mathématique“ p. Laisant zrealizował swe poglądy na sprawę przedszkolnego nauczania Matematyki, sformułowane w poprzednio wydanem studyum: „Education fondée sur la science“, w którem przychodzi do następujących wniosków.

Przyjmując za zasadę, że pewien zasób wiadomości matematycznych, przynajmniej w zakresie t. zw. Matematyki elementarnej, jest niezbędny dla każdego, kto chce się oryentować w zjawiskach natury i współczesnego życia, zaleca wczesne przystąpienie do początkowej nauki przedmiotów matematycznych, którą, jego zdaniem, można rozpocząć już z dziećmi w wieku $3\frac{1}{2}$ — 4 lat, z chwilą, kiedy potrafią stawiać kreski na tabliczce szyfrowanej lub papierze; ułatwi to dzieciom znakomicie późniejszą naukę systematyczną, szkolną. Oczywiście, ta początkowa nauka ma być udzielana dzieciom w postaci zabawy, bez żadnego przymusu, bez obciążania ich pamięci. Wychowawca, apelując do wrodzonej umysłom dziecięcym żywości i ciekawości, ma poprzestać na umiejętnem przedstawieniu dzieciom przedmiotów i zjawisk świata zewnętrznego, oraz na ułatwieniu im naturalnych już w tym wieku uogólnień, które, acz nieświadomie, prowadzą do pojęć matematycznych. Tak pojęta i stopniowo przeprowadzona początkowa nauka Matematyki da nam, zdaniem autora, zysk wielokrotny: obudziwszy w dzieciach ciekawość i zainteresowanie się przedmiotem, nauczamy je znacznie więcej w wieku przedszkolnym, niż to się dzisiaj osiąga; zaoszczędziwszy zaś dziecku przedwczesnych wysiłków pamięciowych i rozwinąwszy racyonalnie jego umysł, przyprowadzimy je do szkoły z daleko większym zasobem energii do pracy umysłowej i znacznie lepiej, niż dziś, do niej przygotowane.

[1]) Sprawozdawca przygotował przekład polski tej książeczki, otrzymawszy na to upoważnienie autora. (Przyp. Red.)

Digitized by Google

Zobaczymy teraz, streszczając pobieżnie książeczkę, co ma być według autora, przedmiotem tej początkowej nauki Matematyki.

W początkowych rozdziałach (1—7) mamy stawianie kresek poziomych, pionowych i pochyłych przy ciągłem użyciu cennego a zarazem prostego, środka pedagogicznego — papieru kratkowanego (nauka rysunku powinna stale towarzyszyć udzielaniu dzieciom pierwszych wiadomości z Matematyki), urabianie pojęcia o liczbach mianowanych i niemianowanych w zakresie 1—10 na kreskach i innych liczmanach i przedmiotach; wprowadzenie nowych liczmanów—zapałek, wiązanie ich opaskami gumowemi w paczki po 10 i w wiązki po 100; urabianie na tych liczmanach pojęcia o liczbach pierwszej setki i wskazanie ich nazwisk; tworzenie tabliczki dodawania z zapałek i kresek; tworzenie sum i różnic w powyższym zakresie przy symbolicznem przedstawianiu liczb zapałkami i ich pęczkami.

W rozdziale 8-m znajdujemy udatną próbę uzmysłowienia jedności wyższych rzędów przez wprowadzenie: pęków, skrzynek i koszów zapałek, odpowiadających tysiącom, dziesiątkom i setkom tysięcy; pak, wozów i wagonów zapałek, odpowiadających milionom, dziesiątkom i setkom milionów, wreszcie pociągu, naładowanego zapałkami, który odpowiada miliardowi. W rozdziale zaś 9-m osiąga się to samo przy pomocy różnokolorowych krążków. Tutaj też mamy dodawanie i odejmowanie większych liczb, wyrażonych symbolicznie opisanemi sposobami.

Następny rozdział 10-ty jest poświęcony symbolistyce cyfrowej.

Rozdział 11-y i 12-y obznajmiają dzieci z prostą i jej odcinkami, odpowiedniością pomiędzy liczbą i odcinkiem oraz dodawaniem odcinków.

W rozdziale 13-m i 14-ym znajdujemy wyjaśnienie zwrotu odcinka, odcinków dodatnich i ujemnych i próbę poglądowego przedstawienia liczb ujemnych, jako różnicy dwóch odcinków, oraz wyjaśnienie natury tych liczb przy pomocy kilku starannie dobranych przykładów.

Rozdział 15-y zawiera wskazówki, w jaki sposób ułatwić dziecku, przy liczeniu i mierzeniu, wytworzenie sobie ważnego pojęcia o stosunku.

Tworzenie tabliczki mnożenia cyfrowej i graficznej, np. na papierze milimetrowym, tworzenie iloczynów dwóch liczb, na początek zalecaną przez autora metodą „muzułmańską“ (prostokąt na papierze

Digitized by Google

kratkowanym, w którego okienkach wypisuje się w odpowiedni sposób cyfry iloczynów częściowych, dodawane następnie w ukośnych szeregach), wyjaśnienie potęgi, jako iloczynów równych czynników — stanowi przedmiot rozdziałów 16 i 17.

Następują w rozdziałach 18-m i 19-m ciekawe rachunki, mające na celu zainteresowanie dzieci liczbami, liczby pierwsze i sito Eratostenesa.

Rozdział 20 jest poświęcony wyjaśnieniu dzielenia, jako wielokrotnego odejmowania. Należy zauważyć, że autor zaleca, w miarę zapoznawania dzieci z działaniami na liczbach, wczesne ich oswajanie z symbolami algebraicznemi: głoskami zamiast liczb, znakami działań znakiem równości.

Podział okrągłego ciastka na równe części nastręczył autorowi sposób poglądowego przedstawienia w rozdziale 21-m ułamków i ich najprostszych własności.

Rozdziały 22-gi, 23-ci i 24-ty można uważać za propedeutykę Geometryi. Znajdujemy w nich wykreślanie pospolitych figur wielokątnych, ich nazwy, opis graniastosłupa, sześcianu i ostrosłupa (z uwagą o budowaniu tych brył z patyczków i drutu, oraz wycinaniu ich z kartofla lub marchwi), jednostkę pola i obliczanie pól kwadratu, prostokąta, równoległoboku trójkąta i trapezu, wreszcie poglądowe przedstawienie (według Bhascary) własności trójkąta prostokątnego, znanej pod nazwą twierdzenia Pytagorasa. Kładzie się tu, oczywiście, jak największy nacisk na ćwiczenia rysunkowe, które dzieci mają wykonywać od ręki i przy pomocy najprostszych przyrządów rysunkowych: liniału, ekierki i podziałki.

Rozdział 25-y i 26-y zawierają geometryczną ilustracyę kwadratu sumy i różnicy dwóch liczb, iloczynu sumy dwóch liczb przez ich różnicę, oraz sześcianu sumy dwóch liczb.

Istotnie ciekawe rzeczy znajdujemy w rozdziałach 27, 28, i 29, w których autor, posiłkując się tylko papierem kratkowanym, wykreśla nader dowcipnie liczby trójkątne, wykazuje niektóre ich własności, oraz oblicza graficznie sumy kwadratów i sześcianów liczb naturalnych. Oto przykład zastosowania tej metody, zresztą ogólnej, do obliczenia sumy kwadratów pierwszych czterech liczb $1^2+2^2+3^2+4^2$. Na fig. 1-ej odczytujemy: $1+2+3+4=\frac{4(4+1)}{2}$; fig. 2-ga wska-

Digitized by Google

zuje, że: $2^2 = 1+3$, $3^2 = 1+3+5$, $4^2 = 1+3+5+7$, wskutek czego kwadratom pierwszych 4 liczb można nadać kształty figur (3); każda

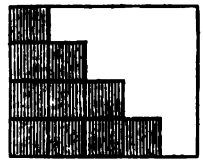


Fig. 1.

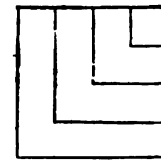


Fig. 2.

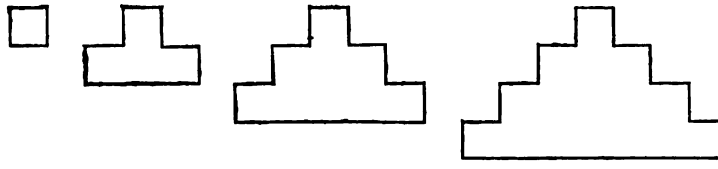


Fig. 3.

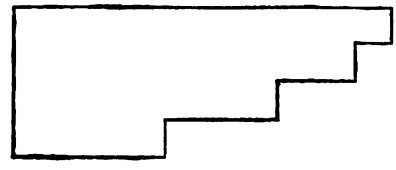


Fig. 4

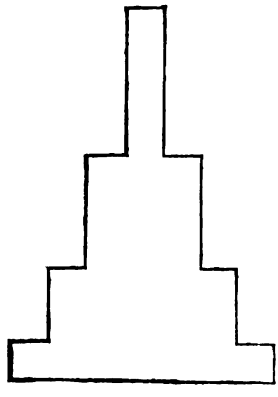


Fig. 5.

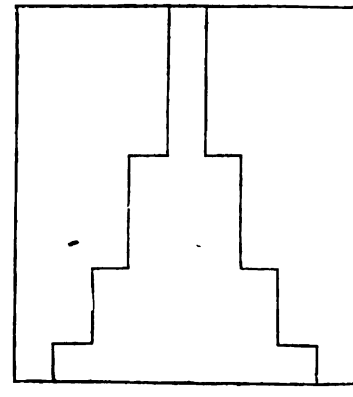


Fig. 6.

Digitized by Google

z figur (4), (5) wyobraża szukaną sumę kwadratów, stosownie do nadanego im kształtu (2) lub (3), wreszcie figura (6), która jest prostokątem o $\frac{4(4+1)}{2}$ wierszach i $2.4+1$ kolumnach, została utworzona z (5), (4) i (4) odwróconej, liczba więc jej okienek $\frac{4(4+1)(2.4+1)}{2}$ jest równa potrojonej szukanej liczbie, mamy przeto $1^2+2^2+3^2+4^2 = \frac{4(4+1)(2.4+1)}{6}$ lub ogólnie $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

W rozdziałach 30-m i 31-m mamy: potęgi 11-tu, trójkąt Pascala i kwadrat arytmetyczny Fermata wraz z zastosowaniem tegoż do obliczenia dróg wieży na szachownicy.

Różne systematy liczenia, w szczególności systemat dwójkowy i jego zastosowanie do zabawki, zwanej „tajemniczym wachlarzem", wypełniają rozdziały 32-gi i 33-ci.

Przedmiotem rozdziału 34-go są postępy różnicowe i przedstawienie graficzne ich sumy, w rozdziale zaś 35-m znajdujemy postępy ilorazowe.

Następne trzy rozdziały 36-y, 37-y i 38-y są poświęcone przykładom wielkich liczb, do których prowadzą postępy ilorazowe: mamy tu więc klasyczną anegdotę o ziarnach zboża na szachownicy, jej zgrabną odmianę pod tytułem „tanie kupno", wreszcie przykłady olbrzymich sum pieniężnych, wytworzonych przez procent składany.

W rozdziale 39-ym, zatytułowanym „obiad ceremonialny", autor zręcznie wprowadza dzieci w świat przestawień (permutacyj), ilustrując je sposobem, podawanym przez E. Lucasa p. n. „przestawienia obrazowe" (permutations figurées).

Celem oswojenia dzieci z wielkiemi liczbami, opowiada im autor w rozdziale 40-m kilka szczegółów o potędze liczby 9 z wykładnikiem 9^9, która jest liczbą, posiadającą 369693100 cyfr.

W następnych rozdziałach 41—45, po opisaniu cyrkla i przenośnika, które, zdaniem autora, powinny się już znaleść w ręku dziecka, mamy niektóre własności koła, przytoczone bez dowodu, wzory na długość okręgu i pole koła, kilka klasycznych figur, utworzonych z łuków koła, jako te: księżyce Hippokratesa i niektóre rozety, wreszcie wzory na objętość wielościanów, wcześniej poznanych, jako też na objętość

Digitized by Google

brył obrotowych: walca, stożka i kuli. Jest to więc dalszy ciąg propedeutyki Geometryi.

W rozdziałach 46—56, najważniejszych może ze względu na przygotowanie dzieci do dalszej nauki Matematyki, autor pokazuje, jak ułatwić młodocianym umysłom wyrobienie sobie pojęcia o funkcyi przy pomocy obrazów przebiegu tejże, czyli t. zw. przedstawień graficznych lub krócej grafików. Znajdujemy tu szereg ciekawych i starannie dobranych przykładów, mogących zainteresować dzieci, że wymienię: bieg pociągów kolejowych, zmiana ciśnienia barometrycznego i temperatury, ciekawe zagadnienie E. Lucasa o parowcach, kursujących pomiędzy Hawrem i Nowym-Yorkiem, które wprawiło w kłopot uczonych matematyków, wreszcie kilka dowcipnie pomyślanych odmian t. zw. zagadnienia o gońcach. W ostatnich grafikach: spadającego kamienia, wyrzuconej w górę kuli i pociągów kolei miejskiej w Paryżu spotykamy po raz pierwszy łuk krzywej—paraboli.

W następnych czterech rozdziałach 57—60 autor, korzystając z okoliczności, że wyżej opisany sposób kreślenia grafików został zaczerpnięty z Geometryi analitycznej, wyjaśnia spółrzędne prostokątne na płaszczyźnie i podaje pobieżny opis trzech stożkowych: paraboli, elipsy i hyperboli.

Podział odcinka na dwa inne przez punkt, poruszający się na prostej w jednym lub drugim kierunku i przedstawienie graficzne stosunku dwóch nowych odcinków, jako też podział harmoniczny i wyjaśnienie tej nazwy, stanowią przedmiot rozdziałów 61 i 62.

W rozdziale 63-m znajdziemy opis i wyjaśnienie znanego paradoksu: 64=65, który na ukończeniu dotychczasowej nauki początkowej może stanowić, zdaniem autora, pożyteczne ćwiczenie dla dzieci.

Rozdział 64-y zawiera krótką wzmiankę o kwadratach magicznych.

W zakończeniu wreszcie znajdujemy przedmowę do dzieci, gotujących się wstąpić do szkoły po ukończeniu nauki przygotowawczej według przytoczonego programu, oraz kilku uwag o trafnym wyborze szkoły, nie pozbawionej pewnej dozy złośliwości, lecz stosujących się na szczęście tylko do szkół francuskich.

Jak widzimy, książka p. Laisanta zawiera bogaty materyał propedeutyczny w zakresie Matematyki, bezstronny zaś czytelnik przyzna, że niebrak w niej i trafnych wskazówek co do spożyt-

Digitized by Google

kowania tego materyału. Jako taka, może być polecona rodzicom, wychowawcom domowym i nauczycielom szkół początkowych, może też i profesorowie szkół średnich znaleźliby w niej niejednę pożyteczną wskazówkę.

Na zakończenie kilka słów o przekładzie. Naogół biorąc, trzymałem się wiernie oryginału, wprowadzając drobne zmiany tylko tam, gdzie tego wymagał wzgląd na polskiego wychowawcę, dla którego ten przekład jest przeznaczony i na polskie dzieci. Dla tej też przyczyny grafik kolejowy „Paryż-Marsylia" w oryginale (rozdz. 48) zastąpiłem grafikiem pociągów kuryerskich na kolei Warszawsko-Wiedeńskiej, oraz zamiast krzywych ciśnienia barometrycznego i temperatury, przytoczonych w oryginale (rozdz. 50) za czasopismem „La Nature" i odnoszących się do ostatniego tygodnia r. 1881, podałem szkice podobnych krzywych według udzielonych mi uprzejmie przez p. Mereckiego zapisów barografu i termografu Centralnej stacyi Meteorologicznej przy Muzeum Przem. i Handlu w Warszawie, za czas od 27 maja do 2 czerwca r. 1904. Nadto, w uwadze do rozdziału 64, w którym jest mowa o kwadratach magicznych, przytoczyłem z książki Bachet de Méziriaca „Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres" graficzny sposób tworzenia kwadratów magicznych z pierwszych 9 oraz z pierwszych 25 liczb, uważając, że może się do przyczynić do większego zainteresowania dzieci przedmiotem.

Z. Czubalski.

Digitized by Google

Digitized by Google

W. SIERPIŃSKI.

O rozkładach liczb całkowitych na różnicę dwóch kwadratów.[1]

I.

§ 1. Uważajmy jakąkolwiek liczbę całkowitą n (do liczb całkowitych zaliczać będziemu tu, jak też wszędzie dalej, nie tylko dodatnie ale i ujemne i równe zeru); postarajmy się wyznaczyć wszystkie rozkłady tej liczby na różnicę kwadratów dwóch liczb całkowitych, t. j. wszystkie układy (μ,ν) liczb całkowitych μ i ν, spełniających rownanie:

$$n = \mu^2 - \nu^2. \tag{1}$$

Załóżmy najprzód, że liczba n jest zerem. Równanie (1) przyjmie wówczas postać:

$$\mu^2 - \nu^2 = 0\,,$$

i posiadać będzie nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych: na to, aby liczby całkowite μ i ν spełniały napisane przed chwilą równanie, potrzeba i wystarcza, iżby liczby te albo były sobie równe, albo też różniły się tylko co do znaku.

---

[1]) Niniejszy ustęp z teoryi liczb opracowany jest w ten sposób, iż dla zrozumienia jego wystarcza znajomość Matematyki elementarnej; jedynie ostatnie trzy paragrafy wymagają pewnych wiadomości ogólnych z Rachunków wyższych i specyalnych—z analitycznej teoryi liczb; wrazie jednak opuszczenia tych końcowych paragrafów, czytelnik też otrzyma pewną całość.

Digitized by Google

Przypadek $n=0$ możemy więc uważać za zbadany i jako taki wyłączyć z dalszych naszych rozważań.

Uważajmy więc jakąkolwiek liczbę całkowitą n, odmienną od zera. Nie uszczuplając bynajmniej ogólności naszych rozważań możemy założyć, że n jest liczbą dodatnią, każdemu bowiem rozkładowi (μ, ν) liczby $+n$ na różnicę dwóch kwadratów, odpowiada określony w zupełności rozkład (ν, μ) liczby $-n$ i odwrotnie; znając więc wszystkie rozkłady liczby dodatniej $+n$, znamy przez to i wszystkie rozkłady liczby ujemnej $-n$.

§ 2. Nazywać będziemy dalej dzielnikiem liczby dodatniej n każdą liczbę dodatnią d, przez którą n się dzieli bez reszty; wobec przyjętego określenia, do dzielników liczby n zaliczamy zarówno 1 jak też i samą liczbę n. Liczbę $\delta = \frac{n}{d}$ nazywać będziemy dla d dzielnikiem dopełniającym.

Uważajmy jakąkolwiek liczbę całkowitą dodatnią n i przypuśćmy, że liczby całkowite μ i ν spełniają równanie (1). Równanie to możemy przepisać w postaci:

$$n = (\mu - \nu)(\mu + \nu), \tag{2}$$

skąd widać, że jedna z liczb $\mu - \nu$ i $\nu - \mu$ (mianowicie ta z nich, która jest dodatnią, a jedna nią będzie, gdyż $n \neq 0$) musi być dzielnikiem liczby n. Mamy więc:

$$\mu - \nu = \pm d, \tag{3}$$

gdzie dzielnik d liczby n, a również znak, jaki przed nim postawić należy, są przez liczby μ i ν określone w zupełności. Możemy więc powiedzieć, że *każdy rozkład liczby n na różnicę dwóch kwadratów należy do pewnego jej dzielnika.*

Np. rozkład (7, 5) liczby 24 należy do dzielnika 2: rozkład (—5, 3) liczby 16 należy do dzielnika 8; rozkład (—6, 0) liczby 36 — do dzielnika 6 i t. p.

§ 3. Zapytamy teraz, czy do każdego dzielnika liczby n należą rozkłady i ile mianowicie.

Przypuśćmy, że (μ, ν) oznacza jakikolwiek rozkład liczby (całkowitej dodatniej) n na różnicę dwóch kwadratów, należący do jej dziel-

Digitized by Google

nika d. Liczby całkowite μ i ν muszą zatem spełniać równania (2) i (3), z których oznaczając $\frac{n}{d} = \delta$, znajdziemy z łatwością:

$$(4) \qquad \mu = \pm \frac{\delta + d}{2}, \quad \nu = \pm \frac{\delta - d}{2},$$

przyczem znaki trzeba będzie w obu wzorach wziąć albo jednocześnie górne, albo też jednocześnie dolne.

Liczby μ i ν są całkowite, wnosimy więc na mocy wzorów (4), że liczby $\delta + d$ oraz $\delta - d$ muszą być obie parzyste. Będzie to wtedy i wtedy tylko, jeżeli dzielniki d i δ będą oba parzyste, albo też oba nieparzyste.

Dwa więc tylko rozkłady:

$$\left(\frac{\delta+d}{2}, \frac{\delta-d}{2}\right) \text{ oraz } \left(-\frac{\delta+d}{2}, \frac{d-\delta}{2}\right)$$

i to tylko w razie jednoczesnej parzystości lub nieparzystości liczb d i δ mogą należeć do dzielnika d. Że w razie zachowania tego warunku oba wypisane układy (μ, ν) istotnie będą rozkładami liczby n na różnicę kwadratów dwóch liczb całkowitych, należącemi do dzielnika d, przekonamy się z łatwością, zważywszy, iż będą to układy liczb całkowitych, spełniających równania (1) i (3).

A więc: jeżeli liczby d i $\delta = \frac{n}{d}$ są obie parzyste, lub obie nieparzyste, do dzielnika d należą dokładnie dwa rozkłady liczby n na różnicę kwadratów dwóch liczb całkowitych; jeżeli jedna z liczb d i δ jest parzystą, druga nieparzystą — niema rozkładów, należących do dzielnika d.

P r z y k ł a d. Załóżmy $n=100$. Dzielnikami tej liczby są:

1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100;

jedynie do dzielników 2, 10 i 50 należą rozkłady, a mianowicie:

do dzielnika $d = 2$ $(\delta = 50)$ rozkłady $(+26, +25)$ i $(-26, -24)$,
„ „ $d = 10$ $(\delta = 10)$ „ $(+10, +0)$ i $(-10, -0)$,
„ „ $d = 50$ $(\delta = 2)$ „ $(+26, +24)$ i $(-26, -24)$

Digitized by Google

Ponieważ każdy rozkład musi należeć do pewnego dzielnika (§ 2), więc wnosimy, że, oprócz wypisanych wyżej, niema innych rozkładów liczby 100 na różnicę kwadratów dwóch liczb całkowitych.

§ 4. Załóżmy, że n jest liczbą nieparzystą, Wszystkie dzielniki liczby n są wtedy nieparzyste; liczby d i δ spełniają więc zawsze wiadomy warunek: do każdego przeto dzielnika liczby nieparzystej należą dokładnie dwa rozkłady, skąd:

T w i e r d z e n i e. Liczba rozkładów każdej liczby nieparzystej na różnicę kwadratów dwóch liczb całkowitych równa jest podwójnej liczbie dzielników rozkładanej liczby.

Oznaczmy symbolem $\tau(n)$ liczbę wszystkich różnych rozkładów liczby n na różnicę kwadratów dwóch liczb całkowitych, symbolem $\theta(n)$ — liczbę dzielników liczby n; na mocy dowiedzionego twierdzenia, przy wszelkiem nieparzystem n mamy wzór.

$$\tau(n) = 2\,\theta(n). \tag{5}$$

Jako szczególny przypadek naszego twierdzenia, otrzymujemy:

Każda liczba pierwsza nieparzysta posiada dokładnie 4 rozkłady na różnicę dwóch kwadratów.

Twierdzenie to może być odwrócone: każda liczba nieparzysta, posiadająca dokładnie 4 rozkłady na różnicę dwóch kwadratów, jest liczbą pierwszą.

W samej rzeczy, równanie:

$$\tau(n) = 2 . 2,$$

wobec wzoru (5) dla liczb nieparzystych, daje:

$$\theta(n) = 2,$$

skąd wniosek, iż n jest liczbą pierwszą.

§ 5. Przypuśćmy teraz, że n oznacza liczbę parzystą. Ponieważ $d\delta = n$, więc dzielniki d i δ nie mogą być oba jednocześnie nieparzyste. Jeżeli więc $\tau(n) \neq 0$, to muszą istnieć dzielniki d, dla których liczby d i δ są obie parzyste, co znów może mieć miejsce tylko w razie podzielności liczby n przez cztery. Stąd twierdzenie:

Digitized by Google

Dla liczb n parzystych, lecz niepodzielnych przez cztery (t. j. dla podwojonych liczb nieparzystych).

(6) $$\tau(n) = 0.$$

Załóżmy więc teraz, że liczba n jest podzielna przez cztery, a więc rozkłada się na czynniki pierwsze:

$$n = 2^a p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots\ldots p_k^{a_k},$$

gdzie a oznacza liczbę całkowitą, większą od jedności, zaś $a_i (i=1,2,\ldots,k)$ są liczby całkowite dodatnie.

Każdy dzielnik liczby n ma postać:

$$d = 2^\lambda p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots\ldots p_k^{\lambda_k},$$

gdzie liczby $\lambda, \lambda_1, \ldots \lambda_k$ mogą przyjmować wartości całkowite, zawarte odpowiednio w granicach:

$$0 \leqslant \lambda \leqslant a,\ 0 \leqslant \lambda_1 \leqslant a_1,\ 0 \leqslant \lambda_2 \leqslant a_2, \ldots\ldots\ 0 \leqslant \lambda_k \leqslant a_k.$$

Aby dzielniki d i δ były oba parzyste, trzeba i wystarcza, iżby było:

$$1 \leqslant \lambda \leqslant a - 1,$$

skąd wnosimy, że dzielników d, spełniających ten warunek, będzie:

$$(a-1)(a_1+1)(a_2+1)\ldots\ldots(a_k+1).$$

Będzie więc:

(7) $$\tau(n) = 2(a-1)(a_1+1)(a_2+1)\ldots\ldots(a_k+1).$$

Oznaczmy przez $\theta'(n)$ liczbę wszystkich nieparzystych dzielników liczby n, przez $\theta''(n)$—liczbę wszystkich jej dzielników parzystych. Będziemy oczywiście mieli:

$$\theta'(n) = (a_1+1)(a_2+1)\ldots\ldots(a_k+1),$$

oraz:

$$\theta''(n) = a(a_1+1)(a_2+1)\ldots\ldots(a_k+1),$$

skąd:

$$2[\theta''(n) - \theta'(n)] = \tau(n).$$

Ponieważ $a > 1$, więc $\theta''(n) > \theta'(n)$; możemy przeto napisać:

(8) $$\tau(n) = 2|\theta''(n) - \theta'(n)|,$$

oznaczając przez $|x|$ wartość bezwzględną liczby x.

Digitized by Google

§ 6. Wzór (8) wyprowadziliśmy, zakładając, że liczba n jest podzielna przez cztery; z łatwością jednak można okazać, że jest on prawdziwy ogólnie.

Gdyby bowiem liczba n była parzysta, lecz niepodzielna przez cztery, zachodziłby wzór (6); lecz wtedy znaleźlibyśmy z łatwością $\theta'(n)=\theta''(n)$, każdemu bowiem dzielnikowi nieparzystemu liczby n odpowiadałby dwa razy większy dzielnik parzysty tej liczby, i odwrotnie: każdemu parzystemu dzielnikowi—dwa razy mniejszy nieparzysty.

W razie nieparzystego n wszystkie dzielniki tej liczby byłyby nieparzyste: mielibyśmy więc $\theta''(n)=0$ i $\theta'(n)=\theta(n)$, przyczem $\theta(n)>0$; wzór (7) zamieniłby się na wzór (5).

Udowodniliśmy więc, iż liczba rozkładów każdej liczby całkowitej dodatniej n na różnicę dwóch kwadratów równa się podwojonej różnicy bezwzględnej pomiędzy liczbą wszystkich parzystych a liczbą wszystkich nieparzystych dzielników liczby n.

Zauważymy wreszcie, że aby wzór (7) był prawdziwy całkiem ogólnie (t. j. nietylko dla $a>1$, ale i dla $a=1$ oraz $a=0$), należy go tylko przepisać w postaci:

$$\tau(n) = 2\,.\,|a-1|\,.\,(a_1+1)\,(a_2+1)\,.\,.\,.\,.\,.\,(a_k+1). \tag{7a}$$

Wzór ten pozwala obliczać z łatwością wartość funkcyi $\tau(n)$, skoro mamy rozkład liczby n na czynniki pierwsze. Np. dla liczby

$$25920 = 2^6.\,3^4.\,5,$$

znajdujemy:

$$\tau(n) = 2\,.\,5\,.\,5\,.\,2 = 100;$$

możnaby okazać, że liczba 25920 jest najmniejszą liczbą, dającą dokładnie sto rozkładów na różnicę dwóch kwadratów; istnieją jednak liczby mniejsze od niej, posiadające więcej niż sto rozkładów: np. liczba

$$20160 = 2^6.\,3^2.\,5\,.\,7$$

daje $2\,.\,5\,.\,3\,.\,2\,.\,2 = 120$ rozkładów.

Ze wzoru (7a) wynika jeszcze, iż $\tau(n)=0$ tylko przy $a=1$: liczby parzyste, niepodzielne przez cztery, są więc jedynemi liczbami, nie rozkładającemi się na różnicę dwóch kwadratów.

Digitized by Google

§ 7. Załóżmy, że liczba n nie jest kwadratem zupełnym; wówczas każdy jej dzielnik będzie sie różnił od swego dopełniającego; wszystkie dzielniki liczby n możemy podzielić na pary, zaliczając do każdej wzajemnie dopełniające się dzielniki d i δ.

Jeżeli do dzielnika d należą rozkłądy liczby n, to należeć będą również do dzielnika δ i odwrotnie; wszystkie rozkłady liczby n podzielić więc możemy na czwórki:

$$\left(\frac{\delta+d}{2}, \frac{\delta-d}{2}\right), \left(-\frac{\delta+d}{2}, \frac{d-\delta}{2}\right), \left(\frac{d+\delta}{2}, \frac{d-\delta}{2}\right) \text{ i } \left(-\frac{d+\delta}{2}, \frac{\delta-d}{2}\right);$$

jak widzimy, rozkłady (μ, ν), należące do jednej z tej samej czwórki, różnią się tylko co do znaków liczb μ i ν.

Ponieważ $d\delta = n$ i $d \neq \delta$, więc jedna z liczb d i δ, np. d musi być mniejsza od $\sqrt{n}$. Wówczas będzie $\delta > \sqrt{n}$ i pierwszy rozkład napisanej wyżej czworki będzie dodatni. Aby otrzymać wszystkie rozkłady liczby n, wystarczy oczywiście wyznaczyć po jednym z każdej czwórki, np. wyznaczyć z każdej rozkład dodatni. Otrzymujemy stąd następujące prawidło praktyczne dla wyznaczania wszystkich rozkładów liczby n, nie będącej kwadratem zupełnym:

Należy wypisać wszystkie, mnjejsze od $\sqrt{n}$ dzielniki d liczby n, do których należą rozkłady (a więc dzielniki jednocześnie parzyste lub niaparzyste ze swemi dopełniającemi), i dla każdego z nich wyznaczyć rozkład dodatni (μ, ν), kładąc:

$$\mu = \frac{\delta+d}{2}, \quad \nu = \frac{\delta-d}{2};$$

z każdego otrzymanego w ten sposób rozkładu należy utworzyć cztery rozkłady:

$$(\mu, \nu), \ (-\mu. -\nu), \ (\mu, -\nu), \ (-\mu, \nu),$$

różniące się tylko co do znaków.

P r z y k ł a d. Załóżmy $n = 1000$. Dzielnikami $d < \sqrt{1000}$, do których należą rozkłady, będą: 2, 4, 10 i 20; odpowiedniemi rozkładami dodatniemi będą:

$$(251, 249), \ (127, 123), \ (55, 45) \text{ i } (35, 15);$$

wszystkich rozkładów będzie zatem 16, co wynika również ze wzoru (7).

U w a g a. Jako wniosek uboczny z naszych rozważań otrzymujemy, iż liczba $\tau(n)$ jest zawsze podzielna przez 4, jeżeli n jest nie kwadratem zupełnym.

Digitized by Google

Jeżeli n jest kwadratom zupełnym, to oprócz wyznaczonych w sposób opisany wyżej rozkładów dodatnich, z których każdy tworzy czwórkę, będziemy mieli jeszcze dwa rozkłady:

$$(\sqrt{n},\ 0) \text{ i } (-\sqrt{n},\ 0),$$

z których oczywiście wystarczy podać tylko pierwszy. Liczba $\tau(n)$ będzie w tym razie parzystą, lecz niepodzielną przez cztery.

Niżej podajemy tablicę wszystkich rozkładów nie ujemnych dla liczb mniejszych od sta, a następnie tablicę wartości funkcyi $\tau(n)$ dla $n < 100$.

TABLICA ROZKŁADÓW

liczb całkowitych < 100 na różnicę kwadratów dwóch liczb całkowitych $\geqslant 0$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		1,0		2,1	2,0	3,2		4,3	3,1	5,4 3,0
1		6,5	4,2	7,6		8,7 4,1	5,3 4,0	9,8		10,9
2	6,4	11,10 5.2		12,11	7,5 5,1	13,12 5,0		14,13 6,3	8,6	15,14
3		16,15	9,7 6,2	17,16 7,4		18,17 6,1	10,8 6,0	19,18		20,19 8,5
4	11,9 7,3	21,20		22,21	12,10	23,22 9,6 7,2		24,23	13,11 8,4 7,1	25,24 7,0
5		26,25 10,7	14,12	27,26		28,27 8,3	15,13 9,5	29,28 11,8		30,29
6	16,14 8,2	31,30		32,31 12, 9 8, 1	17,15 10, 6 8, 0	33,32 9, 4		34,33	18,16	35,34 13,10
7		36,35	19,17 11, 7 9, 3	37,36		38,27 14,11 10, 5	20,18	39,28 9, 2		40,39
8	21,19 12, 8 9, 1	41,40 15,12 9, 0		42,41	22,20 10, 4	43,42 11, 6		44,43 16,13	23,21 13, 9	45,44
9		46,45 10, 3	24,22	47,46 17,14		48,47 12, 7	25,23 14,10 11, 5 10, 2	49,48		50,49 18,15 10, 1

Digitized by Google

Tablica wartości funkcyi $\tau(n)$ dla $n < 100$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	∞	2	0	4	2	4	0	4	4	6
1	0	4	4	4	0	8	6	4	0	4
2	4	8	0	4	8	6	0	8	4	4
3	0	4	8	8	0	8	6	4	0	8
4	8	4	0	4	4	12	0	4	12	6
5	0	8	4	4	0	8	8	8	0	4
6	8	4	0	12	10	8	0	4	4	8
7	0	4	12	4	0	12	4	8	0	4
8	12	10	0	4	8	8	0	8	8	4
9	0	8	4	8	0	8	16	4	0	12

Jak widać z tej tablicy, z liczb pierwszej setki największą liczbę rozkładów daje liczba 96, dla której $\tau(96) = 16$; dla innych liczb, mniejszych od stu mamy stale $\tau(n) \leqslant 12$; niema zaś w pierwszej setce liczby, któraby dawała dokładnie 14 rozkładów: najmniejszą taką liczbą jest dopiero $n = 256$.

Digitized by Google

II.

§ 8. Zajmijmy się obliczaniem sumy:

$$\varphi(x) = \sum_{n>0}^{n\leqslant x} \tau(n), \qquad (x > 0)$$

czyli sumy:

$$\tau(1) + \tau(2) + \tau(3) + \ldots\ldots + \tau(Ex),$$

gdzie oznaczamy symbolem Ex największą liczbę całkowitą, nie przewyższającą liczby x.

Ponieważ $\tau(n)$ uważać można jako liczbę rozwiązań równania:

$$n = \mu^2 - \nu^2$$

w liczbach całkowitych μ, ν, więc sumę $\varphi(x)$ uważać możemy jako liczbę całkowitych rozwiązań nierówności:

$$(1) \qquad 0 < \mu^2 - \nu^2 \leqslant x.$$

Jeżeli liczby całkowite μ i ν spełniają napisane przed chwilą nierówności, to musi być:

$$\mu^2 > \nu^2,$$

skąd:

$$|\mu| > |\nu|,$$

a że obie liczby $|\mu|$ i $|\nu|$ są całkowite, więc ostatnia nierówność równoważna jest nierówności:

$$|\mu| \geqslant |\nu| + 1,$$

skąd, podnosząc obie strony do kwadratu:

$$\mu^2 \geqslant \nu^2 + 2|\nu| + 1,$$

czyli:

$$2|\nu| + 1 \leqslant \mu^2 - \nu^2,$$

a że na mocy nierówności (1) $\mu^2 - \nu^2 \leqslant x$, więc:

$$2|\nu| + 1 \leqslant x,$$

Digitized by Google

skąd:

(2) $$|\nu| \leqslant \frac{x-1}{2}.$$

A więc: jeżeli układ liczb całkowitych (μ, ν) spełnia nierówności (1), to liczba ν musi spełniać nierówność (2).

Wszystkie układy całkowite (μ, ν), spełniające nierówności (1) możemy podzielić na klasy, zaliczając do klasy K_n wszystkie układy (μ, ν), dla których ν ma jednę i tę samę wartość n. Wskaźnik n oczywiście może otrzymywać tylko wartości całkowite, spełniające nierówność

$$|n| \leqslant \frac{x-1}{2}.$$

Oznaczmy przez k_n liczbę układów klasy K_n: oczywiście będziemy mieli:

(3) $$\varphi(x) = \sum_{n > -\frac{x-1}{2}}^{n < \frac{x-1}{2}} k_n.$$

Obliczmy k_n: będzie to liczba różnych wartości całkowitych, jakie może przyjmować μ, iżby zachodziły nierówności:

$$0 < \mu^2 - n^2 \leqslant x,$$

czyli:

$$|n| < |\mu| \leqslant \sqrt{x+n^2}.$$

Biorąc pod uwagę określenie symbolu Ex, znajdziemy z łatwością, że $|\mu|$ przyjąć może dokładnie:

$$E\sqrt{x+n^2} - |n|$$

różnych wartości, a ponieważ pomiędzy niemi niema wartości zero (gdyż $|\mu| > |n| \geqslant 0$), więc każdej wartości na $|\mu|$ odpowiadać będą dwie różne wartości na $\mu(+|\mu|$ i $-|\mu|)$. Wnosimy stąd, iż:

(4) $$k_n = 2(E\sqrt{x+n^2} - |n|).$$

Digitized by Google

Ze wzoru tego wnosimy, iż $k_{-n} = k_n$, a więc sumę (3) możemy przedstawić w postaci:

$$\varphi(x) = k_0 + 2 \sum_{n>0}^{n \leqslant \frac{x-1}{2}} k_n,$$

lub, na mocy wzoru (4):

$$\varphi(x) = 2E\sqrt{x} + 4 \sum_{n>0}^{n \leqslant \frac{x-1}{2}} E\sqrt{x+n^2} - 4 \sum_{n>0}^{n \leqslant \frac{x-1}{2}} |n|;$$

n jest liczbą dodatnią, możemy zatem w ostatniej sumie opuścić symbol wartości bezwzględnej. Na mocy znanych wzorów na postęp arytmetyczny, znajdziemy z łatwością:

$$\sum_{n>0}^{n \leqslant \frac{x-1}{2}} n = \tfrac{1}{2} E \frac{x-1}{2} . E \frac{x+1}{2},$$

tak, iż ostatecznie:

$$(5) \qquad \varphi(x) = 2E\sqrt{x} - 2E\frac{x-1}{2} . E\frac{x+1}{2} + 4 \sum_{n>0}^{n \leqslant \frac{x-1}{2}} E\sqrt{x+n^2}.$$

§ 9. Na podstawie zależności pomiędzy funkcyami $\tau(n)$ i $\theta(n)$ wyprowadzimy jeszcze inny wzór na sumę $\varphi(x)$.

W tym celu, grupując osobno składniki $\tau(n)$, dla których n jest nieparzyste, osobno te, dla których n jest liczbą parzystą, lecz niepodzielną przez cztery, i wreszcie osobno te, dla których n jest wielokrotnością czterech, przedstawimy przedewszystkiem sumę $\varphi(x)$ w postaci:

$$(6) \qquad \varphi(x) = \sum_{k \geqslant 0}^{k \leqslant \frac{x-1}{2}} \tau(2k+1) + \sum_{k \geqslant 0}^{k \leqslant \frac{x-2}{4}} \tau(4k+2) + \sum_{k \geqslant 0}^{k \leqslant \frac{x}{4}} \tau(4k).$$

Na mocy wzoru (5) z rozdziału poprzedzającego, dla liczb nieparzystych mamy stale:

$$\tau(2k+1) = 2\theta(2k+1),$$

więc:

$$\sum_{k \geqslant 0}^{k \leqslant \frac{x-1}{2}} \tau(2k+1) = 2 \sum_{k \geqslant 0}^{k \leqslant \frac{x-1}{2}} \theta(2k+1).$$

Digitized by Google

Dla liczb parzystych, niepodzielnych przez 4, mamy wzór:

$$\tau(4k+2) = 0,$$

(zob. rozdz. I, wzór (6)), przeto:

$$\sum_{k>0}^{k<\frac{x-2}{4}} \tau(4k+2) = 0.$$

Dla liczb podzielnych przez 4, a więc liczb:

$$4k = 2^a . p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots\ldots p_m^{a_m},$$

gdzie $a \geqslant 2$, mamy wzór:

$$\tau(4k) = 2(a-1)(a_1+1)(a_2+1)\ldots\ldots(a_m+1);$$

jeżeli teraz zważymy, że liczba:

$$k = 2^{a-2} . p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots\ldots p_m^{a_m},$$

posiada

$$\theta(k) = (a-1)(a_1+1)(a_2+1)\ldots\ldots(a_m+1)$$

dzielników, to z łatwością znajdziemy:

$$\tau(4k) = 2\theta(k),$$

skąd:

$$\sum_{k>0}^{k<\frac{x}{4}} \tau(4k) = 2 \sum_{k>0}^{k<\frac{x}{4}} \theta(k).$$

W ten sposób wzór (6) daje:

$$\varphi(x) = 2 \sum_{k>0}^{k<\frac{x-1}{2}} \theta(2k+1) + 2 \sum_{k>0}^{k<\frac{x}{4}} \theta(k).$$

Pierwszą z sum, stojących po prawej stronie napisanego wzoru, możemy jeszcze wyrazić inaczej, opierając się na tożsamości:

$$\sum_{n>0}^{n<x} \theta(n) = \sum_{k>0}^{k<\frac{x-1}{2}} \theta(2k+1) + \sum_{k>0}^{k<\frac{x}{2}} \theta(2k);$$

Digitized by Google

w ten sposób znajdziemy:

$$(7) \qquad \varphi(x) = 2\sum_{k>0}^{k<x} \theta(k) - 2\sum_{k>0}^{k<\frac{x}{2}} \theta(2k) + 2\sum_{k>0}^{k<\frac{x}{4}} \theta(k).$$

Pierwszą i trzecią z sum po prawej stronie potrafimy obliczyć, jeżeli będziemy umieli obliczyć sumę:

$$T(z) = \sum_{k>0}^{k<z} \theta(k) \qquad \text{dla } z>0.$$

Ponieważ $\theta(k)$ uważać można jako liczbę rozwiązań w liczbach całkowitych, dodatnich m, n równania:

$$mn = k,$$

więc sumę $T(z)$ uważać możemy jaóo liczbę całkowitych dodatnich rozwiązań (m, n) nierówności:

$$mn \leqslant z.$$

Przy każdem danem n (całkowitem, dodatniem, nie większem od z), m może przyjmować wartości całkowite:

$$0 < m \leqslant \frac{z}{n},$$

których jest dokładnie $E\frac{z}{n}$, przeto:

$$T(z) = \sum_{n>0}^{n<z} E\frac{z}{n}.$$

Obliczmy teraz sumę::

$$\sum_{k>0}^{k<\frac{x}{2}} \theta(2k),$$

którą uważać możemy jako liczbę wszystkich takich całkowitych, dodatnich rozwiązań (m, n) nierówności:

$$mn \leqslant x,$$

dla których iloczyn mn jest liczbą parzystą.

Digitized by Google

Jeżeli n jest liczbą parzystą: $n = 2l$, to m może przyjmować wszystkie wartości całkowite:

$$0 < m \leqslant \frac{x}{2l},$$

których jest dokładnie $E\frac{x}{2l}$, w razie zaś nieparzystego $n = 2l+1$, m musi przyjmować wartości parzyste $m = 2t$, spełniające nierówności:

$$0 < 2t \leqslant \frac{x}{2l+1};$$

wartości takich jest dokładnie $E\frac{x}{2(2l+1)}$.

Zestawiając otrzymane wyniki, znajdujemy na sumę $\sum\limits_{k>0}^{k<\frac{x}{2}} \theta(2k)$ wartość:

$$\sum_{l>0}^{l<\frac{x}{2}} E\frac{x}{2l} + \sum_{l>0}^{l<\frac{x-2}{4}} E\frac{x}{2(2l+1)},$$

którą na mocy tożsamości:

$$\sum_{n>0}^{n<\frac{x}{2}} E\frac{x}{2n} = \sum_{l>0}^{l<\frac{x-2}{4}} E\frac{x}{2(2l+1)} + \sum_{l>0}^{l<\frac{x}{4}} E\frac{x}{4l}$$

możemy jeszcze przepisać w postaci:

$$\sum_{k>0}^{k<\frac{x}{2}} \theta(2k) = 2\sum_{n>0}^{n<\frac{x}{2}} E\frac{x}{2n} - \sum_{n>0}^{n<\frac{x}{4}} E\frac{x}{4n},$$

lub

$$\sum_{k>0}^{k<\frac{x}{2}} \theta(2k) = 2T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{4}\right).$$

W ten sposób wzór (7) daje:

$$\varphi(x) = 2\,T(x) - 4\,T\left(\frac{x}{2}\right) + 4T\left(\frac{x}{4}\right), \tag{8}$$

Digitized by Google

co jeszcze zauważywszy, iż:

$$T(x) = E\frac{x}{1} + E\frac{x}{2} + E\frac{x}{3} + \ldots$$

$$T\left(\frac{x}{2}\right) = E\frac{x}{2} + E\frac{x}{4} + E\frac{x}{6} + \ldots\ldots$$

$$T\left(\frac{x}{4}\right) = E\frac{x}{4} + E\frac{x}{8} + E\frac{x}{12} + \ldots\ldots$$

i łącząc w wyrażeniu $2T(x) - 4T\left(\frac{x}{2}\right) + 4T\left(\frac{x}{4}\right)$ wyrazy podobne, możemy napisać w postaci:

$$\varphi(x) = 2\left[E\frac{x}{1} - E\frac{x}{2} + E\frac{x}{4} + E\frac{x}{5} - E\frac{x}{6} + \ldots\ldots\right],$$

lub, w formie zwięzłej:

$$(9) \qquad \varphi(x) = 2\sum_{n>0}^{n\leqslant x}(-1)^{\frac{n^2(n^2-1)}{4}} E\frac{x}{n}.$$

Porównywając ze sobą wzory (5) i (9), otrzymujemy ciekawą tożsamość:

$$E\sqrt{x} - E\frac{x-1}{2}.E\frac{x+1}{2} + 2\sum_{n>0}^{n\leqslant\frac{x-1}{2}} E\sqrt{x+n^2} = \sum_{n>0}^{n\leqslant x}(-1)^{\frac{n^2(n^2-1)}{4}} E\frac{x}{n}.$$

§ 10. Wzory (5) i (9) nie są dogodne do obliczania funkcyi $\varphi(x)$ przy nieco większych wartościach na x, gdyż sumy, wchodzące po prawych stronach tych wzorów, zawierają wtedy wielką liczbę składników: odpowiednio $E\frac{x-1}{2}$ oraz Ex. Np dla $x=1000$ suma we wzorze (5) zawiera 499, zaś suma we wzorze (9) aż 1000 składników. Ze wzoru (8) można jednak otrzymać dogodniejszy wzór na obliczanie funkcyi $\varphi(x)$, używając tożsamościowego przekształcenia $T(z)$, podanego przez Lejeune-Dirichleta.

Aby otrzymać to przekształcenie, podzielimy wszystkie całkowite, dodatnie rozwiązania (m, n) nierówności:

$$mn \leqslant z$$

Digitized by Google

na dwie klasy, zaliczając do pierwszej rozwiązania, dla których $n \leqslant \sqrt{z}$, zaś do drugiej wszystkie pozostałe rozwiazania, a więc te, dla których $n > \sqrt{z}$. Policzmy, ile jest rozwiązań w każdej klasie.

Przyjmując na n jakąkolwiek wartość całkowitą, dodatnią, nie większą od $\sqrt{z}$, będziemy otrzymywali rozwiązania pierwszej klasy, jeżeli liczba całkowita, dodatnia m będzie $\leqslant \frac{z}{n}$; przy każdem takiem n będzie zatem dokładnie $E\frac{z}{n}$ rozwiązań, a więc ogólna liczba rozwiązań pierwszej klasy wynosi:

$$\sum_{n>0}^{n \leqslant \sqrt{z}} E\frac{z}{n}.$$

Policzmy teraz, ile jest rozwiązań klasy drugiej, czyli ile jest całkowitych dodatnich rozwiązań (m, n) nierówności:

$$mn \leqslant z, \quad n > \sqrt{z},$$

lub

$$\sqrt{z} < n \leqslant \frac{z}{m},$$

Przyjmijmy oznaczoną dodatnią, całkowitą wartość na m. Napisane ostatnio nierówności wskazują, że gdyby było $\frac{z}{m} < \sqrt{z}$, czyli $m > \sqrt{z}$, (m, n) nie mogłoby przy żadnem n być rozwiązaniem uważanej klasy, Musi więc być $m \leqslant \sqrt{z}$. Ale w takim razie przy danem m, n będzie mogło przyjmować dokładnie $E\frac{z}{m} - E\sqrt{z}$ różnych wartości, dając rozwiązania (m, n) uważanej klasy, tak, iż ogólna liczba rozwiązań tej klasy wyniesie:

$$\sum_{m>0}^{m \leqslant \sqrt{z}} \left(E\frac{z}{m} - E\sqrt{z}\right),$$

czyli:

$$\sum_{m>0}^{m \leqslant \sqrt{z}} E\frac{z}{m} - (E\sqrt{z})^2,$$

Digitized by Google

W ten sposób znajdujemy, iż

$$T(z) = 2 \sum_{m>0}^{n<\sqrt{z}} E \frac{z}{n} - (E\sqrt{z})^2 , \tag{10}$$

co przedstawia wzór, któryśmy chcieli wyprowadzić.

Na mocy tożsamości (8) z łatwością już otrzymamy, biorąc pod uwagę ostatni wzór na $T(z)$ i łącząc wyrazy podobne:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & -2(E\sqrt{x})^2 + 4\left(E\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2 - 4\left(E\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2 \\ & + 4 \sum_{n>0}^{n<\sqrt{x}} (-1)^{\frac{n^2(n^2-1)}{4}} E\frac{x}{n} - 8 \sum_{n>\frac{\sqrt{x}-2}{4}}^{n<\frac{\sqrt{2x}-2}{4}} E\frac{x}{4n+2} + 8 \sum_{n>\sqrt{\frac{x}{8}}}^{n<\frac{\sqrt{x}}{2}} E\frac{x}{4n} . \end{aligned} \tag{11}$$

Liczba składników we wszystkich trzech sumach razem jest zawsze mniejsza od $\frac{5}{4}\sqrt{x} + 2$; wzór (10) jest zatem przy wyższych wartościach na x dogodniejszy do obliczania, niż wzory (5) i (9). Np. dla $x = 1000$ sumy te zawierają odpowiednio 31, 3 i 4 składniki, tak iż w całym wzorze trzeba wtedy obliczyć tylko 41 wartości symbolu E, gdy tymczasem we wzorach (5) i (9) trzebaby przy $x = 1000$ wyznaczyć odpowiednio 502 i 1000 wartości tego symbolu.

Dla $x = 100$ należy we wzorze (10) wyznaczyć tylko 16 wartości E; znajdziemy:

$$\varphi(1000) = 484.$$

Dla $x = 1000$ obliczyliśmy:

$$\varphi(1000) = 7062 ,$$

a więc w pierwszym tysiącu przypada na każdą liczbę średnio po 7 rozkładów na różnicę dwóch kwadratów.

§ 11. Ze wzorów (8) można z łatwością otrzymać ciekawe wyrażenie na wartość przybliżoną funkcyi $\varphi(x)$, używając w tym celu wzoru na przybliżoną wartość funkcyi $T(z)$, znalezionego przez Dirichleta.

Digitized by Google

Wzór ten opiewa, iż dla wielkich wartości z można przyjąć:

$$T(z) = z(\log z + 2C - 1),$$

gdzie symbol log oznacza logarytm N e p e r a, zaś literą C oznaczamy liczbę

$$C = 0{,}5772156649 \ldots\ldots,$$

tak zwaną stałą E u l e r a; błąd napisanej wyżej równości przybliżonej jest stale mniejszym od pewnej wielokrotności liczby $\sqrt{z}$.

Podstawiając tę wartość przybliżoną na $T(z)$ do wzoru (8), otrzymamy z łatwością równość przybliżoną:

$$\varphi(x) = x(\log x + 2C - 1),$$

skąd jeszcze wnosimy o przybliżonej równości pomiędzy sumami $\varphi(x)$ $T(x)$, ściślej, o nierówności:

$$|\varphi(x) - T(x)| < A\sqrt{x},$$

gdzie A oznacza pewną liczbę stałą. Można stąd wywnioskować, że różnica średnich arytmetycznych:

$$\frac{\tau(1) + \tau(2) + \ldots\ldots + \tau(m)}{m} - \frac{\theta(1) + \theta(2) + \ldots\ldots + \theta(m)}{m},$$

czyli średnich wartości funkcyj $\tau(n)$ i $\theta(n)$ dla liczb od 1 do m, zmierza przy wzrastaniu m do zera. Wysławiamy to, mówiąc, że ś r e d n i e w a r t o ś c i f u n k c y j $\tau(n)$ i $\theta(n)$ s ą s o b i e r ó w n e.

Np. przy $x = 100$ dla funkcyj:

$$\varphi(x), \quad T(x) \quad \text{i} \quad x(\log x + 2C - 2),$$

znajdujemy odpowiednio wartości:

484, 482, 476;

przy $x = 1000$ wartości:

7062, 7069, 7062,2;

Digitized by Google

średnie wartości funkcyj $\tau(n)$ i $\theta(n)$ wynoszą: dla pierwszej setki odpowiednio:

4,83 i 4,82, (różnią się więc o 0,02).

dla pierwszego tysiąca:

7,062 i 7,069, różnią się więc o —0,007).

§ 12. Wzór (7a) rozdz. I-go pozwala z łatwością wykazać, iż dla liczb względnie pierwszych m i n mamy stale:

$$\tau(1)\,\tau(mn) = \tau(m)\,\tau(n).$$

Opierając się na tej tożsamości, można otrzymać przekształcenie szeregu nieskończonego:

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} \qquad (s > 1).$$

na iloczyn nieskończony, z którego wynika tożsamość:

$$F(s) = 2\left(1 - \frac{2}{2^s} + \frac{2}{2^{2s}}\right)\zeta^2(s),$$

gdzie przez $\zeta(s)$ oznaczamy funkcyę Riemanna:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Z tożsamości tej, biorąc pod uwagę znany wzór:

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta(n)}{n^s} = \Phi(s),$$

otrzymać można z łatwością:

$$\lim_{\varrho=0} [F(1+\varrho) - \Phi(1+\varrho)] = \log^2 2,$$

skąd można wnioskować, że jeżeli wyrażenie:

Digitized by Google

$$\sum_{n>0}^{n\leqq x} \frac{\tau(n)}{n} - \sum_{n>0}^{n\leqq x} \frac{\theta(n)}{n},$$

dąży dla $x=\infty$ do nieoznaczonej granicy, to granicą tą może być tylko liczba $\log^2 2$, a że, jak to można z łatwością wykazać, opierając się na nierówności dla $\varphi(x)-T(x)$ z § 11, napisane wyżej wyrażenie rzeczywiście zmienia do granicy, więc mamy:

$$\lim_{x=\infty}\left(\sum_{n>0}^{n\leqq x} \frac{\tau(n)}{n} - \sum_{n>0}^{n\leqq x} \frac{\theta(n)}{n}\right) = \log^2 2.$$

§ 13. Z innych wzorów analitycznych, dotyczących funkcyi $\tau(n)$ podamy jeszcze dwa, na sumę:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tau(n). \qquad (|x|<1)$$

Dla otrzymania pierwszego z tych wzorów przedstawimy uważaną sumę w postaci podwójnej:

$$S = \sum_{\sigma} x^{\mu^2-\nu^2},$$

gdzie obszar sumowania (σ) rozciąga się na wszystkie wartości całkowite μ, ν, spełniające nierówność:

$$\mu^2-\nu^2 > 0.$$

Z nierówności tej znajdujemy:

$$|\mu| > |\nu|,$$

tak iż możemy założyć:

$$|\mu| = |\nu| + k,$$

gdzie k oznacza liczbę całkowitą dodatnią. Ostatnia równość daje:

$$\mu^2-\nu^2 = 2|\nu|.k + k^2,$$

tak, iż:

$$S = \sum_{k,\nu} x^{2|\nu|.k+k^2},$$

Digitized by Google

gdzie sumowanie względem k rozciągnąć należy na wszystkie liczby całkowite dodatnie, zaś względem ν — na wszystkie liczby całkowite. Wykonywając sumowanie względem ν, otrzymamy:

$$S = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+x^{2k}}{1-x^{2k}} x^{k^2}.$$

Dla otrzymania drugiego wzoru na tę samą sumę, należałoby się oprzeć na zależności pomiędzy funkcyami $\tau(n)$ i $\theta(n)$. Przeprowadzając rozumowania analogiczne z wyłożonemi szczegółowo w § 9 przy wyprowadzaniu wzoru (9), i opierając się na wzorze Lamberta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \theta(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n},$$

dostalibyśmy wzór:

$$S = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2(n^2-1)}{4}} \frac{x^n}{1-x^n}.$$

Przez porównanie obu wzorów na sumę S, otrzymamy ciekawą tożsamość:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+x^{2n}}{1-x^{2n}} x^{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2(n^2-1)}{4}} \frac{x^n}{1-x^n}, \qquad (|x|<1).$$

Digitized by Google

St. GUZEL.

Dowód elementarny pewnego twierdzenia z analitycznej teoryi liczb.

Celem niniejszego artykułu jest wyprowadzenie drogą elementarną nierówności:

$$(1)\quad \left|\frac{\tau(1)+\tau(2)+\ldots\ldots+\tau(n)}{n}-\frac{\theta(1)+\theta(2)+\ldots\ldots+\theta(n)}{n}\right|<\frac{4}{\sqrt{n}},$$

gdzie $\tau(n)$ oznacza liczbę rozkładów liczby n na różnicę kwadratów dwóch liczb całkowitych, zaś $\theta(n)$—liczbę dzielników liczby n.

Z nierówności tej wyprowadzamy bezpośrednio wniosek, iż przy wzrastaniu liczby n lewa jej strona zmierza do zera, co p. Sierpiński wyraża w ten sposób:

„Wartości średnie funkcyj $\tau(n)$ i $\theta(n)$ są sobie równe“ [1].

Dla dowodu nierówności (1) wyjdziemy ze wzorów:

$$(2)\quad \begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n>0}^{n\leq x}\tau(n) = 2\sum_{n>0}^{n\leq x}(-1)^{\frac{n^2(n^2-1)}{4}}E\frac{x}{n}, \\ T(x) &= \sum_{n>0}^{n\leq x}\theta(n) = \sum_{n>0}^{n\leq x}E\frac{x}{n}, \end{aligned}$$

których wywód elementarny czytelnik znajdzie w zacytowanym już artykule p. Sierpińskiego.

---

[1]) W. Sierpiński. „O rozkładach liczb całkowitych na różnicę dwóch kwadratów“. Patrz wyżej Sprawozdanie str. 107.

Digitized by Google

Obliczając różnicę $\sigma(x) - T(x)$ na mocy wzorów (2), po łatwej redukcyi otrzymamy:

$$\sigma(x) - T(x) = \sum_{n>0}^{n\leqslant x} a_n E\frac{x}{n}, \tag{3}$$

gdzie spółczynnik $a_n = -3$ dla liczb n parzystych, lecz niepodzielnych przez 4, oraz $a_n = 1$ dla wszystkich innych całkowitych n.

Sumę (3) możemy jeszcze przepisać w postaci:

$$\sigma(x) - T(x) = \sum_{k=0}^{k\leqslant\frac{x}{4}} s_k, \tag{4}$$

oznaczając przez skrócenie:

$$s_k = E\frac{x}{4k+1} - 3E\frac{x}{4k+2} - E\frac{x}{4k+3} - E\frac{x}{4k+4}.$$

Otrzymaną sumę (4) przekształcimy jeszcze w sposób następujący: podzielmy wszystkie składniki tej sumy na dwie klasy, zaliczając do klasy pierwszej wszystkie te składniki, dla których $0 \leqslant k \leqslant \sqrt{\frac{x}{4}}$, do drugiej zaś — wszystkie pozostałe, t. j. te, dla których $\sqrt{\frac{x}{4}} < k < \frac{x}{4}$. Wzór (4) przyjmie zatem postać:

$$\sigma(x) = T(x) + \sum_{k=0}^{k\leqslant\sqrt{\frac{x}{4}}} s_k - \sum_{k>\sqrt{\frac{x}{4}}}^{k\leqslant\frac{x}{4}} s_k. \tag{5}$$

Uważamy pierwszy składnik sumy (5), a więc sumę:

$$\sum_{k=0}^{k\leqslant\sqrt{\frac{x}{4}}} s_k. \tag{6}$$

Liczba wszystkich składników tej sumy jest $E\left(\sqrt{\frac{x}{4}}+1\right)$, a zatem nie większa od liczby $\frac{\sqrt{x}}{2}+1$.

Digitized by Google

Podstawmy w każdym takim składniku s_k zamiast $E\frac{x}{4k+1}$, $E\frac{x}{4k+3}$ i $E\frac{x}{4k+4}$ odpowiednio same liczby $\frac{x}{4k+1}$, $\frac{x}{4k+3}$ i $\frac{x}{4k+4}$. Suma błędów, jakie w takim razie popełnimy, będzie dla każdego składnika liczbą mniejszą od 3; ponieważ zaś wszystkich składników jest nie więcej niż $\frac{\sqrt{x}}{2}+1$, więc ogólny błąd będzie napewno mniejszy od liczby $3\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+1\right)$. Jeżeli teraz to samo uczynimy z pozostałemi jeszcze symbolami, to jest zamiast $E\frac{x}{4k+2}$ podstawimy same liczby $\frac{x}{4k+2}$, to z łatwością zauważymy, iż błąd popełniony w każdym składniku będzie również mniejszy od 3, lecz znak jego będzie wprost przeciwny. Dochodzimy więc do wniosku, że i w tym razie błąd ogólny będzie mniejszy od liczby $3\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+1\right)$, lecz o znaku przeciwnym. Oba powyższe błędy będą się oczywiście znosiły, przynajmniej częściowo, tak, iż podstawiając zamiast sumy (6) sumę:

$$\sum_{k\geqslant 0}^{k<\sqrt{\frac{x}{4}}}\left(\frac{x}{4k+1}-\frac{3x}{4k+2}+\frac{x}{4k+3}+\frac{x}{4k+4}\right),$$

popełnimy błąd w każdym razie mniejszy od liczby $3\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+1\right)$.

Ostatnią sumę napiszemy w postaci:

$$x\sum_{k\geqslant 0}^{k\leqslant\sqrt{\frac{x}{4}}}\left(\frac{1}{4k+1}-\frac{3}{4k+2}+\frac{1}{4k+3}+\frac{1}{4k+4}\right). \tag{7}$$

Dla dalszego przekształcenia sumy (7) użyjemy tożsamości:

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{1}{4k+1}-\frac{3}{4k+2}+\frac{1}{4k+3}+\frac{1}{4k+4}\right)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{(2m+2k+1)(2m+2k+2)},$$

Digitized by Google

którą łatwo udowodnić zakładając, iż jest prawdziwa przy pewnem $(m>1)$, i że w takim razie prawdziwą być musi przy $m+1$.

Dalej, zważywszy, iż suma, znajdująca się po prawej stronie napisanej tożsamości, zawiera m składników dodatnich, a wartość każdego z nich jest mniejszą od $\frac{1}{4m^2}$, dochodzimy do wniosku, że:

$$0 < \sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{1}{4k+1} - \frac{3}{4k+2} + \frac{1}{4k+3} + \frac{1}{4k+4}\right) < \frac{1}{4m}.$$

Zakładając we wzorze powyższym $m = E\left(\sqrt{\frac{x}{4}} + 1\right)$, a więc $\sqrt{\frac{x}{4}} < m \leqslant \sqrt{\frac{x}{4}} + 1$, czyli $m-1 \leqslant \sqrt{\frac{x}{4}}$, otrzymamy:

$$0 < \sum_{k>0}^{k\leqslant\sqrt{\frac{x}{4}}}\left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+2} + \frac{1}{4k+3} - \frac{1}{4k+4}\right) < \frac{1}{4m} < \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

skąd:

$$0 < x\sum_{k>0}^{k\leqslant\sqrt{\frac{x}{4}}}\left(\frac{1}{4k+1} - \frac{3}{4k+2} + \frac{1}{4k+3} + \frac{1}{4k+4}\right) < \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

Zestawiając otrzymany rezultat z tem, cośmy wykazali poprzednio, t. j. że błąd, popełniony przez podstawienie sumy (7) zamiast (6) jest mniejszy od liczby $3\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + 1\right)$, wnosimy, że wartość bezwzględna sumy (6) jest mniejsza od liczby:

$$3\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + 1\right) + \frac{\sqrt{x}}{2},$$

czyli:

$$\left|\sum_{k>0}^{k\leqslant\sqrt{\frac{x}{4}}} s_k\right| < 2\sqrt{x} + 3. \tag{8}$$

Uważajmy teraz drugi składnik sumy (5), t. j. sumę:

$$\sum_{k>\sqrt{\frac{x}{4}}}^{k<\frac{x}{4}} s_k. \tag{9}$$

Digitized by Google

Oczywiście zachodzą tu nierówności:

$$\frac{x}{4k+1} > \frac{x}{4k+2} > \frac{x}{4k+3} > \frac{x}{4k+4} + \frac{x}{4k+5},$$

skąd już bezpośrednio wynika:

$$(10) \qquad E\frac{x}{4k+1} \geqslant E\frac{x}{4k+2} \geqslant E\frac{x}{4k+3} > E\frac{x}{4k+4} \geqslant E\frac{x}{4k+5}.$$

Jeślibyśmy mieli:

$$E\frac{x}{4k+1} = E\frac{x}{4k+5}, \quad \text{czyli } E\frac{x}{4k+1} - E\frac{x}{4k+5} = 0,$$

to wszystkie nierówności (10) stałyby się wówczas równościami, i, jak to łatwo zauważyć, cały odpowiedni składnik s_k musiałby być zerem. Stąd wypada, iż składnik ten może być od zera odmienny tylko wtedy, jeżeli zachodzi nierówność:

$$E\frac{x}{4k+1} - E\frac{x}{4k+5} > 0.$$

Z drugiej strony mamy:

$$\frac{x}{4k+1} - \frac{x}{4k+5} = \frac{4x}{(4k+1)(4k+5)} < \frac{x}{4k^2},$$

lecz dla sumy (9):

$$k > \sqrt{\frac{x}{4}}, \quad \text{skąd} \quad \frac{x}{4k^2} < 1, \quad \text{a zatem:}$$

$$0 < \frac{x}{4k+1} - \frac{x}{4k+5} < 1.$$

Jeżeli jednak różnica pomiędzy dwiema liczbami $a-b$ jest dodatnia i mniejsza od jedności, to różnica $Ea-Eb$ może być tylko albo zerem, albo jednością.

Digitized by Google

Zatem różnica:

$$E\frac{x}{4k+1} - E\frac{x}{4k+5},$$

skoro ma być większa od zera, musi się równać jedności:

$$E\frac{x}{4k+1} - E\frac{x}{4k+5} = 1.$$

Oznaczmy $E\frac{x}{4k+5} = a$, wtedy $E\frac{x}{4k+1} = a+1$.

Dla pozostałych wyrazów składnika s_k na mocy nierówności (10) mogą zachodzić tylko cztery różne kombinacye, jak to wskazuje następująca tabliczka:

	$E\frac{x}{4k+1}$	$E\frac{x}{4k+2}$	$E\frac{x}{4k+3}$	$E\frac{x}{4k+4}$	$E\frac{x}{4k+5}$
1)	$a+1$	$a+1$	$a+1$	$a+1$	a
2)	$a+1$	$a+1$	$a+1$	a	a
3)	$a+1$	$a+1$	a	a	a
4)	$a+1$	a	a	a	a

W pierwszym przypadku odpowiedni składnik $s_k = 0$, w drugim: $s_k = -1$, w trzecim: $s_k = -2$ i w czwartym: $s_k = +1$; zatem jego wartość bezwzględna nigdy nie przenosi liczby 2.

Przypuśćmy, iż w sumie (9) znajduje się p składników odmiennych od zera. Ponieważ wartość bezwzględna każdego z nich nie przenosi liczby 2, więc wartość bezwzględna całej sumy nie może być większą od liczby $2p$.

Oznaczmy pierwsze wyrazy wszystkich składników s_k odmiennych od zera, wzięte w ich kolejnym porządku odpowiednio przez:

$$E\frac{x}{4k_1+1}, E\frac{x}{4k_2+1}, E\frac{x}{4k_3+1}, \ldots, E\frac{x}{4k_p+1}.$$

Digitized by Google

Oczywiście przy tych założeniach zachodzić muszą następujące nierówności:

$$
(11)\qquad
\begin{array}{lll}
k_1 < k_2\,, & \text{a więc} & k_2 \geqslant k_1+1 \\
k_2 < k_3\,, & \quad\text{„} & k_3 \geqslant k_2+1 \\
\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots \\
k_{p-1} < k_p\,, & \quad\text{„} & k_p \geqslant k_{p-1}+1
\end{array}
$$

Dalej mieć będziemy p równości (na mocy założenia, że uważane składniki s_k są odmienne od zera):

$$
\begin{array}{l}
E\dfrac{x}{4k_1+1} - E\dfrac{x}{4k_1+5} = 1\,, \\
E\dfrac{x}{4k_2+1} - E\dfrac{x}{4k_2+5} = 1\,, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
E\dfrac{x}{4k_p+1} - E\dfrac{x}{4k_p+5} = 1\,.
\end{array}
$$

Dodajmy do siebie odpowiedniemi stronami wszystkie napisane równości, przedstawiając ich sumę w formie następującej:

$$
E\frac{x}{4k_1+1} - \left(E\frac{x}{4(k_1+1)+1} - E\frac{x}{4k_2+1}\right) - \left(E\frac{x}{4(k_2+1)+1} - \frac{x}{4k_3+1}\right) - \cdots\cdots
$$

$$
\cdots\cdots - \left(E\frac{x}{4(k_{p-1}+1)+1} - E\frac{x}{4k_p+1}\right) - E\frac{x}{4k_p+5} = p\,.
$$

Na mocy nierówności (11) oraz (10) wnosimy, iż żadna z różnic, stojących w nawiasach po lewej stronie otrzymanej równości, ujemną być nie może, zaś ostatni wyraz $E\dfrac{x}{4k_p+5}$ jest na pewno dodatni.

Stąd już bezpośrednio wypada, że:

$$
E\frac{x}{4k_1+1} > p.
$$

Digitized by Google

Lecz k_1 będąc jedną z wartości k w sumie (9), musi spełniać warunek $k_1 > \sqrt{\frac{x}{4}}$, zatem:

$$E\frac{x}{4k_1+1} \leqq \frac{x}{4k_1} < \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

Zestawiając ostatnie dwie nierówności, zauważymy z łatwością, iż:

$$p < \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

Wykazaliśmy jednak poprzednio, że wartość bezwzględna sumy (9) nie może być większa od $2p$, a zatem:

$$\left| \sum_{k > \sqrt{\frac{x}{4}}}^{k < \frac{x}{4}} s_k \right| < \sqrt{x}. \tag{12}$$

Porównywając ze sobą wzory (5), (8) i (12), dochodzimy ostatecznie do wniosku, że:

$$|\varphi(x) - T(x)| < 3\sqrt{x} + 3.$$

Ponieważ dla $x \geqslant 9$, $\sqrt{x}$ jest większy od 3, więc możemy ostatnią nierówność przepisać jeszcze w postaci:

$$|\varphi(x) - T(x)| < 4\sqrt{x}, \quad \text{dla} \quad x \geqslant 9;$$

że wzór ten jest prawdziwy i dla $x < 9$, można sprawdzić bezpośrednio.

Zakładając w powyższej nierówności na x wartość całkowitą n i dzieląc obie jej strony przez n, otrzymamy z łatwością nierówność:

$$\left| \frac{\varphi(n)}{n} - \frac{T(n)}{n} \right| < \frac{4}{\sqrt{n}},$$

którą zamierzaliśmy właśnie wyprowadzić.

Ażeby uwidocznić zachowanie się funkcyj $\varphi(n)$ i $T(n)$, podajemy poniżej tablicę wartości tych funkcyj dla liczb nie przewyższających 10000, w odstępach co 10, co 100 i co 1000.

Digitized by Google

Tablica wartości funkcyj $\varphi(n)$ i $T(n)$.

n	$\varphi(n)$	$T(n)$	$\varphi(n)-T(n)$
10	26	27	— 1
20	64	66	— 2
30	106	111	— 5
40	160	158	+ 2
50	206	207	— 1
60	258	261	— 3
70	308	312	— 4
80	368	368	0
90	418	425	— 7
100	484	482	+ 2
200	1096	1098	— 2
300	1766	1767	— 1
400	2472	2468	+ 4
500	3188	3190	— 2
600	3940	3944	— 4
700	4700	4700	0
800	5484	5482	+ 2
900	6280	6276	+ 4
1000	7062	7069	— 7
2000	15520	15518	+ 2
3000	24492	24496	— 4
4000	33814	33805	+ 9
5000	43372	43376	— 4
6000	53154	53141	+13
7000	63070	63071	— 1
8000	73150	73149	+ 1
9000	83364	83358	+ 6
10000	93672	93668	+ 4

Digitized by Google

Digitized by Google

SPRAWOZDANIA Z LITERATURY. — RECENZYE. BIBLIOGRAFIA.

M. Feldblum. „Algebra elementarna". 8°, str. 500. Łódź. 1906.

Książka składa się z czterech części: A. Nauka o liczbach. B. Nauka o równościach; C. Postępy i logarytmy i D. Działy dodatkowe: kombinatoryka, dwumian Newtona, wyznaczniki i ułamek łańcuchowy. Do każdego rozdziału dodana jest niewielka liczba przykładów (ogółem 487). Układ książki jest ściśle systematyczny, a więc, co za tem idzie, względy dydaktyczne musiały być odłożone na plan drugi. Ta systematyczność układu jest bardzo cenną zarówno dla nauczyciela, jak i dla starszych uczniów, powtarzających cały kurs i w ogóle dla ludzi, oboznanych z przedmiotem a pragnących odświeżyć sobie jakiś dział w pamięci, lub wiadomości swoje usystematyzować. Dla tego też ukazanie się tej książki wypełniło bardzo poważny brak w naszej literaturze. Kto jednakże zechce używać jej jako podręcznika w klasach średnich, będzie musiał porządek rozdziałów w wielu miejscach pozmieniać.

Część pierwszą autor w przedmowie charakteryzuje w następujący sposób: „W pierwszej części czytelnik znajdzie systematyczny wykład nauki o liczbie; pojęcie o liczbie rozwija się stopniowo, aż do liczby zespolonej. Teoryę liczb niewymiernych oparłem na Dedekindowskiem pojęciu przekroju dziedziny liczb; stąd wyprowadzona została definicya liczby niewymiernej za pomocą podwójnych szeregów nieskończonych. W nauce o liczbach zespolonych podkreśliłem właściwy charakter tych liczb, aby zapobiedz tak pospolitemu w umysłach uczni przedstawieniu, jakoby liczba zespolona była czemś istotnie urojonem".

Digitized by Google

Takie systematyczne rozwinięcie pojęcia o liczbie, począwszy od liczb naturalnych, a skończywszy na liczbach zespolonych, jest bardzo pożyteczne, ale uczyć w tym porządku nie można. Wykładać uczniom czwartej klasy teoryę Dedekindowską liczb niewymiernych, a następnie naukę o liczbach zespolonych, zanim ci uczniowie zdobędą odpowiednie wiadomości geometryczne i dowiedzą się, co to są równania, byłoby pracą bezowocną. W dodatku uczeń dłużej niż przez dwa pierwsze lata nauki Algebry nie mógłby rozwiązać ani jednego zadania, mającego jakikolwiek związek z życiem praktycznem lub z przyrodą, a więc byłby pozbawiony przez tak długi czas pojęcia o tem, że ta nauka może mu się na coś przydać.

W części tej na uznanie zasługuje wprowadzenie Dedekindowskiej teoryi liczb niewymiernych, co zostało dokonane — pomijając drobne usterki—w sposób ścisły i przystępny. (Błędnie jest podane określenie różnicy $A—C$ na str. 102; wyrazami szeregów, określających tę różnicę, są $a—d$ i $b—c$, nie zaś $a—c$ i $b—d$). W ogóle rozdział o liczbach niewymiernych należy do najlepszych w książce; stopień przybliżenia, sposoby wyciągania pierwiastków i t. d. są wyrażone jasno i dokładnie. Dodatnio wyróżnia się równiez rozdział VI (Działania na wielomianach).

Ścisłe określenie liczb niewymiernych stanowi chwalebny wyjątek; pozatem prawie wszystkie uogólnienia liczb i działań nad niemi zostały wprowadzone równie niezrozumiale jak nieściśle, co, oczywiście, musi być źródłem różnych niekonsekwencyj. Na str. 13 czytamy: „pragnąc pomnożyć trójmian $a—b+c$ przez dwumian $d+e$, piszemy:

$$(a—b+c)\,(d+e),$$

to wyrażenie jest już jednomianem...“; podobnie na str. 12 $\frac{a^2+bc}{b^2+ac}$ jest podane jako przykład jednomianu; zaś na str. 69 czytamy: „Iloraz od podzielenia jednomianu przez wielomian, po pomnożeniu przez wielomian, ma dać jednomian, wnosimy stąd, że iloraz taki nie może być ani wielomianem, ani jednomianem.“

Mniejsza zresztą o jednomiany. Gorzej, że liczby ujemne i zespolone przedstawiają się równie mglisto. „Liczbę, która, będąc dodana do jedności arytmetycznej, daje w sumie zero, nazywamy jednością ujemną.“ „Nazywać będziemy zbiór jedności ujemnych liczbą

Digitized by Google

całkowitą ujemną" (str. 17, 18). Zero przedtem określone nie było, jak się tworzy „zbiór jedności ujemnych" — niewiadomo, określenia więc nie są wystarczające. Możnaby było zachować je, gdyby miały jakieś zalety dydatktyczne, ale one są równie niejasne jak nieścisłe. Nieścisłe są też oparte na nich dowodzenia: „skoro każda jedność ujemna znosi jednę jedność dodatnią..." i t. d.

W ogóle autor nie wyróżnia należycie twierdzeń od określeń lub założeń; nieraz nie widać, czy to, co czytamy, ma być dowodzeniem, czy też tylko objaśnieniem. Jaki charakter ma np. zdanie: „wszelka liczba ujemna jest mniejsza, niż wszelka liczba dodatnia" (str. 23)? Wątpliwości tego rodzaju nasuwają się przy czytaniu książki bardzo często. Uszłyby to w jakimś kursie propedentycznym, ale nigdy w systematycznej nauce Algebry.

Określenie: „Pomnożyć jednę liczbę przez drugą znaczy: z mnożnej utworzyć iloczyn w taki sam sposób, w jaki mnożnik powstał z jedności dodatniej" (str. 24) powinno raz nareszcie zniknąć z podręczników. Określenie to w znakowaniu matematycznem znaczy: $ab=c$, jeżeli $b=f(1)$, $c=f(a)$, ale funkcya f nie jest tutaj niczem określona; mnożnik b mogł powstać z jedności nieskończenie wieloma sposobami. -3 mogło powstać z jedności, np. przez dodanie do niej -4; a więc, podług powyższego określenia, mogłoby być: $(+12)(-3) = (+12)+(-4) = 8$.

Zarzuty te nie dotyczą oczywiście wyłącznie Algebry p. Feldbluma, uważam jednak za konieczne wytykać błędy tego rodzaju, ażeby przyczynić do ich stopniowego usuwania z podręczników.

W dowodzeniu reguły na mnożenie (str. 62) nie zaznaczono, że jest ono wystarczające tylko wtedy, kiedy mnożnik jest liczbą całkowitą dodatnią; brak ten napotyka się zresztą dość często. W sformułowaniu reguły również czegoś brak: „Ażeby pomnożyć wielomian przez wielomian, mnożymy kolejno każdy wyraz jednego wielomianu przez każdy wyraz drugiego." I na tem koniec.

Rozdział, traktujący o ułamkach algebraicznych, posiada prawie wszystkie, dające się tu nagromadzić wady podręczników starej daty. Reguły działań są bądź zaopatrzone w dowodzenia pozorne, bądź też podane w takiej formie, że nie wiadomo czy to twierdzenie, czy określenie, czy pewnik.

Digitized by Google

Po rozdziale w liczbach niewymiernych, będącym zupełnie na wysokości dzisiejszej nauki i stanowiącym prawdziwą ozdobę książki, następuje ostatni rozdział pierwszej części: o liczbach zespolonych. Mówić o liczbach zespolonych, nie korzystając z nauki o równaniach, jest rzeczą bardzo trudną; nie można też powiedzieć, ażeby autor pokonał tę trudność szczęśliwie.

Pomimo zapowiedzi w Przedmowie (patrz ustęp zacytowany wyżej), autor nie wyjaśnia „właściwego charakteru" liczb zespolonych; wyraża jedynie życzenie, ażeby nazwa „jedność urojona" nie budziła „w czytelniku jakichkolwiek wyobrażeń, skojarzonych z urojeniem, niemożliwością, fantazyą." Tego rodzaju ostrzeżenie właśnie wywołuje wyobrażenia, o których mowa. Chcąc ich uniknąć, należało wyraźnie zaznaczyć, że liczby zespolone są niemożliwe, dopóki wszystkie pewniki arytmetyczne utrzymujemy w mocy, i że one stają się możliwemi, o ile odrzucimy te pewniki, które wymagają, ażeby z pomiędzy dwóch liczb nierównych jedna była zawsze większa od drugiej. Za to jednak autora winić nie można, gdyż idzie śladem wielu poprzedników. Ale winą jego jest nikłe określenie liczby zespolonej (str. 132), jeżeli sposób, w jaki ją wprowadza, w ogóle można nazwać określeniem; jest to skutek rozpatrywania tych liczb przed równaniami stopnia drugiego.

Część druga o równaniach jest opracowana systematyczniej i ściślej. Autor rozpatruje z początku szczegółowo przekształcenia równań i wpływ tych operacyi na pierwiastki. Sposoby rozwiązywania równań oznaczonych, nierówności stopnia pierwszego i równań nieoznaczonych stopnia pierwszego są wyłożone nader umiejętnie i przystępnie. Autor tu, jak i w całej książce, wszelkie wyrażenia algebraiczne nazywa liczbami, unikając w ten sposób pojęcia funkcyi. Na str. 150 przez pomyłkę wielkość D nazwano najmniejszą spólną wielokątną, zamiast największym spólnym dzielnikiem.

Nie można zgodzić się z autorem, że przypadki, kiedy w równaniu $ax=b$ jest $a=0$, $b\neq 0$, lub $a=b=0$, nie mają żadnego znaczenia praktycznego. Autor w całej książce nie uwzględnia zastosowań do Geometryi lub do innych nauk; gdyby to zrobił, miałby bardzo często do czynienia z zadaniami, w których x powiększa się do ∞, jeżeli a maleje do 0. W ogóle nie liczenie się z zasadami jest poważnym brakiem podręcznika. Tu również należy szukać przyczyny błędnego twierdzenia, że jeżeli w dwóch równaniach stopnia pierwszego z dwie-

Digitized by Google

ma niewiadomemi jeden z pierwiastków jest nieskończonością, to i drugi musi być nieskończonością (str. 193).

W trzeciej części wyłożone są postępy arytmetyczne i geometryczne z zastosowaniami do sumowania niektórych szeregów liczb. Określenie logarytmu wyprowadzone jest z równania wykładniczego. Autor uwzględnia w tekście tablice logarytmów pięciocyfrowych. Zakończenie tej części stanowi rachunek procentów składanych, rent itd. W ogóle cała ta część jest bez zarzutu.

Część ostatnia, zawierająca kilka luźnych rozdziałów, zaczyna się od kombinatoryki. I temu rozdziałowi zarzutów poważniejszych robić nie można; jedynie dowodzenie twierdzenia: „Wskutek przestawienia pojedyńczego, przemiana prosta przechodzi na odwróconą, a odwrócona na prostą“ (str. 427) jest tak powikłane, że sam autor nie mógł z niego szczęśliwie wybrnąć. Ze zdania „jeżeli liczba p jest zawarta między k i r, to.... przestawienie nie zmienia liczby odwróceń“, wynikłoby, że przestawienia 1, 2, 3 i 3, 2, 1 mają jednakową liczbę odwróceń.

Pozostałe rozdziały opracowane są starannie i przystępnie; zastrzeżenie można zrobić jedynie co do niewłaściwego oznaczenia ostatniego w wyznaczniku symbolem n_n (str. 451), wskutek czego litera n ma dwa różne znaczenia.

Błędy korektorskie zauważyłem na str. 15, gdzie ostatni przykład nie zgadza się z odpowiedzią; na str. 58, w trzeciem równaniu od dołu, $[(n-p)-p]$ zamiast $[(n-p)+p]$ i na str. 403 $(1+)$ zamiast $(1+r)$.

Reasumując wszystko, można powiedzieć, że książka może być pożyteczna w ręku nauczyciela lub starszego ucznia, jakkolwiek ma duże braki pod względem ścisłości. Jako podręcznik dla młodszych uczniów książka nie może być z pożytkiem stosowana ze względu na nieodpowiedni układ, jak również i na brak zastosowań do Geometryi i do innych nauk, co mocno utrudnia zrozumienie teoryi.

S. Kwietniewski.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

III. W Sierpiński. O rozkładach liczb całkowitych na różnicę dwóch kwadratów.
Sur les décompositions des nombres entiers en une différence de deux carrés . . . . . 87 — 110
III. S. Guzel. Dowód elementarny pewnego twierdzenia z analitycznej Teoryi liczb.
Déminstration élementaire d'un théorème de la théorie analytique des nombres . . . . . 111—119

SPRAWOZDANIA Z LITERATURY. RECENZYE. BIBLIOGRAFIA
ANALYSES et BIBLIOGRAPHIE.

M. Feldblum. Algebra elementarna (S. Kwietniewski) . 121—125

„WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE“

wychodzą zeszytami w ilości 4 do 6 zeszytów rocznie, z których każdy składa się z 2—4 arkuszy druku, i obejmują:

Przedpłata roczna wynosi: w Warszawie 3 ruble; w innych miejscowościach z przesyłką rs. 3 kop. 60.

Prenumeratę przyjmuje księgarnia Gebethnera i Wolffa w Warszawie, Krakowskie-Przedmieście № 15.

Adres Redakcyi „Wiadomości matematycznych“: **Warszawa, Marszałkowska Nr. 117.**

Digitized by Google

DZIEŁA MATEMATYCZNE

WYDANE

z zapomogi Kasy pomocy dla osób pracujących na polu naukowem

im. D-ra Józefa Mianowskiego

do nabycia we wszystkich księgarniach.

A. BIBLIOTEKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNA,

wydawana pod redakcyą

M. A. Baranieckiego i A. Czajewicza.

Serya I tom II i III. Kramsztyk S. Wiadomości początkowe z fizyki Książeczka I, wydanie drugie str. XII. 105, drzeworytów 61. Cena w oprawie kop. 40. Książeczka II, wydanie drugie str. XI. 171, drzeworytów 77. Cena w oprawie kop. 65.

Serya I tom IV. Witkowski A. W. Wiadomości początkowe z geografii fizycznej i meteorologii. Warszawa 1884 w 12-ce str. X. 108, drzeworytów 22, litt 4. Cena w oprawie kop. 25.

Serya III tom V. Baraniecki M. A. Początkowy wykład syntetyczny własności przecięć stożkowych, na podstawie ich pokrewieństwa harmonicznego z kołem. Warszawa 1885 w 8-ce str. XVI. 151, drzeworytów 63 Cena kop. 40.

Serya III tom VI. Czajewicz A. Trygonometrya płaska i kulista. Warszawa 1881 w 8-ce str. XX, 389, drzeworytów 86. Cena rb. 2.

Serya III tom VIII. Witkowski August. Zasady fizyki. Tom. I. Warszawa 1892 w 8-ce str. X. 469. Cena rb. 2.

Serya IV tom II Sochocki J. Rozwiązywanie równań liczebnych. Warszawa 1884 w 8-ce lex. str. XII, 212 Cena kop. 60.

Serya IV tom IV. Zajączkowski Wł. Geometrya analityczna. Warszawa 1884 w 8-ce lex. str. XL. 411, drzeworytów 85. Cena rb. 1.

Serya IV tom X. Franke J. N. Mechanika teoretyczna. Warszawa 1889 w 8-ce str. XXXI. 645, drzeworytów 72. Cena rb. 3.

B. BIBLIOTEKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNA,

wydawana przez

A. Czajewicza i S. Dicksteina.

I. Badowski I. Geometrya elementarna. Warszawa 1894. LVIII. 338 drzeworytów w tekście IX. 344. Cena rb. 1 kop. 35.

II. Baraniecki M. A. Arytmetyka, wykład szczegółowy, wydanie drugie znacznie zmienione. Warszawa 1894, str. LXIV. 408. Cena rb. 1.35.

III. Danielewicz A. B. Podstawy matematyczne ubezpieczeń życiowych. Warszawa 1896. str. 335. Tablic X. Cena rb. 2.

IV. Witkowski August. Zasady Fizyki. Tom II zeszyt pierwszy. Warszawa 1897 w 8-ce str. 301. Cena rb. 1 kop. 35.

V. Kowalczyk J. O sposobach obliczania przeszkód biegu ciał niebieskich. Warszawa 1901, str. 624. Tablic III. Cena rb. 7 kop. 50.

VI. Schur F. Podręcznik geometryi analitycznej, przekład z niemieckiego przez T. Łopuszańskiego. Warszawa 1901, str. 249 z licznemi rysunkami w tekście. Cena rb. 1.

VII. Feldblum M. Geometrya wykreślna. Warszawa. 1902. str. XVI, 325 z 172 rysunkami w tekście. Cena rb. 2.

VIII. Danielewicz A. B. Metoda najmniejszych kwadratów. Warszawa 1904, str. XII, str. XII, 186 Tablic IV. Cena rb. 1 kop. 20. (T. II w druku)

IX. Witkowski August. Zasady Fizyki. Tom II, zeszyt drugi. Warszawa 1904. Cena rb. 1 kop. 35.

X. Folkierski Wł. Zasady Rachunku różniczkowego całkowego. Wydanie II. Tom I. Warszawa 1904. Cena rb. 2 kop 40.

XI. Witkowski August. Zasady Fizyki. Tom I, wydanie drugie. Warszawa 1904. Cena rb. 2.

XII. Merczyng K. Teorya prądu elektrycznego. Warszawa 1905, 8-o, str. 92. Cena 75 kop.

XIII. Gosiewski Wł. Zasady rachunku prawdopodobieństwa. Warszawa, 1906, 8-o, str. 265 Cena rubli 2.

XIV. Jędrzejewicz J. Kosmografia. Wydanie drugie, opracowane przez M. Ernsta. Warszawa, 1907, 8-o, str. 152, figur 246 i tablic 11. Cena rubli 3.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

3 2044 102 938 024

Digitized by Google